

Σημειώσεις και παρατηρήσεις σχετικά με τον Μετασχηματισμό Laplace

Επιμέλεια: Γιώργος Καφεντζής
Υποψ. Διδάκτωρ Τμήμ. Η/Υ
Πανεπιστήμιο Κρήτης

4 Ιουνίου 2013

1 Εισαγωγή

Έχουμε ήδη δει ότι ο μετασχ. Fourier είναι ένα εργαλείο που μας επιτρέπει να αναπαριστούμε ένα σήμα $x(t)$ σαν ένα συνεχές άθροισμα (ολοκλήρωμα) εκθετικών σημάτων της μορφής $e^{j\omega t}$, δηλ.

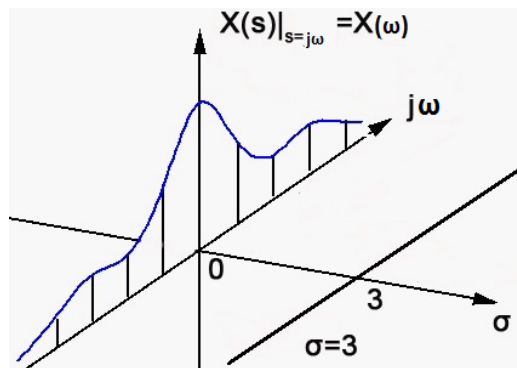
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1)$$

που δεν είναι άλλη σχέση φυσικά εκτός από τον αντίστρ. μετασχ. Fourier.

Έστω λοιπόν ένα σήμα

$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega) \quad (2)$$

Έστω, για λόγους ευκολίας, ότι $X(\omega) \in \mathcal{R}$. Γνωρίζετε πώς να σχεδιάσετε ένα φάσμα. Δείτε το σχήμα 1. Ο άξονας πάνω στον οποίο ορίζεται ο $X(\omega)$ είναι οι γνωστές μας συχνότητες, που έχουμε απλά αντικαταστήσει το ω με το $j\omega$, μια αυτό είναι το όρισμα των εκθετικών μας στο μετασχ. Fourier. Σε αυτό το σχήμα, απλά έχουμε ορίσει ένα χώρο, στον οποίο οι x, y διαστάσεις του είναι το μιγαδικό επίπεδο, και η τρίτη διάσταση είναι οι τιμές του μετασχ. Fourier. Δε σας το είχαμε πει ρητά (το κρατούσαμε για έκπληξη :-P), αλλά όσο



Σχήμα 1: Ο μετασχ. Fourier στο μιγαδικό s -επίπεδο

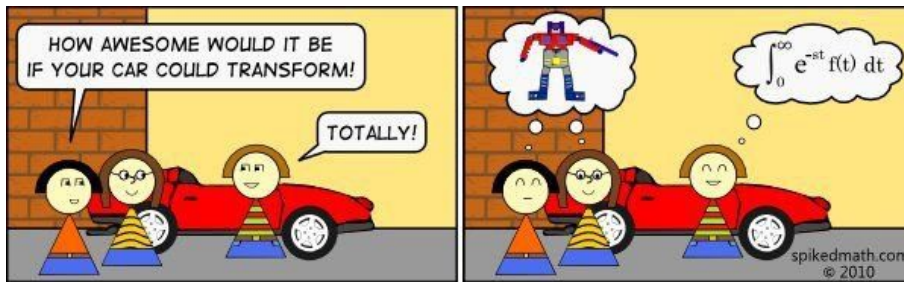
δουλεύετε με το μετασχ. Fourier, ουσιαστικά ένα τέτοιο σήμα βλέπετε, υπό αυτή την οπτική, απλά προφανώς είναι πολύ πιο βολικό να το σχεδιάζουμε όπως έχουμε δει πολλές φορές, σε ένα διδιάστατο επίπεδο, παρά όπως στο σχήμα 1. :-) Βλέπετε λοιπόν ότι ο μετασχ. Fourier $X(\omega)$ ορίζεται πάνω στον κατακόρυφο άξονα των φανταστικών συχνοτήτων $j\omega$ του μιγαδικού επιπέδου. ΜΟΝΟΝ εκεί όμως. Το βλέπετε άλλωστε, το σήμα είναι σαν μια “φέτα” που φεύγει μόνο προς τα “πάνω” από το φανταστικό άξονα. Όμως, το μιγαδικό επίπεδο έχει προφανώς κι άλλες ευθείες πάνω στις οποίες μπορούμε να ορίσουμε μετασχηματισμούς. Μια

από αυτές φαίνεται στο σχήμα 1, κι αυτή είναι η $\Re\{s\} = \sigma = 3$. Πάνω σε αυτόν τον άξονα, θα είχαμε συχνότητες $s = \sigma + j\omega = 3 + j\omega$, και η προβολή του σήματος $x(t)$ θα γινόταν πάνω σε εκθετικά της μορφής $e^{-(3+j\omega)t}$. Σταματάμε εδώ προσωρινά, αν και πρέπει ήδη να έχετε υποψιαστεί τι πρόκειται να συμβεί. :-)

Επιστρέφουμε στο μετασχ. Fourier λοιπόν. Μια τέτοια αναπαράσταση είναι πολύτιμη στην ανάλυση και επεξεργασία σημάτων. ΟΜΩΣ (παντού υπάρχει ένα “όμως” που μας χαλάει τη διάθεση :-)) είδαμε ότι ο μετασχ. Fourier υπάρχει μόνο για μια περιορισμένη κατηγορία σημάτων, π.χ. ο μετασχ. Fourier δεν ορίζεται για σήματα της μορφής

$$x(t) = e^{at}u(t), \quad a > 0 \quad (3)$$

δηλ. για αύξοντα εκθετικά (δε μου αρέσει ούτε κι εμένα ο όρος – growing exponentials είναι στα Αγγλικά – αλλά ας μου το επιτρέψετε :-P). Επίσης, υπάρχουν περιοχές όπως η Ανάλυση Συστημάτων, που ο μετασχ. Fourier δε μας βοηθά πολύ.



Σχήμα 2: Δεν αντιλαμβάνονται τους μετασχηματισμούς όλοι με τον ίδιο τρόπο... :-)

1.1 Ο μετασχηματισμός Laplace

Ο βασικός λόγος για τις δυσκολίες που μας προκύπτουν είναι ότι για μερικά σήματα, όπως το σήμα στη σχέση (3), ο μετασχ. Fourier δεν υπάρχει, επειδή τα συνήθη ημίτονα ή εκθετικά της μορφής $e^{j\omega t}$ είναι ανίκανα να συνθέσουν αύξοντα εκθετικά σήματα, όπως το παραπάνω (κάπως λογικό, αν σκεφτείτε ότι έχουν πεπερασμένο πλάτος $X(\omega)$, όπως είδαμε στη σχέση (1)). Αν αφήσουμε τη φαντασία μας ελεύθερη (ΠΟΛΥ ελεύθερη :-)), θα δούμε ότι το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί. Πώς; Αν μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε ως σήματα βάσης εκθετικά της μορφής e^{st} , με το s να μην περιορίζεται μόνο πάνω στο φανταστικό άξονα (όπως γίνεται στον μετασχ. Fourier). Αυτό ακριβώς γίνεται στον περίφημο **μετασχηματισμό Laplace**. Εδώ, η συχνότητες είναι μιγαδικές, της μορφής $s = \sigma + j\omega$, και αυτή η γενίκευση μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε αύξοντα εκθετικά (και άρα αύξοντα ημίτονα) για να συνθέσουμε ένα σήμα $x(t)$. Ποιά είναι αυτά; Μα φυσικά τα $e^{\sigma t}e^{j\omega t}$! :-) Πριν πάμε στα μαθηματικά, ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε διαισθητικά και με ένα απλό παράδειγμα τι ακριβώς κερδίζουμε με το μετασχηματισμό αυτό.

