Περισσότερες ασκήσεις σε Μετασχηματισμό Fourier... :-)

Επιμέλεια: Γιώργος Π. Καφεντζής
Υποψ. Διδακτωρ Τμήμ. Η/Υ
Πανεπιστήμιο Κρήτης

20 Μαΐου 2013

1. **Δείξτε οτι ο μετασχ. Fourier της εξόδου $\mathbf{y(t)}$ ενός ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $\mathbf{h(t)}$ και είσοδο $\mathbf{x(t)}$ δινεται από τη σχέση**

$$\mathbf{Y}(\omega) = |\mathbf{X}(\omega)||\mathbf{H}(\omega)|\mathbf{e}^{\mathbf{j}(\phi_{\mathbf{x}}(\omega)+\phi_{\mathbf{h}}(\omega))} \tag{1}$$

όπου $\mathbf{X}(\omega), \mathbf{H}(\omega)$ ο μετασχηματισμός Fourier της εισόδου και του συστήματος και $\phi_{\mathbf{x}}(\omega), \phi_{\mathbf{h}}(\omega)$ η φάση της εισόδου και του συστήματος, αντίστοιχα.

Λύση:
Η είσοδος $x(t)$ περιγράφεται στο χώρο της συχνότητας ως

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\phi_x(\omega)} \tag{2}$$

Το σύστημα $h(t)$ περιγράφεται στο χώρο της συχνότητας ως

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\phi_h(\omega)} \tag{3}$$

Η έξοδος του συστήματος $y(t)$ ισούται με τη συνέλιξη της εισόδου, $x(t)$, με το σύστημα, $h(t)$. Στο χωρο της συχνότητας, η συνέλιξη γίνεται γινόμενο, και άρα

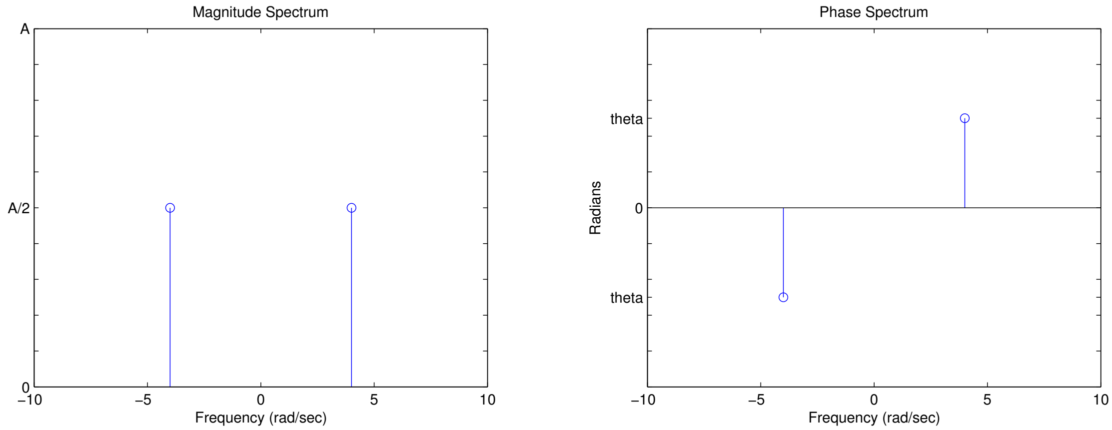
$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = |X(\omega)|e^{j\phi_x(\omega)}|H(\omega)|e^{j\phi_h(\omega)} = |H(\omega)||X(\omega)|e^{j(\phi_x(\omega)+\phi_h(\omega))} \tag{4}$$

που είναι και το ζητούμενο. Παρατηρείστε ότι ένα σύστημα επιδρά **πολλαπλασιαστικά** στο φάσμα πλάτους της εισόδου, αλλά **αθροιστικά** στο φάσμα φάσης της εισόδου!!

2. **Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης του σήματος $\mathbf{h(t) = e^{-4t}u(t)}$ και θεωρηστε το ως σύστημα, στην είσοδο του οποίου εμφανίζεται το σήμα $\mathbf{x(t) = A}\cos(\mathbf{4t}+\theta)$. Βρείτε και σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης της εισόδου, του συστήματος, και της εξόδου. Τι παρατηρείτε; Τέλος, υπολογίστε την ενέργεια της εισόδου $\mathbf{x(t)}$, του συστήματος $\mathbf{h(t)}$, και της εξόδου $\mathbf{y(t)}$. Με ποιό συντελεστή πρέπει να πολλαπλασιάσετε το σήμα εξόδου για να έχει την ίδια ενέργεια με το σήμα εισόδου;**