1.2 Διαισθητική κατανόηση του μετασχ. Laplace

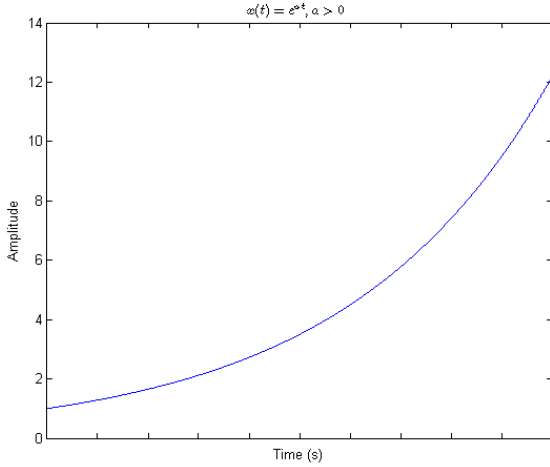
Αν ένα σήμα λοιπόν, όπως το $x(t) = e^{at}u(t)$, $a > 0$, στο σχήμα 3α', δεν έχει μετασχ. Fourier, μπορούμε να το κάνουμε να έχει, πολλαπλασιάζοντάς το με ένα φθίνον εκθετικό, όπως το $e^{-\sigma t}$. Για παράδειγμα, το σήμα

$$x(t) = e^{2t}u(t) \quad (4)$$

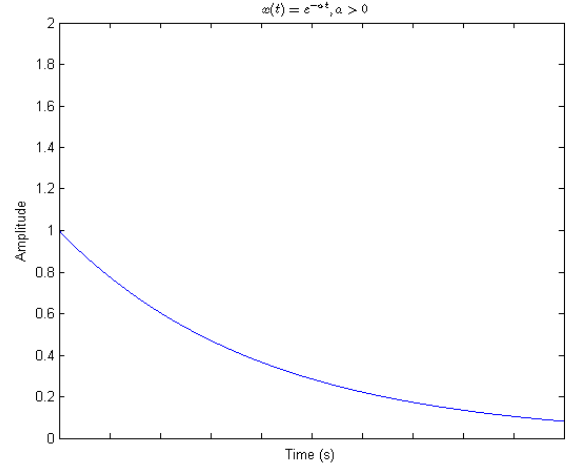
μπορεί να γίνει μετασχηματισμο (πολύ κουλτούρα :-)) κατά Fourier, απλά πολλαπλασιάζοντάς το με το $e^{-\sigma t}$, με $\sigma > 2$, ορίζοντας έτσι το

$$\hat{x}(t) = x(t)e^{-\sigma t} = e^{(2-\sigma)t}u(t) \quad (5)$$

Αυτό το νέο σήμα είναι σήμα ενέργειας πια, όπως φαίνεται στο σχήμα 3β' – πάντα για $\sigma > 2$. Άρα το σήμα



(α) Το αύξον εκθετικό $x(t)$



(β) Το φθίνον εκθετικό $\hat{x}(t)$

Σχήμα 3: Εκθετικά σήματα

$\hat{x}(t)$ έχει πλέον μετασχ. Fourier, $\hat{X}(\omega)$, και οι συνιστώσες του είναι της μορφής $e^{j\omega t}$, με συχνότητες f που τρέχουν από $-\infty$ ως ∞ . Τα εκθετικά της μορφής $e^{j\omega t}$ και $e^{-j\omega t}$ θα προστεθούν και θα μας δώσουν ένα ημίτονο, όπως καλά ξέρουμε από τις σχέσεις του Euler. Ας το δείξουμε ξανά εδώ, για να μην ψάχνετε σε άλλο κεφάλαιο :-) και για λόγους σύγκρισης με το μετασχ. Laplace.

Έστω μια συχνότητα $\Delta\omega$ του συνεχούς φάσματος του σήματος. Επειδή αναλύουμε πραγματικά σήματα, θα υπάρχει και η αντίστοιχη συχνότητα $-\Delta\omega$ και το πλάτος καθειμάς θα είναι $\hat{X}(\Delta\omega)$ και $\hat{X}^*(\Delta\omega)$ αντίστοιχα, λόγω των γνωστών ιδιοτήτων για τα πραγματικά σήματα. Άρα προσθέτοντάς τα, όπως επιτάσσει το ολοκλήρωμα, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \hat{X}(\Delta\omega)e^{j\Delta\omega t} + \hat{X}^*(\Delta\omega)e^{-j\Delta\omega t} &= |\hat{X}(\Delta\omega)|e^{j\phi_{\Delta\omega}}e^{j\Delta\omega t} + (|\hat{X}(\Delta\omega)|e^{j\phi_{\Delta\omega}})^*e^{-j\Delta\omega t} \\
 &= |\hat{X}(\Delta\omega)|e^{j\phi_{\Delta\omega}}e^{j\Delta\omega t} + |\hat{X}(\Delta\omega)|e^{-j\phi_{\Delta\omega}}e^{-j\Delta\omega t} \\
 &= |\hat{X}(\Delta\omega)|e^{j(\Delta\omega t + \phi_{\Delta\omega})} + |\hat{X}(\Delta\omega)|e^{-j(\Delta\omega t + \phi_{\Delta\omega})} \\
 &= 2|\hat{X}(\Delta\omega)|\cos(\Delta\omega t + \phi_{\Delta\omega}) \tag{6}
 \end{aligned}$$

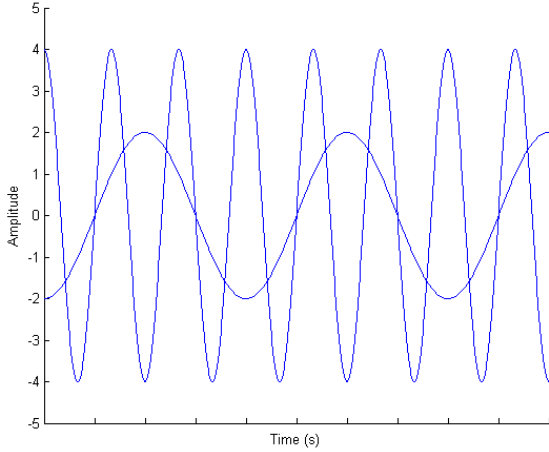
Το φάσμα περιέχει έναν άπειρο αριθμό από τέτοια ημίτονα, σταθερού πλάτους $2|\hat{X}(\Delta\omega)|$. Θα ήταν πολύ χρονοβόρο να σχεδιάσουμε όλα αυτά τα ημίτονα, έτσι στο σχήμα 4α' δείχνουμε μόνο δυο από αυτά. Η πρόσθεση όλων αυτών των συνιστωσών (άπειρων σε αριθμό) θα μας δώσει το $\hat{x}(t)$. Είναι όμως προφανές ότι το επιθυμητό σήμα $x(t)$ μπορεί να συντεθεί από τον πολλαπλασιασμό του $\hat{x}(t)$ με τα $e^{+\sigma t}$, έτσι δεν είναι; Αυτό τι σημαίνει; Σημαίνει ότι πολλαπλασιάζουμε κάθε φασματική συνιστώσα $\hat{X}(\omega)$ του $\hat{x}(t)$ με $e^{+\sigma t}$, και μετά τις προσθέτουμε. Ιδού:

$$x(t) = \hat{x}(t)e^{+\sigma t} = e^{+\sigma t} \int \hat{X}(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \int e^{+\sigma t}[\hat{X}(\omega)e^{j\omega t}]d\omega \tag{7}$$

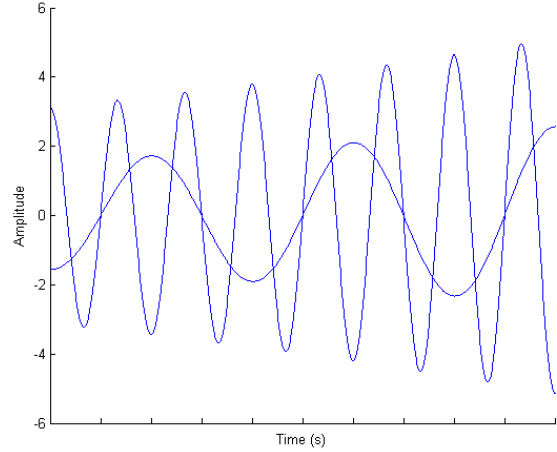
Αλλά μια τέτοια κίνηση σημαίνει επίσης ότι τα ημίτονα που προκύπτουν θα έχουν αύξοντα πλάτη! Η πρόσθεση όλων αυτών των αύξοντων ημιτόνων θα μας δώσει το $x(t)$! Γιατί; Ας κάνουμε το ίδιο με τη σχέση (6), μόνο που τώρα ας υποθέσουμε ότι έχουμε πλάτη $\hat{X}(\Delta\omega)e^{\sigma t}$:

$$e^{\sigma t}\hat{X}(\Delta\omega)e^{j\Delta\omega t} + e^{\sigma t}\hat{X}^*(\Delta\omega)e^{-j\Delta\omega t} = 2|\hat{X}(\Delta\omega)|e^{\sigma t}\cos(\Delta\omega t + \phi_{\Delta\omega}) \tag{8}$$

Είναι φανερό εδώ ότι τα πλάτη των ημιτόνων ΔΕΝ είναι σταθερά, όπως στην περίπτωση του μετασχ. Fourier, αλλά είναι συναρτησει του χρόνου, $2|\hat{X}(\Delta\omega)|e^{\sigma t}$, και μάλιστα είναι και αύξοντα, όπως στο σχήμα 4β'!



(α) Σταθερού πλάτους ημίτονα



(β') Μεταβλητού πλάτους ημίτονα

Σχήμα 4: Ημίτονα των δυο μετασχηματισμών

Επίσης, ο πολλαπλασιασμός των συνιστωσών του $\hat{x}(t)$ με το $e^{+\sigma t}$ θα μας δώσει συνιστώσες της μορφής $e^{(\sigma+j\omega)t}$, όπως είναι φανερό από τη σχέση (7), ενώνοντας τα δυο εκθετικά μέσα στο ολοκλήρωμα! Άρα, κάθε συχνότητα της μορφής $j\omega$ του $\hat{x}(t)$ μετασχηματίζεται σε μια άλλη συχνότητα $\sigma + j\omega$ στο φάσμα του $x(t)$. Άρα πού θα βρίσκονται αυτές οι νέες συχνότητες; Πού αλλού, εκτός από πάνω σε μια νέα ευθεία στο μιγαδικό s -επίπεδο, στην ευθεία που περιλαμβάνει τις συχνότητες $\sigma + j\omega$!

Πλέον είναι ξεκάθαρο ότι το σήμα $x(t)$ μπορεί να συντεθεί από αύξοντα εκθετικά που βρίσκονται στο μονοπάτι $\sigma + j\omega$, με το ω να κυμαίνεται από $-\infty$ έως ∞ . Η τιμή του σ είναι μεταβλητή. Για παράδειγμα, αν $x(t) = e^{2t}u(t)$, τότε το $\hat{x}(t) = x(t)e^{-\sigma t}$ μπορεί να γίνει μετασχηματίσιμο κατά Fourier αν διαλέξουμε $\sigma > 2$. Άρα καταλαβαίνετε ότι έχουμε άπειρες επιλογές για την τιμή του σ . Αυτό σημαίνει ότι το φάσμα του $x(t)$ δεν είναι μοναδικό, και ότι υπάρχουν άπειροι τρόποι να συνθέσουμε το $x(t)$. Όμως, το σ έχει μια ελάχιστη, συγκεκριμένη τιμή σ_0 για ένα δεδομένο $x(t)$ (όπως εδώ, $\sigma_0 = 2$, για $x(t) = e^{2t}u(t)$). Αυτή η περιογή του μιγαδικού s -επιπέδου που ορίζονται άπειροι τρόποι σύνθεσης του $x(t)$ από τα αύξοντα εκθετικά λέγεται **Πεδίο Σύγκλισης** του μετασχηματισμού του $x(t)$.

Αυτός ο νέος μετασχηματισμός λοιπόν, που χρησιμοποιεί εκθετικά της μορφής $e^{(\sigma+j\omega)t}$ λέγεται **Μετασχηματισμός Laplace** και ορίζεται ως:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (9)$$

ενώ ο αντίστροφός του ως:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (10)$$

ο οποίος όμως δε θα χρησιμοποιηθεί για τους σκοπούς μας, μια και υπάρχουν πιο εύκολοι τρόποι από την επίλυση ενός ολοκληρώματος στο μιγαδικό επίπεδο... :-)

1.3 Ύπαρξη του μετασχ. Laplace

Μια ικανή συνθήκη για την ύπαρξη του μετασχ. Laplace είναι η

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty \quad (11)$$

Όταν το παραπάνω ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάποια τιμή σ , τότε υπάρχει ο μετασχ. Laplace. Αποδεικνύεται ότι κάθε σήμα που αυξάνει όχι γρηγορότερα από το εκθετικό σήμα $Me^{\sigma_0 t}$, για κάποια M, σ_0 , ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη (11). Για παράδειγμα, το σήμα $x(t) = e^{t^2}$ αυξάνει πιο γρήγορα από το $e^{\sigma_0 t}$, και άρα δεν έχει μετασχ. Laplace. Ευτυχώς, τέτοια σήματα έχουν ελάχιστη θεωρητική ή πρακτική σημασία.

Βέβαια, όπως και στο μετασχ. Fourier, αυτή η συνθήκη δεν είναι και αναγκαία. Για παράδειγμα, το σήμα $x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ απειρίζεται στο $t = 0$ και η σχέση (11) δεν ικανοποιείται, αλλά ο μετασχηματισμός Laplace υπάρχει και είναι ο $X(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$. Εμείς δεν ασχολούμαστε με τέτοια σήματα, και πάντα όταν ζητείται ο μετασχ. Laplace, υποθέτουμε ότι υπάρχει, δηλ. ότι το ολοκλήρωμα του μετασχ. Laplace συγκλίνει.

1.4 Συνοψίζοντας...