Λύση:
Η είσοδος γράφεται

$$x(t) = A\cos(4t+\theta) = \frac{A}{2}e^{j4t}e^{j\theta} + \frac{A}{2}e^{-j4t}e^{-j\theta} \tag{5}$$



(α′) Φάσμα Πλάτους Εισόδου $x(t)$ Άσκησης 2

(β′) Φάσμα Φάσης Εισόδου $x(t)$ Άσκησης 2

Σχήμα 1: Φάσματα Σήματος Εισόδου Ασκησης 2

Το φάσμα πλάτους και φάσης της εισόδου $x(t)$ φαίνεται στο σχήμα 1α′ και 1β′ αντίστοιχα. Θα είναι, ως γνωστόν

$$h(t) = e^{-4t}u(t) \longleftrightarrow H(\omega) = \frac{1}{4 + j\omega} \tag{6}$$

Άρα το πλάτος θα είναι

$$|H(\omega)| = \frac{1}{|4 + j\omega|} = \frac{1}{\sqrt{16 + \omega^2}} \tag{7}$$

ενώ για τη φάση θα έχουμε

$$H(\omega) = \frac{1}{4 + j\omega} = \frac{4 - j\omega}{|4 + j\omega|^2} = \frac{4}{16 + \omega^2} - j\frac{\omega}{16 + \omega^2} \tag{8}$$

Άρα το σύστημα γράφεται ως

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\tan^{-1}\frac{\Im\{H(\omega)\}}{\Re\{H(\omega)\}}} \tag{9}$$

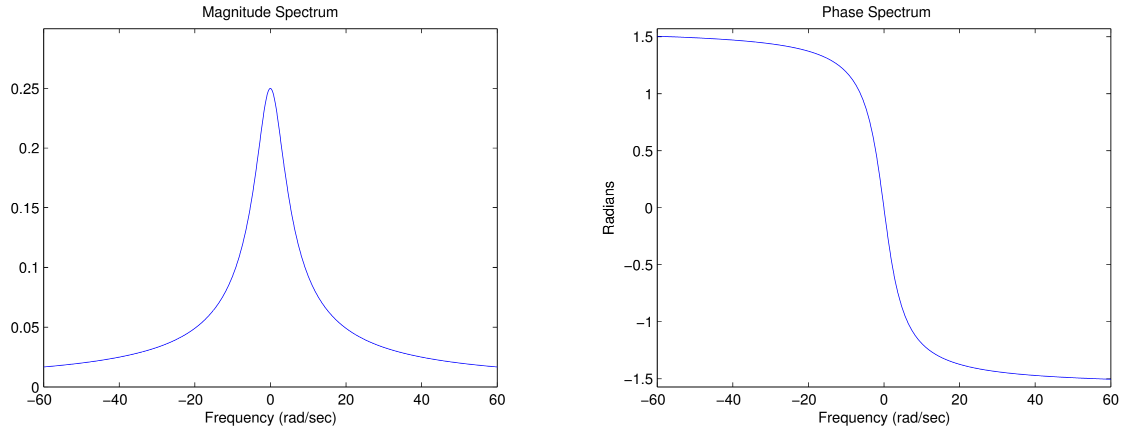
και άρα η φάση θα ειναι

$$\phi(\omega) = \tan^{-1}\frac{\Im\{H(\omega)\}}{\Re\{H(\omega)\}} = \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{\omega}{16+\omega^2}}{\frac{4}{16+\omega^2}}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{\omega}{4}\right) = -\tan^{-1}\frac{\omega}{4} \tag{10}$$

Το φάσμα πλάτους και φάσης του συστήματος φαίνεται στο σχήμα 2α′ και 2β′ αντίστοιχα. Η έξοδος θα είναι προφανώς η συνέλιξη της εισόδου, $x(t)$, με το σύστημα, $h(t)$. Όμως η είσοδος είναι της μορφης

$$x(t) = A\cos(4t + \theta) = \frac{A}{2}e^{j4t}e^{j\theta} + \frac{A}{2}e^{-j4t}e^{-j\theta} \tag{11}$$

Γνωριζουμε ότι οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις του συστήματος, και



(α′) Φάσμα Πλάτους Συστήματος $h(t)$ Άσκησης 2 (β′) Φάσμα Φάσης Συστήματος $h(t)$ Άσκησης 2

Σχήμα 2: Φάσματα Συστήματος Ασκησης 2

έτσι, δεδομένου ότι το σύστημα είναι πραγματικό σήμα, η έξοδος $y(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{AH(4)}{2}e^{j4t}e^{j\theta} + \frac{AH(-4)}{2}e^{-j4t}e^{-j\theta} \\
&= \frac{AH(4)}{2}e^{j4t}e^{j\theta} + \frac{AH^*(4)}{2}e^{-j4t}e^{-j\theta} \\
&= \frac{A|H(4)|e^{j\phi(4)}}{2}e^{j4t}e^{j\theta} + \frac{A|H(4)|e^{-j\phi(4)}}{2}e^{-j4t}e^{-j\theta} \\
&= \frac{A}{2}|H(4)|e^{j(4t+\theta+\phi(4))} + \frac{A}{2}|H(4)|e^{-j(4t+\theta+\phi(4))} \\
&= \frac{A}{2}|H(4)|2\cos(4t+\theta+\phi(4)) \\
&= \frac{A}{\sqrt{32}}\cos(4t+\theta-\frac{\pi}{4}) \qquad (12)
\end{aligned}
$$

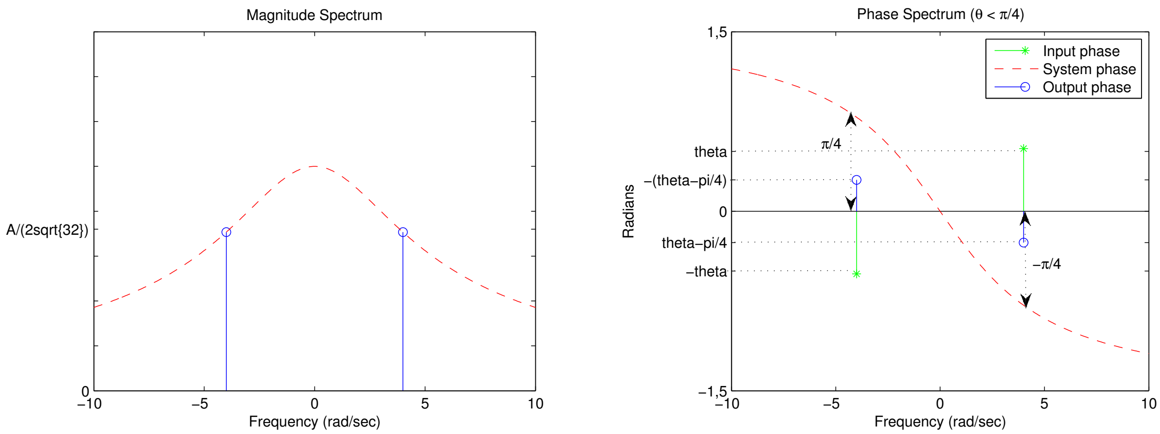
Παρατηρούμε ότι η έξοδος ειναι πάλι ημιτονοειδής μορφή, οπως η είσοδος, και έχει επηρεαστεί από το σύστημα τόσο στο πλάτος της (πλάτος εισόδου A, πλάτος εξόδου $A|H(4)|$), όσο και στη φάση της (φάση εισόδου θ, φάση εξόδου $\theta + \phi(4)$). Το φάσμα πλάτους και φάσης της εξόδου $y(t)$ φαίνεται στο σχήμα 3α′ και 3β′ αντίστοιχα. Με κόκκινη διακεκομμένη γραμμή φαίνεται το φάσμα πλάτους και φάσης του συστήματος, και πώς επηρέασε αυτό τις τιμές του φάσματος πλάτους και φάσης της εξόδου. Συγκρίνετε με τα αντίστοιχα της εισόδου.

Γενικότερα, μπορούμε να παρατηρήσουμε οτι:

Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος ειναι της μορφής $\mathbf{x(t)} = \mathbf{A}\cos(\omega_\mathbf{0}\mathbf{t} + \theta)$, τότε η έξοδος θα είναι της μορφής $\mathbf{y(t)} = \mathbf{A}|\mathbf{H}(\omega_\mathbf{0})|\cos(\omega_\mathbf{0}\mathbf{t} + \theta + \phi(\omega_\mathbf{0}))$, όπου $\mathbf{H}(\omega) = |\mathbf{H}(\omega)|\mathbf{e}^{\mathbf{j}\phi(\omega)}$ η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος.

Η ενέργεια του συστήματος είναι

$$
\begin{aligned}
E_h &= \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-8t}dt = -\frac{1}{8}e^{-8t}\Big|_0^{\infty} \qquad (13) \\
&= -\frac{1}{8}(0-1) = \frac{1}{8} \qquad (14)
\end{aligned}
$$



(α′) Φάσμα Πλάτους Εξόδου $x(t)$ Άσκησης 2 (β′) Φάσμα Φάσης Εξόδου $x(t)$ Άσκησης 2

Σχήμα 3: Φάσματα Σήματος Εξόδου Ασκησης 2

Η ενέργεια, σε μια περίοδο, του σήματος εισόδου (μια και είναι σήμα ισχύος και όχι ενέργειας) είναι

$$E_{x,T_0} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x^2(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X[k]|^2 \tag{15}$$

$$= \left|\frac{A}{2}e^{j\theta}\right|^2 + \left|\frac{A}{2}e^{-j\theta}\right|^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4} = \frac{A^2}{2} \tag{16}$$