Ο μετασχ. Laplace είναι γενικά μια “επέκταση” του μετασχ. Fourier, για σήματα των οποίων το συχνοτικό περιεχόμενο δεν μπορεί να υπολογιστεί απ’ την κλασική θεωρία Fourier. Ο μετασχ. Fourier προβάλλει το σήμα πάνω σε συχνότητες που ορίζονται στο φανταστικό άξονα ($e^{-j\omega t}$). Αλλάζοντας τις συναρτήσεις βάσης $e^{-j\omega t}$ σε $e^{-(\sigma+j\omega)t}$, προβάλλουμε το σήμα σε ευθείες παράλληλες με τον άξονα των φανταστικών. Οι νέες συχνότητες $\sigma + j\omega$ είναι, όπως είναι φανερό, μιγαδικές πλέον.

Ο μετασχ. Laplace ορίζεται ως:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (12)$$

με $s = \sigma + j\omega$, $\sigma, \omega \in \mathfrak{R}$. Όπως εύκολα διαπιστώνετε, αν θέσουμε $\sigma = 0$, ο μετασχ. Laplace μετατρέπεται στον μετασχ. Fourier:

$$X(s) \Big|_{\sigma=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(0+j\omega)t} dt = X(\omega) \quad (13)$$

Για αιτιατά σήματα, ορίζεται ο μονόπλευρος μετασχ. Laplace ως:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (14)$$

που δε διαφέρει σε πολλά από τον δίπλευρο μετασχ. Laplace που συζητούσαμε ως τώρα.

2 Είδη σημάτων

Αν και έχει προηγηθεί μια διαισθητική παρουσίαση των ειδών σημάτων στη θεωρία σχετικά με την ανάλυση Fourier, εδώ θα ορίσουμε τυπικά τα σήματα ανάλογα με τη θέση και τη διάρκειά τους στο χρόνο. Αυτή η διάκριση θα μας βοηθήσει πολύ στο να ορίζουμε εύκολα και γρήγορα την περίφημη *περιοχή σύγκλισης* - *region of convergence* του μετασχ. Laplace, στην οποία θα αναφερθούμε στην επόμενη παράγραφο. Πρώτα όμως, ας δούμε τα είδη σημάτων:

- *Αριστερόπλευρο* λέγεται το σήμα για το οποίο ισχύει (σχήμα 5α')

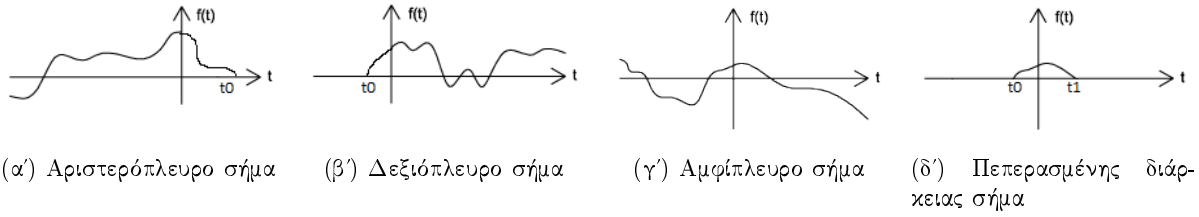
$$f(t) = 0, \quad t \geq t_0 \quad (15)$$

- *Δεξιόπλευρο* λέγεται το σήμα για το οποίο ισχύει (σχήμα 5β')

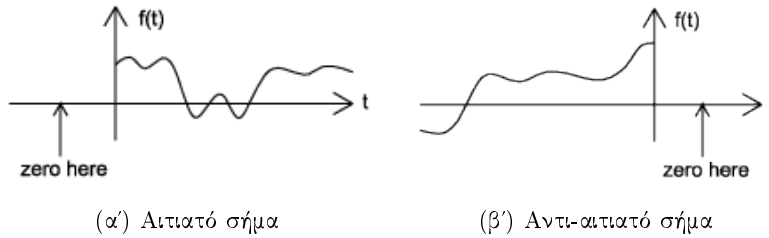
$$f(t) = 0, \quad t \leq t_0 \quad (16)$$

- *Αμφίπλευρο* (ή *δίπλευρο*) λέγεται το σήμα για το οποίο ισχύει (σχήμα 5γ')

$$f(t) \neq 0, \quad t \in \mathfrak{R} \quad (17)$$



Σχήμα 5: Είδη σημάτων



Σχήμα 6: Αιτιατό και αντι-αιτιατό σήμα

- Πεπερασμένης διάρκειας λέγεται το σήμα για το οποίο ισχύει (σχήμα 5δ')

$$f(t) \neq 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (18)$$

Η διάκριση των ειδών είναι σχετικά εύκολη υπόθεση, είτε από τον ορισμό τους είτε από τη γραφική τους παράσταση. Ας γνωρίσουμε όμως εδώ και δυο νέες κατηγορίες σημάτων:

- Αιτιατά λέγονται τα σήματα για τα οποία ισχύει

$$f(t) = 0, \quad t < 0 \quad (19)$$

όπως στο σχήμα 6α'.

- Αντί-αιτιατά λέγονται τα σήματα για τα οποία ισχύει η σχέση

$$f(t) = 0, \quad t > 0 \quad (20)$$

όπως αυτό στο σχήμα 6β'.

- Υπάρχουν και τα μη αιτιατά σήματα, για τα οποία η σχέση (19) δεν ισχύει, όπως τα σήματα σε όλα τα σχήματα 5.

3 Περιοχή Σύγκλισης

Η περιοχή σύγκλισης (region of convergence - ROC) προκαλεί συχνά σύγχυση τόσο όσον αφορά την προέλευσή της, όσο και τη χρήση της και τη σημασία της. Εδώ θα ξεκαθαρίσουμε όλα αυτά, χρησιμοποιώντας τρία χαρακτηριστικά παραδείγματα.

1. Ας πάρουμε ένα σήμα για το οποίο ο μετασχ. Fourier δεν υπάρχει. Για παράδειγμα, το σήμα

$$x(t) = e^{at}u(t), \quad a \in \mathfrak{R} \quad (21)$$



Σχήμα 7: Τα αντι-αιτιατά συστήματα μπορούν να γίνουν πραγματοποιήσιμα με χρονική καθυστέρηση!

Γί αυτό το σήμα, δεν υπάρχει ο μετασχ. Fourier, μόνο αν $a > 0$. Ας το δείξουμε, ελέγχοντας το κριτήριο σχετικά με την απόλυτη ολοκλήρωση. Ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = \int_0^{\infty} |e^{at}| dt = \int_0^{\infty} e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{at} \Big|_0^{\infty} \quad (22)$$

Αν $a \in \mathbb{R}^+$, το ολοκλήρωμα για $t = \infty$ θα αποκλίνει στο $+\infty$. Άρα ο μετασχ. Fourier δεν υπάρχει. Φυσικά γνωρίζουμε ότι το κριτήριο αυτό είναι ικανό αλλά όχι και αναγκαίο, γιατί π.χ. και για τα ημιτονοειδή σήματα το κριτήριο της απόλυτης ολοκλήρωσης δεν ισχύει αλλά γνωρίζουμε ότι υπάρχει ο μετασχ. Fourier, με χρήση των συναρτήσεων Δέλτα. Παρ' όλα αυτά, για το συγκεκριμένο σήμα, αυτό είναι αρκετό. Επίσης, αν κάποιος από εσάς μπήκε στον κόπο να σκεφτεί πώς είναι η γραφική παράσταση του σήματος αυτού, θα διαπίστωσε ότι πρόκειται για ένα μη φραγμένο σήμα ισχύος, άρα θα είχε μια υποψία για το ότι δεν υπάρχει ο μετασχ. Fourier, ούτε καν με χρήση συναρτήσεων Δέλτα. :-)