Η ενέργεια, σε μια περίοδο, του σήματος εξόδου (μια και αυτό είναι επίσης σήμα ισχύος και όχι ενέργειας) είναι

$$E_{y,T_0} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} y^2(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |Y[k]|^2 \tag{17}$$

$$= \left|\frac{A}{2\sqrt{32}}e^{j(\theta-\pi/4)}\right|^2 + \left|\frac{A}{2\sqrt{32}}e^{-j(\theta-\pi/4)}\right|^2 = \frac{A^2}{128} + \frac{A^2}{128} = \frac{A^2}{64} \tag{18}$$

Ο συντελεστής λ που πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το σήμα εξόδου για να έχει την ίδια ενέργεια με το σήμα εισόδου είναι προφανώς

$$\frac{A^2}{2} = \lambda^2\frac{A^2}{64} \Leftrightarrow \lambda^2 = 32 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{32} \tag{19}$$

3. **Η καθυστέρηση ομάδας - group delay $\tau_{\mathbf{g}}(\omega)$ είναι μια μετρική ενός ΓΧΑ συστήματος με απόκριση συχνότητας $\mathbf{H}(\omega) = |\mathbf{H}(\omega)|\mathbf{e}^{\mathbf{j}\phi(\omega)}$, που ορίζεται ως $\tau_{\mathbf{g}}(\omega) = -\frac{\mathbf{d}\phi(\omega)}{\mathbf{d}\omega}$, δηλ. είναι η αρνητική παράγωγος της φάσης ενός σήματος. Η καθυστέρηση ομάδας μας πληροφορεί για το πόσο χρόνο καθυστερεί η περιβάλλουσά ενός σήματος, οταν αυτό περνάει μέσα από ένα ΓΧΑ σύστημα. Υπολογίστε και σχολιάστε την καθυστέρηση ομάδας για τα συστήματα:**

   - $\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{e}^{-\mathbf{j3}\omega}$
   - $\mathbf{H}(\omega) = -\mathbf{3e}^{\mathbf{j}\omega}$
   - $\mathbf{h(t)} = \mathbf{e}^{-\mathbf{4t}}\mathbf{u(t)}$
   - $\mathbf{H}(\omega) = |\mathbf{H}(\omega)|\mathbf{e}^{\mathbf{j}(\omega^{\mathbf{2}}-\mathbf{3}\omega+\mathbf{2})}$

- $\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{1}}{\omega^{\mathbf{2}}}$

Λύση:
Θα είναι:

- $$\tau_g(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = -\frac{d(-3\omega)}{d\omega} = 3 \tag{20}$$
  σταθερή για κάθε ω.
- $$H(\omega) = -3e^{j\omega} = 3e^{j(\omega+\pi)} \tag{21}$$
  και άρα
  $$\tau_g(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = -\frac{d(\omega+\pi)}{d\omega} = -1 \tag{22}$$
  σταθερη για κάθε ω.
- Από την προηγούμενη άσκηση, έχουμε ότι
  $$\phi(\omega) = -\tan^{-1}\frac{\omega}{4} \tag{23}$$
  και δεδομένου ότι ισχύει
  $$\frac{d\tan^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{x^2+1} \tag{24}$$
  τότε, θα έχουμε οτι
  $$\tau_g(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = -\frac{d(-\tan^{-1}(\omega/4))}{d\omega} = \frac{d(\tan^{-1}(\omega/4))}{d\omega} = \frac{1}{4}\frac{1}{\frac{\omega^2}{16}+1} = \frac{1}{4}\frac{16}{\omega^2+16} \tag{25}$$
  Εδώ βλέπουμε οτι κάθε συχνότητα της περιβάλλουσας ω_k θα καθυστερεί διαφορετικά από τις άλλες, και ανάλογα με την τιμή της καθυστέρησης ομάδας, $\tau_g(\omega_k)$.
- $$\tau_g(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = -\frac{d(\omega^2-3\omega+2)}{d\omega} = 2\omega - 3 \tag{26}$$
  Κι εδώ βλέπουμε οτι κάθε συχνότητα της περιβάλλουσας του σήματος εισόδου καθυστερεί στην έξοδο διαφορετικά από οποιαδηποτε άλλη συχνότητα, ανάλογα με την τιμή της καθυστέρησης ομάδας.
- Εδώ, το σήμα που περιγράφει το σύστημα ειναι πραγματικό και πάντα θετικό, για κάθε ω. Άρα εχει μηδενική φαση, οπότε η καθυστέρηση ομάδας ειναι 0, άρα δεν υπάρχει καμιά καθυστέρηση της περιβάλλουσας του σήματος εισόδου στην έξοδο.