Απ' την άλλη, αν $a < 0$, τότε ο μετασχ. Fourier υπάρχει, μια και το σήμα μας είναι σήμα ενέργειας. Ας θεωρήσουμε στο παράδειγμά μας, ότι $a \in \mathbb{R}$, για περισσότερη γενικότητα. Ας δοκιμάσουμε να εφαρμόσουμε τον μετασχ. Laplace και να δούμε μερικά πράγματα:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a-s} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a-s)t} - 1 \right) \quad (23)$$

Εδώ τώρα πρέπει να σταματήσουμε. Πρέπει να έχετε καταλάβει τι πρόκειται να συμβεί από παρόμοια διαδικασία που είδαμε στο μετασχ. Fourier... Για να μην αποκλίνει αυτό το όριο στο ∞ , θα πρέπει το όρισμα του εκθετικού να είναι αρνητικό, ώστε το όριο να τείνει στο μηδέν. Για να ισχύει αυτό, θα πρέπει να ισχύει $a - s < 0$. Ένα λεπτό όμως. Το $s = \sigma + j\omega$ είναι μιγαδικός αριθμός, άρα και ο $a - s$. Ως γνωστόν, οι μιγαδικοί αριθμοί ΔΕΝ έχουν διάταξη, άρα το να πούμε ότι πρέπει να ισχύει $a - s < 0$ είναι ΧΩΡΙΣ ΝΟΗΜΑ!

Θα εκμεταλλευτούμε λοιπόν το πλέον γνωστό λήμμα της Μιγαδικής Ανάλυσης, που υπενθυμίζεται ότι λέει ότι

$$\text{εάν } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0 \text{ και } g(t) \text{ είναι φραγμένη κατ' απόλυτη τιμή, τότε} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)g(t) = 0.$$

Για να δούμε αν μπορούμε κατ' αρχάς να το δείξουμε αυτό για το σήμα μας. Μπορούμε να γράψουμε το σήμα μας ως γινόμενο μιας φραγμένης και μιας συνάρτησης που συγχλίνει στο μηδέν; Είναι:

$$e^{(a-s)t} = e^{(a-(\sigma+j\omega))t} = e^{((a-\sigma)-j\omega)t} = e^{(a-\sigma)t} e^{-j\omega t} = f(t)g(t) \quad (24)$$

Όμως

$$|e^{-j\omega t}| = 1, \quad (25)$$

για κάθε f, t , όπως έχουμε δει. Οπότε να η φραγμένη μας συνάρτηση, η $g(t) = e^{-j\omega t}$. Άρα αρκεί να δούμε πότε ισχύει ότι

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a-\sigma)t} = 0 \quad (26)$$

και μετά μπορούμε να συνεχίσουμε τη λύση της άσκησης μας. Εδώ πλέον, στον εκθέτη μας έχουμε πραγματικούς αριθμούς, άρα ξέρουμε ότι η συνάρτηση $e^{(a-\sigma)t}$ φθίνει στο 0 όταν $t \rightarrow +\infty$, **μόνο αν**

$$a - \sigma < 0 \Leftrightarrow a < \sigma \Leftrightarrow \Re\{s\} > a \quad (27)$$

Αυτή η σχέση λέγεται **πεδίο σύγκλισης**, γιατί αποτελεί το χώρο πάνω στο επίπεδο για τον οποίο υπάρχει ο μετασχ. Laplace, δηλ. το σχετικό ολοκλήρωμα συγκλίνει! Οπότε δείξαμε ότι η συνάρτηση $e^{(a-s)t}$ γράφεται ως γινόμενο δυο συναρτήσεων, εκ των οποίων η μια είναι φραγμένη και η άλλη συγκλίνει το μηδέν, και άρα, απ' το γνωστό λήμμα, το γινόμενό τους συγκλίνει κι αυτό στο μηδέν. Ας ολοκληρώσουμε τη λύση μας.

$$(23) \Rightarrow X(s) = \frac{1}{a-s} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a-s)t} - 1 \right) = \frac{1}{a-s} (0 - 1) = \frac{1}{s-a}, \quad \Re\{s\} > a \quad (28)$$

Άρα ο μετασχ. Laplace του σήματος $x(t) = e^{at}u(t)$, $a \in \mathbb{R}$, είναι

$$x(t) = e^{at}u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \Re\{s\} > a \quad (29)$$

Ο αριθμός a λέγεται **πόλος** του μετασχ. Laplace, και το πεδίο σύγκλισης είναι το ημιεπίπεδο ΔΕΞΙΑ της κατακόρυφης ευθείας $\sigma = a$, όπως βρήκαμε παραπάνω, χωρίς να την περιλαμβάνει. Φυσικά, στο ημιεπίπεδο $\Re\{s\} \leq a$, ο μετασχ. Laplace ΔΕΝ συγκλίνει!

2. Ας δούμε άλλο ένα παράδειγμα. Έστω τώρα το σήμα $x(t) = -e^{at}u(-t)$, του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε το μετασχ. Laplace. Αν $a \in \mathbb{R}^+$, τότε το σήμα είναι σήμα ενέργειας, και ο μετασχ. Fourier του υπάρχει. Αν όμως $a \in \mathbb{R}^-$, τότε δεν υπάρχει ο μετασχ. Fourier, μια και τότε το σήμα είναι σήμα ισχύος, και το ολοκλήρωμα του μετασχ. Fourier αποκλίνει στο ∞ . Ας θεωρήσουμε ότι $a \in \mathbb{R}$, χωρίς περιορισμούς. Ο μετασχ. Laplace θα είναι:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = - \int_{-\infty}^0 e^{(a-s)t} dt = - \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_{-\infty}^0 = - \frac{1}{a-s} \left(1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(a-s)t} \right) \quad (30)$$

Εχουμε ξανά την ίδια κατάσταση με το προηγούμενο παράδειγμα. Θέλουμε να υπολογίσουμε το

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(a-s)t} \quad (31)$$

Σκεπτόμενοι ακριβώς όμοια, καταλήγουμε ότι το όριο αυτό φθίνει στο 0 **μόνο αν**

$$a - \sigma > 0 \Leftrightarrow a > \Re\{s\} \Leftrightarrow \Re\{s\} < a \quad (32)$$

και αυτό είναι το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace. Στο πεδίο αυτό, το όριο φθίνει στο μηδέν, και άρα από τη σχέση (30) έχουμε:

$$(30) \Rightarrow X(s) = - \frac{1}{a-s} (1 - 0) = \frac{1}{s-a}, \quad \Re\{s\} < a \quad (33)$$

Άρα τελικά, έχουμε ότι

$$x(t) = -e^{at}u(-t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \Re\{s\} < a \quad (34)$$

3. Είμαι σίγουρος ότι ο πειρασμός σας να προσθέσετε τα σήματα των παραπάνω παραδειγμάτων και να δείτε αν υπάρχει ο μετασχ. Laplace του άθροισμά τους, είναι μεγάλος (όσο και η επιθυμία σας να περάσετε το μάθημα :-). Ας ορίσουμε λοιπόν το σήμα

$$x(t) = e^{at}u(t) - e^{at}u(-t), \quad a \in \mathfrak{R} \quad (35)$$

Δεν το αναφέραμε παραπάνω, αλλά δεν είναι και μυστικό, αφού αποδεικνύεται εύκολα. Ο μετασχ. Laplace είναι γραμμικός. Άρα το άθροισμα δυο σημάτων έχει μετασχ. Laplace το άθροισμα των επιμέρους μετασχηματισμών. Όσο για το πεδίο σύγκλισης, αυτό είναι η **τομή** των επιμέρους πεδίων σύγκλισης. Άρα λοιπόν,

$$X(s) = \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-a} = \frac{2}{s-a}, \quad ROC = ROC_1 \cap ROC_2 = \{\sigma > a\} \cap \{\sigma < a\} = \emptyset \quad (36)$$

Άρα βλέπουμε ότι παρ' όλο που μπορούμε να προσθέσουμε τους επιμέρους μετασχηματισμούς, ο συνολικός μετασχηματισμός Laplace ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ, γιατί δεν υπάρχει πεδίο στο s -επίπεδο στο οποίο να συγκλίνει! :-)

Άρα βλέπουμε ότι δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει ο μετασχ. Laplace για όλα τα σήματα. :-)
Ας δούμε όμως τι θα συνέβαινε αν είχαμε

$$x(t) = e^{at}u(t) - e^{\beta t}u(-t), \quad a, \beta \in \mathfrak{R}, \quad a \neq \beta \quad (37)$$

Τότε

$$X(s) = \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-\beta} = \frac{(s-\beta) + (s-a)}{(s-a)(s-\beta)}, \quad ROC = ROC_1 \cap ROC_2 = \{\sigma > a\} \cap \{\sigma < \beta\} \quad (38)$$

το οποίο δεν είναι απαραίτητα το κενό σύνολο. Εξαρτάται από τις σχετικές θέσεις των a, β . Π.χ. αν $a < \beta$, τότε το πεδίο σύγκλισης είναι μια "λωρίδα" στο s -επίπεδο, το $a < \Re\{s\} < \beta$, ενώ αν $a > \beta$, τότε το πεδίο σύγκλισης είναι το κενό σύνολο.

Ας ξεκινήσουμε τις παρατηρήσεις μας...

1. Η πιο σημαντική παρατήρηση έρχεται αν συγκρίνουμε τις σχέσεις (29) και (34). Ας τις ξαναγράψουμε εδώ:

$$x(t) = e^{at}u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \Re\{s\} > a \quad (39)$$

$$x(t) = -e^{at}u(-t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \Re\{s\} < a \quad (40)$$

Παρατηρούμε ότι δυο εντελώς διαφορετικά σήματα στο χρόνο, έχουν την ΙΔΙΑ μαθηματική αναπαράσταση στο χώρο του μετασχ. Laplace! Σωστά; Λάθος! :-). Ο μετασχηματισμός Laplace περιλαμβάνει ΚΑΙ το πεδίο σύγκλισης! Αυτό είναι που ξεχωρίζει τους δυο, ίδιους κατά τα άλλα, μετασχηματισμούς. Χωρίς το πεδίο σύγκλισης, δε θα μπορούσαμε να αποφασίσουμε σε ποιό σήμα στο χρόνο αντιστοιχεί ο μετασχηματισμός Laplace $X(s)$ που έχουμε παραπάνω!

2. Είδατε παραπάνω ότι το πεδίο σύγκλισης δεν είναι κάτι τυχαίο. Προκύπτει απ' την ανάγκη να συγκλίνει το ολοκλήρωμα του μετασχ. Laplace! Κάθε μετασχ. Laplace έρχεται "παρέα" με το πεδίο σύγκλισης. Χωρίς αυτό, ο μετασχ. Laplace είναι χωρίς νόημα! Συνηθίστε λοιπόν να γράφετε το μετασχηματισμό ΜΑΖΙ με το εκάστοτε πεδίο σύγκλισης. :-)
3. Προφανώς δε χρειάζεται σε κάθε άσκηση να αποδεικνύετε το πεδίο σύγκλισης, εκτός αν σας ζητείται ρητά, π.χ. σε εφαρμογή του ορισμού. Ακόμα και τότε, δε χρειάζεται να δείχνετε αναλυτικά ότι οι συναρτήσεις είναι φραγμένες, κλπ. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε έτοιμα τα αποτελέσματα της θεωρίας.

4. Ο πόλος a που είδαμε στα παραδείγματα 1 και 2 θα μπορούσε να είναι μιγαδικός αριθμός. Γενικά, οι πόλοι δεν είναι απαραίτητο να είναι πάντα πραγματικοί. Δεν αλλάζει τίποτα σε όσα είπαμε παραπάνω, παρά μόνον ότι πλέον τα πεδία σύγκλισης θα είναι στη μορφή

$$\Re\{s\} \geq \Re\{a\} \quad (41)$$

δηλ. χρησιμοποιούμε το πραγματικό μέρος του, κατάλληλου κάθε φορά, μιγαδικού πόλου στην περιγραφή του πεδίου σύγκλισης.

5. Από τη στιγμή που οι συναρτήσεις $(\sigma + j\omega)t$ ορίζουν ευθείες στο επίπεδο των μιγαδικών αριθμών (το λεγόμενο s -επίπεδο), τα πεδία σύγκλισης θα είναι μια περιοχή του επιπέδου αριστερά ή δεξιά μιας κατακόρυφης γραμμής, ή μια “λωρίδα” μεταξύ δυο κατακόρυφων γραμμών.
6. Τα πεδία σύγκλισης δεν περιέχουν ΠΟΤΕ πόλους!
7. Ένας μετασχ. Laplace μπορεί να έχει κανέναν, έναν, ή περισσότερους πόλους.
8. Αν το $x(t)$ είναι δεξιόπλευρο, το πεδίο σύγκλισης είναι δεξιόπλευρο, για παράδειγμα, $\Re\{s\} > \Re\{a\}$ με $a =$ δεξιότερος πόλος.
9. Αν το $x(t)$ είναι αριστερόπλευρο, το πεδίο σύγκλισης είναι αριστερόπλευρο, για παράδειγμα, $\Re\{s\} < \Re\{a\}$ με $a =$ αριστερότερος πόλος.
10. Αν $x(t)$ είναι αμφίπλευρο ή άθροισμα δεξιόπλευρων και αριστερόπλευρων σημάτων, το πεδίο σύγκλισης είναι μια “λωρίδα” στο ημιεπίπεδο (π.χ. $\Re\{a\} < \Re\{s\} < \Re\{b\}$), ή το κενό σύνολο (γιατί τα επιμέρους πεδία σύγκλισης δε θα επικαλύπτονται). Στην περίπτωση που το πεδίο σύγκλισης είναι το κενό σύνολο, προφανώς ο μετασχ. Laplace δεν ορίζεται.
11. Αν $x(t)$ είναι πεπερασμένης διάρκειας, το πεδίο σύγκλισης είναι ΟΛΟ το s -επίπεδο.
12. Συχνά, το πεδίο σύγκλισης συμβολίζεται ως ROC, από τα αρχικά της αγγλικής μετάφρασης του πεδίου σύγκλισης (region of convergence).