4. **Η καθυστέρηση φάσης - phase delay $\tau_{\mathbf{p}}(\omega)$ είναι μια μετρική ενός ΓΧΑ συστήματος με απόκριση συχνότητας $\mathbf{H}(\omega) = |\mathbf{H}(\omega)|\mathbf{e}^{\mathbf{j}\phi(\omega)}$, που ορίζεται ως $\tau_{\mathbf{p}}(\omega) = -\frac{\phi(\omega)}{\omega}$, Η καθυστέρηση φάσης μας πληροφορεί για το πόσο χρόνο καθυστερούν οι συχνότητες ενός σήματος, οταν αυτό περνάει μέσα από ένα ΓΧΑ σύστημα.**

   (α΄) **Υπολογίστε και σχολιάστε την καθυστέρηση φάσης για τα συστήματα:**
   - $\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{e}^{-\mathbf{j3}\omega}$
   - $\mathbf{H}(\omega) = -\mathbf{3e}^{\mathbf{j}\omega}$

- $\mathbf{h(t) = e^{-4t}u(t)}$
- $\mathbf{H(\omega) = |H(\omega)|e^{j(\omega^2 - 3\omega + 2)}}$
- $\mathbf{H(\omega) = \frac{1}{\omega^2}}$
- $\mathbf{h(t) = 2\delta(t-2) + 2\delta(t+2)}$

(β′) **Σχολιάστε σχετικά το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης με βάση την καθυστέρηση φάσης του σχετικού συστήματος. Τι παρατηρείτε;**

Λύση:

(α′) Θα είναι:

- $$\tau_p(\omega) = -\frac{\phi(\omega)}{\omega} = -\frac{(-3\omega)}{\omega} = 3 \tag{27}$$

  σταθερή για κάθε ω. Αυτό σημαίνει οτι όλες οι συχνότητες του σήματος εισόδου θα καθυστερησουν στην έξοδο κατά το ιδιο χρονικό διάστημα, δηλ. κατά 3 sec.

- $$H(\omega) = -3e^{j\omega} = 3e^{j(\omega+\pi)} \tag{28}$$

  και άρα

  $$\tau_p(\omega) = -\frac{\phi(\omega)}{\omega} = -\frac{(\omega+\pi)}{\omega} = -(1 + \frac{\pi}{\omega}) \tag{29}$$

  Αυτό σημαίνει οτι οι συχνότητες του σήματος εισόδου θα καθυστερησουν στην έξοδο κατα $-(1 + \frac{\pi}{\omega})$ sec, δηλ. θα προηγούνται κατα $(1 + \frac{\pi}{\omega})$ sec.

- Από την προηγούμενη άσκηση, έχουμε ότι

  $$\phi(\omega) = -\tan^{-1}\frac{\omega}{4} \tag{30}$$

  τότε, θα έχουμε οτι

  $$\tau_p(\omega) = -\frac{\phi(\omega)}{\omega} = -\frac{-\tan^{-1}(\omega/4))}{\omega} = \frac{(\tan^{-1}(\omega/4))}{\omega} \tag{31}$$

  Εδώ βλέπουμε οτι κάθε συχνότητα ω_k θα καθυστερεί διαφορετικά από τις άλλες, και ανάλογα με την τιμή της καθυστέρησης ομάδας, $\tau_p(\omega_k)$.

- $$\tau_p(\omega) = -\frac{\phi(\omega)}{\omega} = -\frac{(\omega^2 - 3\omega + 2)}{\omega} = -\omega + 3 - \frac{2}{\omega} \tag{32}$$

  Κι εδώ βλέπουμε οτι κάθε συχνότητα του σήματος εισόδου καθυστερεί στην έξοδο διαφορετικά από οποιαδηποτε άλλη συχνότητα, ανάλογα με την τιμή της καθυστέρησης φάσης.

- Εδώ, το σήμα που περιγράφει το σύστημα ειναι πραγματικό και πάντα θετικό, για κάθε ω. Άρα εχει μηδενική φαση, οπότε η καθυστέρηση φάσης ειναι 0, άρα δεν υπάρχει καμιά καθυστέρηση του σήματος εισόδου στην έξοδο.

- Έχουμε

  $$h(t) = 2\delta(t+1) + 2\delta(t-1) \longleftrightarrow H(\omega) = 2e^{j\omega} + 2e^{-j\omega} = 4\cos(\omega) \tag{33}$$

  άρα η φάση είναι

  $$\phi(\omega) = \begin{cases} 0, & \cos(\omega) > 0 \\ \pi, & \cos(\omega) < 0,\ \omega > 0 \\ -\pi, & \cos(\omega) < 0,\ \omega < 0 \end{cases} \tag{34}$$

Άρα η καθυστέρηση φάσης θα είναι

$$\tau_p(\omega) = -\frac{\phi(\omega)}{\omega} = \begin{cases} 0, & \cos(\omega) > 0 \\ -\frac{\pi}{\omega}, & \cos(\omega) < 0,\ \omega > 0 \\ \frac{\pi}{\omega}, & \cos(\omega) < 0,\ \omega < 0 \end{cases} \tag{35}$$

(β′) Η καθυστέρηση φάσης του συστήματος δίνεται ως

$$\tau_p(\omega) = -\frac{\phi(\omega)}{\omega} = \frac{\tan^{-1}\frac{\omega}{4}}{\omega} \tag{36}$$

και για το σήμα εισόδου της εκφώνησης, $x(t) = A\cos(4t+\theta)$, είδαμε ότι το σήμα εξόδου ειναι της μορφης

$$y(t) = \frac{A}{\sqrt{32}}\cos(4t - \frac{\pi}{4} + \theta) = \frac{A}{\sqrt{32}}\cos(4(t - \frac{\pi}{16}) + \theta) \tag{37}$$

που δείχνει οτι το σήμα εισόδου καθυστερει στην έξοδο κατά $\phi = \frac{\pi}{16}$. Ας δούμε πόσο ειναι η καθυστέρηση φάσης που δίνει το σύστημα στη συχνότητα $\omega = 4$, που ειναι η συχνότητα του ημιτόνου εισόδου. Είναι

$$\tau_p(\omega)\Big|_{\omega=4} = -\frac{\phi(\omega)}{\omega}\Big|_{\omega=4} = \frac{\tan^{-1}(1)}{4} = \frac{\pi}{16} \tag{38}$$

που βλέπουμε οτι μας δίνει την καθυστέρηση του σήματος στην έξοδο.

5. **Έστω το σήμα $\mathbf{x(t) = a(t)\cos(200\pi t) = A\cos(\pi t)\cos(200\pi t)}$ το οποίο περνάει από σύστημα με κρουστική απόκριση $\mathbf{h(t) = \delta(t) - \delta(t - \frac{1}{2})}$. Υπολογίστε την καθυστέρηση ομάδας της εξόδου $\mathbf{y(t)}$, και δείξτε ισούται με την καθυστερηση που έχει η περιβάλλουσα του σήματος εισόδου, $\mathbf{a(t)}$, στην έξοδο του συστήματος.**

Λύση:
Το σήμα εισόδου φαίνεται στο σχήμα 4. Έχουμε, με χρήση της ταυτότητας

$$\cos(\theta)\cos(\phi) = \frac{1}{2}\cos(\theta+\phi) + \frac{1}{2}\cos(\theta-\phi) \tag{39}$$

πως το σημα εισόδου γράφεται ως

$$x(t) = A\cos(\pi t)\cos(200\pi t) = \frac{A}{2}\cos(201\pi t) + \frac{A}{2}\cos(199\pi t) \tag{40}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η είσοδος μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δυο συνημιτόνων. Από το αποτέλεσμα της Άσκησης 2, η έξοδος μπορεί να γραφεί ως

$$y(t) = \frac{A|H(201\pi)|}{2}\cos(201\pi t + \phi_h(201\pi)) + \frac{A|H(199\pi)|}{2}\cos(199\pi t + \phi_h(199\pi)) \tag{41}$$

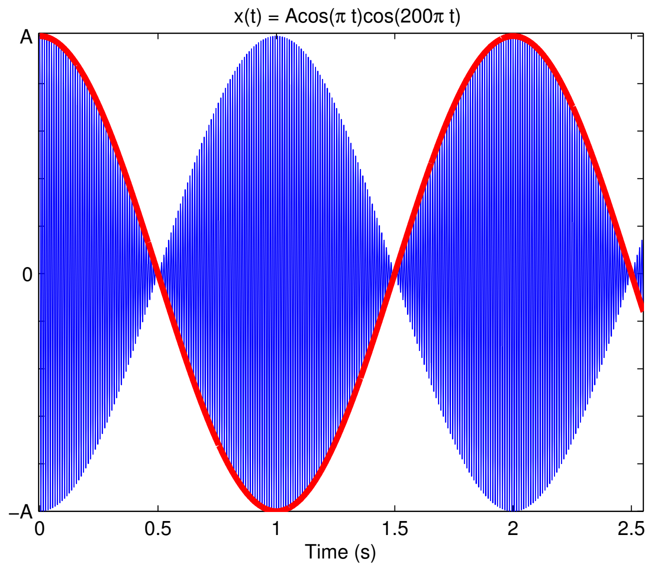
με

$$|H(\omega)| = |1 - e^{-j\frac{\omega}{2}}| = \sqrt{(1-\cos(\frac{\omega}{2}))^2 + \sin^2(\frac{\omega}{2})} = \sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} \tag{42}$$