4 Σύνδεση με το μετασχηματισμό Fourier

Είπαμε στην εισαγωγή ωρύτερα ότι αν θέσουμε $\sigma = 0$, τότε ο μετασχ. Laplace μας δίνει το μετασχ. Fourier. Αυτό δεν ισχύει εν γένει! Όταν θέτουμε $\sigma = 0$, αυτό που κάνουμε “σιωπηλά” είναι ότι εκτιμούμε το μετασχ. Laplace σε συχνότητες που βρίσκονται πάνω στην κατακόρυφη ευθεία $\sigma = 0$, που δεν είναι άλλη απ’ τον άξονα των φανταστικών αριθμών! Για να μπορούμε όμως να το κάνουμε αυτό, ΠΡΕΠΕΙ ο κατακόρυφος άξονας των φανταστικών να περιέχεται μέσα στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace! Αλλιώς δεν έχει κανένα νόημα ο υπολογισμός του $X(s)|_{\sigma=0}$! Γι’ αυτό λοιπόν, όταν προσπαθούμε να υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier μέσω του μετασχ. Laplace, πρέπει να προσέχουμε πρώτα αν ο φανταστικός άξονας περιέχεται μέσα στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace. Αν περιέχεται, καλώς, αντικαθιστούμε $\sigma = 0$ στον τύπο του μετασχ. Laplace και έχουμε το μετασχ. Fourier. Αν όχι, τότε ο μετασχ. Fourier ΔΕΝ μπορεί να υπολογιστεί μέσω του μετασχ. Laplace! Ας μιλήσουμε όμως με λίγο μεγαλύτερη ακρίβεια σχετικά με αυτά...

Ο ορισμός του μετασχ. Laplace

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (42)$$

είναι ταυτόσημος με τον ορισμό του μετασχ. Fourier

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (43)$$

αν στη σχέση (43) θέσουμε όπου $j\omega$ το $s = \sigma + j\omega$. Είναι ευλογοφανές να περιμένει κανείς ότι ο μετασχ. Laplace, $X(s)$, ενός σήματος $x(t)$, να είναι ίδιος με τον μετασχ. Fourier, $X(\omega)$, του ίδιου σήματος, με το $j\omega$ να έχει αντικατασταθεί από το s . Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι

$$e^{-at}u(t), a > 0 \xrightarrow{F} \frac{1}{a + j\omega} \quad (44)$$

Αντικαθιστώντας το $j\omega$ με το s , έχουμε ότι

$$X(f) \Big|_{j\omega \leftarrow s = \sigma + j\omega} = \frac{1}{a + s} = X(s) \quad (45)$$

που είναι ο μετασχ. Laplace, όπως είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα. Δυστυχώς αυτή η διαδικασία δεν ισχύει για κάθε σήμα $x(t)$. Μπορούμε να την χρησιμοποιούμε μόνο όταν η περιοχή σύγκλισης του μετασχ. Laplace περιέχει το φανταστικό ($j\omega$) άξονα.

Για παράδειγμα, ο μετασχ. Fourier της βηματικής συνάρτησης $x(t) = u(t)$ είναι ο

$$x(t) = u(t) \xrightarrow{F} X(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (46)$$

Ο αντίστοιχος μετασχ. Laplace είναι ο

$$x(t) = u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s}, \Re\{s\} > 0 \quad (47)$$

και όπως βλέπουμε από την περιοχή σύγκλισης, δεν περιλαμβάνεται ο φανταστικός άξονας $\sigma = \Re\{s\} = 0$. Άρα, ο μετασχ. Laplace ΔΕΝ μπορεί να μας δώσει το μετασχ. Fourier, αλλά ούτε και το αντίστροφο! Σε αυτές τις περιπτώσεις, η σχέση μεταξύ των δυο μετασχηματισμών δεν είναι τόσο απλή. Ο λόγος για αυτήν την περιπλοκή σχετίζεται με τη σύγκλιση του ολοκληρώματος του μετασχ. Fourier, όπου η ολοκλήρωση περιορίζεται πάνω στον φανταστικό άξονα. Λόγω αυτού του περιορισμού, το ολοκλήρωμα Fourier για τη βηματική συνάρτηση δε συγκλίνει. Χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε μια γενικευμένη συνάρτηση ($\delta(\omega)$) για τη σύγκλιση. Αντιθέτως, το ολοκλήρωμα Laplace για τη βηματική συνάρτηση συγκλίνει αλλά μόνο για $\Re\{s\} > 0$, μια περιοχή που είναι “απαγορευμένη” για το μετασχ. Fourier! :-)

Ένα ακόμα ενδιαφέρον στοιχείο είναι ότι παρ’ όλο που ο μετασχ. Laplace είναι μια γενίκευση του μετασχ. Fourier, υπάρχουν σήματα (π.χ. περιοδικά σήματα), για τα οποία ο μετασχ. Laplace ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ, ενώ ο μετασχ. Fourier ΥΠΑΡΧΕΙ! :-) (αλλά δεν προκύπτει από απλή σύγκλιση του ολοκληρώματος).

5 Ιδιότητες και ζεύγη του μετασχ. Laplace

Οι ιδιότητες του μετασχ. Laplace είναι παρόμοιες με αυτές των σειρών και του μετασχ. Fourier. Οι κυριότερες βρίσκονται στον πίνακα 1, όπου ξεχωριστά εμφανίζονται μόνο οι ιδιότητες του μονόπλευρου μετασχ. Laplace που είναι διαφορετικές από αυτές του δίπλευρου.

Ο πίνακας 2 παραθέτει μερικά γνωστά ζεύγη μετασχηματισμών που μπορείτε να χρησιμοποιείτε χωρίς απόδειξη.

6 Μετασχ. Laplace και Συστήματα

Ο μετασχ. Laplace είναι ένα πολύτιμο εργαλείο ΚΑΙ για την ανάλυση συστημάτων. Πολυεργαλείο δηλαδή. :-) Η ικανότητά του να ερμηνεύει συχνοτικά πλήθος σημάτων, σημαντικά περισσότερων από του μετασχ. Fourier, τον κάνει ιδανικό για τη μελέτη συστημάτων.

Έχουμε δει κάποια πράγματα για τα συστήματα σε προηγούμενο κεφάλαιο, και κάποια άλλα σχετικά με αιτιατότητα αλλά και με τα είδη σημάτων σε προηγούμενη παράγραφο. Τα τελευταία ισχύουν και για τα

Ιδιότητες δίπλευρου μετασχηματισμού Laplace			
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχημ. Laplace	ROC
	$x(t)$	$X(s)$	R_x
	$y(t)$	$Y(s)$	R_y
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(s) + BY(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X(s)e^{-st_0}$	R_x
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$	Μετατόπιση του R_x
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R_x
Στάθμιση	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{s}{a}\right)$	Σταθμισμένο R_x
Συνέλιξη	$x(t) * y(t)$	$X(s)Y(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Παραγωγή στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	$R \supseteq R_x$
Παραγωγή στη συχνότητα	$-tx(t)$	$\frac{dX(s)}{ds}$	R_x
n -οστή παραγωγή στη συχνότητα	$t^n x(t)$	$(-1)^n \frac{d^n X(s)}{ds^n}$	R_x
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X(s)}{s} + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^0 x(t) dt$	$R \supseteq (R_x \cap \{\Re\{s\} > 0\})$
Ολοκλήρωση στη συχνότητα	$\frac{x(t)}{t}$	$\int_s^{\infty} X(z) dz$	
Ιδιότητες μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace			
Παραγωγή στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s) - x(0^-)$	$R \supseteq R_x$
n -οστή παραγωγή στο χρόνο	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s) - s^{n-1} x(0^-) - \dots - x^{(n-1)}(0)$	R_x
Ολοκλήρωση	$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X(s)}{s}$	R_x

Πίνακας 1: Πίνακας Ιδιοτήτων του μετασχ. Laplace

συστήματα, αφού κι αυτά είναι σήματα και περιγράφονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Υπάρχουν δεξιάπλευρα, αριστερόπλευρα, αμφίπλευρα, αιτιατά και μη, συστήματα, που ορίζονται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που περιγράφηκε στην παράγραφο 2.