και άρα

$$|H(201\pi)| = \sqrt{2 - 2\cos(201\pi/2)} = \sqrt{2 - 2\cos(\pi/2)} = \sqrt{2}, \tag{43}$$

$$|H(199\pi)| = \sqrt{2 - 2\cos(199\pi/2)} = \sqrt{2 - 2\cos(-\pi/2)} = \sqrt{2} \tag{44}$$



Σχήμα 4: Σχήμα Άσκησης 4 - Σήμα εισόδου $x(t)$

Επίσης,

$$\phi_h(\omega) = \tan^{-1}\frac{\Im\{H(\omega)\}}{\Re\{H(\omega)\}} = \tan^{-1}\left(\frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{1-\cos(\frac{\omega}{2})}\right) \tag{45}$$

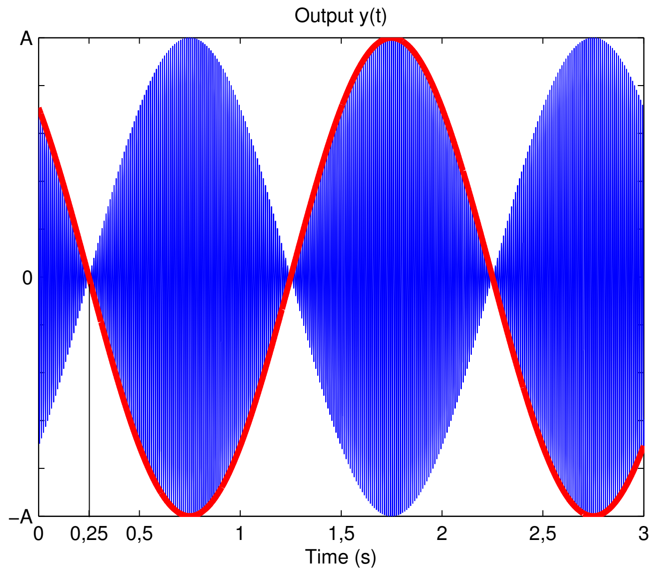
και άρα

$$\begin{aligned} \phi_h(201\pi) &= \tan^{-1}\left(\frac{\sin(\pi/2)}{1-\cos(\pi/2)}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} && (46)\\ \phi_h(199\pi) &= \tan^{-1}\left(\frac{\sin(-\pi/2)}{1-\cos(-\pi/2)}\right) = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4} && (47)\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{A|H(201\pi)|}{2}\cos(201\pi t + \phi_h(201\pi)) + \frac{A|H(199\pi)|}{2}\cos(199\pi t + \phi_h(199\pi)) && (48)\\ &= \frac{A\sqrt{2}}{2}\cos(201\pi t + \frac{\pi}{4}) + \frac{A\sqrt{2}}{2}\cos(199\pi t - \frac{\pi}{4}) && (49)\\ &= A\sqrt{2}\cos\left(\frac{201-199}{2}\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{201+199}{2}\pi t\right) && (50)\\ &= A\cos(\pi t + \frac{\pi}{4})\cos(200\pi t) && (51)\\ &= A\cos(\pi(t+\frac{1}{4}))\cos(200\pi t) && (52)\\ &= a(t+\frac{1}{4})\cos(200\pi t) && (53)\end{aligned}$$

Παρατηρούμε οτι το σήμα συχνότητας 200π rad/sec δεν έχει υποστεί καθυστερηση στην έξοδο, ενώ το σήμα συχνότητας π rad/sec (που αποτελεί την περιβάλλουσα του σήματος εισόδου, δηλ. διαμορφώνει το πλάτος του σήματος με συχνότητα 200π), έχει προηγηθεί κατά 1/4 sec. Το σήμα εξόδου φαίνεται στο σχήμα 5. Παρατηρήστε ότι η περιβάλλουσά του έχει προηγηθεί κατά 1/4 sec σε



Σχήμα 5: Σχήμα Άσκησης 4 - Σήμα εξόδου $y(t)$

σχέση με το αρχικό σήμα (δείτε την κάθετη γραμμή στο σχήμα για να βοηθηθείτε). Ας υπολογίσουμε την καθυστέρηση ομάδας του συστήματος. Θα είναι

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\phi_h(\omega)}{d\omega} = -\frac{d}{d\omega}\tan^{-1}\left(\frac{\sin(\omega/2)}{1-\cos(\omega/2)}\right) \tag{54}$$

$$= = -\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\sin(\omega/2)}{1-\cos(\omega/2)}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{\sin(\omega/2)}{1-\cos(\omega/2)}\right)^2} \tag{55}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cos(\omega/2)(1-\cos(\omega/2))+\frac{1}{2}\sin^2(\omega/2)}{(1-\cos(\omega/2))^2}\frac{1}{1+\left(\frac{\sin(\omega/2)}{1-\cos(\omega/2)}\right)^2} \tag{56}$$

και άρα

$$\tau_g(\pi) = -\frac{\frac{1}{2}\cos(\pi/2)(1-\cos(\pi/2))+\frac{1}{2}\sin^2(\pi/2)}{(1-\cos(\pi/2))^2}\frac{1}{1+\left(\frac{\sin(\pi/2)}{1-\cos(\pi/2)}\right)^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \tag{57}$$

που δηλώνει οτι η καθυστέρηση ομάδας είναι ίση με $-1/4$ sec, που όπως είδαμε ειναι ίδια με την καθυστέρηση του σήματος περιβάλλουσας $a(t)$ στην έξοδο του συστήματος! :-)[1]

6. **Για τα πραγματικά σήματα $\mathbf{x(t)} \longleftrightarrow \mathbf{X}(\omega)$, $\mathbf{y(t)} \longleftrightarrow \mathbf{Y}(\omega)$ να δείξετε ότι**

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{x(t)y(t)dt} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{X}(\omega)\mathbf{Y}(-\omega)\mathbf{d}\omega \tag{58}$$

[1] Η παραπάνω διαδικασία λέγεται *Διαμόρφωση Πλάτους - Amplitude Modulation - AM*, και συγκεκριμένα λέγεται *Διαμόρφωση Πλάτους Διπλής Πλευρικής Ζώνης με Κατεσταλμένη Φέρουσα - Double Side Band - Suppressed Carrier (DSB-SC)* και είχε αρχικά ευρεία εφαρμογή στη ραδιοφωνική μετάδοση. Το σήμα $a(t)$ λέγεται *σημα πληροφορίας*, ενώ το σήμα $\cos(200\pi t)$ λέγεται *φέρον σήμα ή φέρουσα*. Επίσης, στην πραγματικότητα η περιβάλλουσα είναι το $|a(t)|$, και όχι το $a(t)$, αλλά για τους δικούς μας σκοπούς αυτό δεν έχει σημασία.

Επίσης, με τη βοήθεια της παραπάνω σχέσης, δείξτε ότι πραγματικά σήματα με μη επικαλυπτόμενα πραγματικά και θετικά φάσματα είναι ορθογώνια, δηλ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x(t)y(t)dt = 0} \tag{59}$$

Λύση:
Από το θεώρημα του Parseval, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)Y^*(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)Y(-\omega)d\omega \tag{60}$$

αφού το σήμα είναι πραγματικό, άρα $Y^*(\omega) = Y(-\omega)$. Το γινόμενο μη επικαλυπτόμενων πραγματικών, θετικών φασμάτων, $X(\omega)Y^*(\omega) = X(\omega)Y(-\omega)$ είναι ίσο με το μηδέν, γιατί λόγω της μη επικάλυψης, έστω ότι το $X(\omega)$ ορίζεται στο $[a, b]$ ενώ το $Y(\omega)$ στο $[c, d] \nsubseteq [a, b]$, το γινόμενό τους δεν ορίζεται σε κανένα διάστημα, άρα το αντίστοιχο ολοκλήρωμα είναι ίσο με μηδεν, άρα

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt = 0 \tag{61}$$

7. **Αποδείξτε ότι ένα σήμα δεν μπορεί να είναι πεπερασμένο στο χώρο του χρόνου και, ταυτόχρονα, πεπερασμένο στο χώρο της συχνότητας.**

Λύση:
Έστω ότι ένα σήμα $x(t)$ είναι ταυτοχρόνως πεπερασμένο και στους δυο χώρους. Στο χώρο της συχνότητας, θα είναι:

$$X(\omega) = 0,\ |\omega| > B$$

Τότε, μπορούμε να γράψουμε το σήμα αυτό ως

$$X_r(\omega) = X(\omega)rect\Big(\frac{\omega}{2B}\Big)$$

Μεταφερόμενοι στο χώρο του χρόνου, θα είναι

$$X_r(\omega) = X(\omega)rect\Big(\frac{\omega}{2B}\Big) \leftrightarrow x_r(t) = x(t) * 2Bsinc(2Bt)$$

Η παραπάνω σχέση μας λέει ότι το $x_r(t)$ (και άρα και το $x(t)$) δεν μπορεί να είναι πεπερασμένο στο χρόνο, γιατί η συνάρτηση $sinc()$ έχει άπειρη διάρκεια. Άρα άτοπο, οπότε δε γίνεται να υπάρξει σήμα πεπερασμένο και στους δυο χώρους.