Ας τονίσουμε εδώ ότι ένα σύστημα $h(t)$ έχει μετασχ. Laplace $H(s)$ ο οποίος είναι της μορφής $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$, με $Y(s), X(s)$ οι μετασχ. Laplace της εξόδου και της εισόδου, αντίστοιχα. Αυτό προκύπτει εύκολα από την εφαρμογή της περίφημης σχέσης συνέλιξης και πολλαπλασιασμού στους δυο χώρους (χρόνος και συχνότητα). Στην ορολογία των συστημάτων, ο μετασχ. Laplace του συστήματος, $H(s)$, λέγεται **συνάρτηση μεταφοράς**. Έχετε δει πώς αναλύεται ένα σύστημα με βάση το μετασχ. Fourier και την Ανάπτυξη σε Μερικά Κλάσματα. Ακριβώς όμοια έχουμε και στην περίπτωση του μετασχ. Laplace. Για αιτιατά συστήματα ($h(t) = 0, t < 0$), έχουμε

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \longleftrightarrow h(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t) \quad (48)$$

με s_k οι πόλοι του μετασχ. Laplace. Ένα νέο στοιχείο που θα εισάγουμε τώρα είναι η έννοια της *ευστάθειας*, με όρους μετασχ. Laplace. Ένα σύστημα λέγεται ευσταθές όταν παράγει φραγμένη έξοδο για μια δεδομένη φραγμένη είσοδο. Δηλ.

$$\text{Αν } |x(t)| < B_x \Rightarrow |y(t)| < B_y \quad (49)$$

Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμού Laplace		
Σήμα	Μετασχηματισμός Laplace	ROC
$\delta(t)$	$\frac{1}{s}$	Όλο το s -επίπεδο
$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2 + (\omega_0)^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + (\omega_0)^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$Arect\left(\frac{t}{T}\right)$	$\frac{A}{s}(e^{sT/2} - e^{-sT/2})$	όλο το s -επίπεδο
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} < 0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re\{s\} > -\Re\{a\}$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re\{s\} < -\Re\{a\}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\Re\{s\} > -\Re\{a\}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\Re\{s\} < -\Re\{a\}$
$e^{-at} \cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + (\omega_0)^2}$	$\Re\{s\} > -\Re\{a\}$
$e^{-at} \sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + (\omega_0)^2}$	$\Re\{s\} > -\Re\{a\}$

Πίνακας 2: Πίνακας ζευγών μετασχ. Laplace

όπου B_x, B_y πραγματικοί αριθμοί. Αυτό το γνωρίζετε ήδη από τη θεωρία και από προηγούμενες παραγράφους. Ας δούμε τη σχέση αυτή με το μετασχ. Laplace:

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)||h(t-\tau)|d\tau < B_x \int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)|d\tau \quad (50)$$

Αυτό σημαίνει ότι για να είναι φραγμένη η έξοδος $y(t)$, θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)|d\tau \quad (51)$$

που σημαίνει ότι το $h(t)$ πρέπει να είναι απολύτως ολοκληρώσιμο. Δεδομένου ότι το $h(t)$, για ένα αιτιατό σύστημα (χωρίς βλάβη της γενικότητας), εκφράζεται, όπως είδαμε, ως αντίστροφος μετασχ. Laplace ως

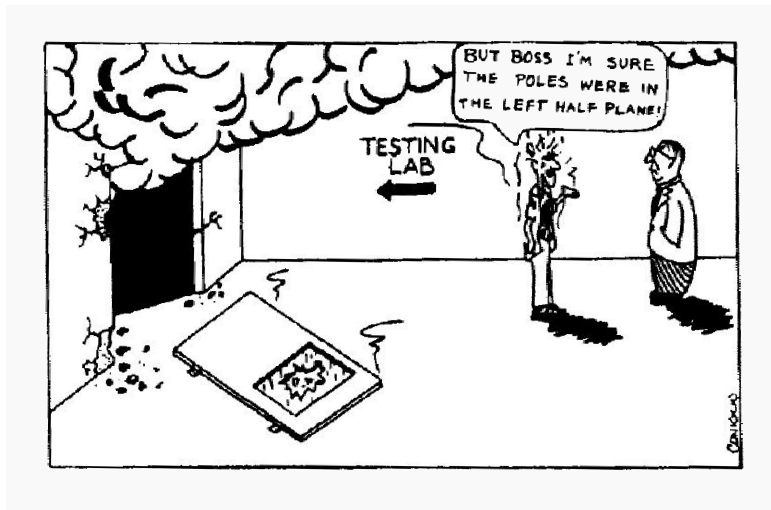
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s-s_k} \longleftrightarrow h(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t) \quad (52)$$

όπου s_k οι πόλοι του μετασχηματισμού Laplace, θα είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N |A_k| |e^{s_k t} u(t)| dt = \sum_{k=1}^N |A_k| \int_0^{\infty} |e^{\sigma_k t}| |e^{j\omega t}| dt = \sum_{k=1}^N |A_k| \int_0^{\infty} |e^{\sigma_k t}| dt \quad (53)$$

Καταλήξαμε πλέον ότι για να είναι φραγμένη η έξοδος, και άρα το σύστημα ευσταθές, θα πρέπει να ισχύει ότι η $e^{\sigma_k t}$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη. Αυτό προφανώς συμβαίνει ΜΟΝΟΝ όταν $\Re\{s_k\} = \sigma_k < 0$! Πότε ισχύει όμως αυτό; Φυσικά όταν όλοι οι πόλοι του $H(s)$ βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο! Άρα

ένα αιτιατό σύστημα είναι ευσταθές όταν έχει όλους τους πόλους του στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο.



Σχήμα 8: Προσοχή στην ευστάθεια των συστημάτων!!

7 Θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής

Σε κάποιες εφαρμογές είναι επιθυμητό να γνωρίζουμε τις τιμές ενός σήματος $x(t)$ όταν αυτό τείνει στο 0 και στο ∞ , μέσω του μετασχ. Laplace του. Τα θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής μας βοηθούν σε αυτό.

Το *θεώρημα της αρχικής τιμής* - *Θ.Α.Τ.* δηλώνει ότι αν το $x(t)$ και η παράγωγός του, $dx(t)/dt$, έχουν μετασχ. Laplace, τότε

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \quad (54)$$

δεδομένου ότι το παραπάνω όριο υπάρχει.

Το *θεώρημα της τελικής τιμής* - *Θ.Τ.Τ.* δηλώνει ότι αν το $x(t)$ και η παράγωγός του, $dx(t)/dt$, έχουν μετασχ. Laplace, τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad (55)$$

δεδομένου ότι το $sX(s)$ δεν έχει πόλους στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο ή πάνω στον φανταστικό άξονα.

Το *Θ.Α.Τ.* πρέπει να εφαρμόζεται μόνον αν το $X(s)$ έχει αυστηρά μεγαλύτερη τάξη παρονομαστή απ' ότι αριθμητή, αλλιώς το όριο δεν υπάρχει, και το *θεώρημα* δεν εφαρμόζεται.

Αντίστοιχα, το *Θ.Τ.Τ.* εφαρμόζεται μόνον αν οι πόλοι του $sX(s)$ είναι όλοι στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Αν υπάρχει πόλος στο φανταστικό άξονα, το $\lim_{t \rightarrow 0} sX(s)$ δεν υπάρχει, ενώ αν υπάρχει πόλος στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο, το $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ δεν υπάρχει.