

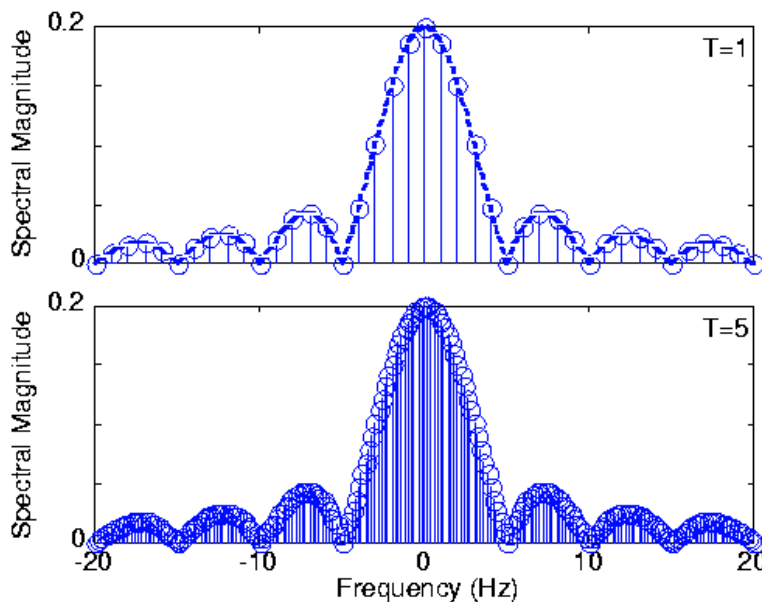
Σημειώσεις και παρατηρήσεις σχετικά με Μετασχηματισμό Fourier

Επιμέλεια: Γιώργος Π. Καφεντζής
Υποψ. Διδασκωρ Τμήμ. Η/Υ
Πανεπιστήμιο Κρήτης

29 Απριλίου 2013

1 Εισαγωγή

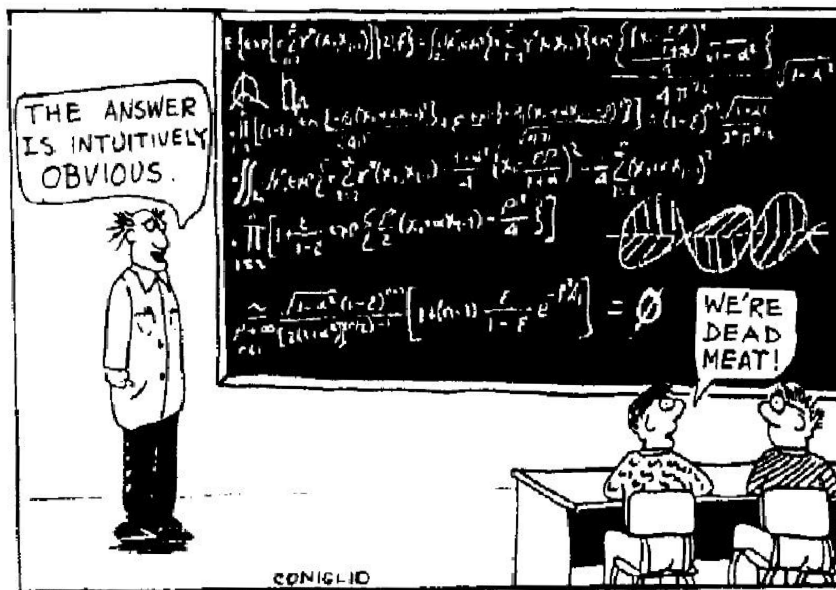
Ως τώρα έχουμε δει ότι ένα περιοδικό σήμα αναλύεται σε ένα άθροισμα άπειρων συνημιτόνων με συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες μιας θεμελιώδους. Αυτή η ανάλυση ονομάστηκε Ανάλυση σε Σειρές Fourier. Ο μετασχ. Fourier ορίζεται εύκολα ως η επέκταση των σειρών Fourier, όταν η περίοδος του σήματος τείνει στο άπειρο, όταν δηλαδή το σήμα πλησιάζει στο να ΜΗΝ είναι πια περιοδικό. Άρα αφορά κυρίως ΜΗ περιοδικά σήματα. Τότε τα X_k παύουν να ορίζονται για ακέραια k και για συγκεκριμένες συχνότητες $k\omega_0$, και ορίζονται πλέον για κάθε συχνότητα ω , σε ένα συνεχές φάσμα $X(\omega)$. Για την τυπική απόδειξη, δείτε τις σημειώσεις σας. Διαισθητικά, μπορούμε να “αποδείξουμε” αυτή τη σχέση ως εξής. Δείτε το σχήμα 1. Στο πάνω τμήμα, βλέπουμε το φάσμα πλάτους ενός περιοδικού σήματος, που έχει περίοδο $T = 1$.



Σχήμα 1: Διαισθητική απόδειξη της σχέσης μεταξύ των σειρών Fourier και του μετασχ. Fourier.

Βλέπετε πως οι φασματικές γραμμές είναι σχετικά αραιές (είναι οι κάθετες γραμμές με τα κυκλάκια στην κορυφή). Η θεμελιώδης συχνότητα είναι $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi/1 = 2\pi$ και τα πολλαπλάσιά της βρίσκονται στις θέσεις $k\omega_0 = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Η διακεκομμένη γραμμή λέγεται φασματική περιβάλλουσα, και απλά θα μας βοηθήσει οπτικά για τη σύγκριση με το κάτω τμήμα του σχήματος. Δείτε τώρα το κάτω τμήμα του σχήματος 1. Βλέπετε πως αν μεγαλώσουμε την περίοδο, και γίνει $T = 5$, τότε η θεμελιώδης συχνότητα γίνεται

$\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi/5 = 0.2\pi$ και είναι πιο μικρή, και άρα και τα πολλαπλάσιά της, $k\omega_0 = 0.2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, θα είναι πιο κοντά το ένα με το άλλο. Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα στο φάσμα πλάτους. Οι φασματικές γραμμές είναι πολύ πιο κοντά απ' ότι πριν. Σκεφτείτε να επαναλαμβάνουμε συνέχεια αυτή τη διαδικασία για όλο και πιο μεγάλες περιόδους T . Η θεμελιώδης συχνότητα ω_0 γίνεται συνεχώς όλο και πιο μικρή, και οι φασματικές γραμμές έρχονται όλο και πιο κοντά, καθώς τα $k\omega_0$ είναι όλο και πιο κοντά το ένα στο άλλο. Όταν το T γίνει πολύ πολύ πολύ μεγάλο, και τείνει προς το $+\infty$ - δηλ. το σήμα ΔΕΝ θεωρείται πια περιοδικό - τότε το ω_0 θα γίνει απειροστά μικρό, και τα πολλαπλάσιά του, $k\omega_0$ θα είναι τόσο κοντά το ένα με το άλλο που δε θα ορίζουν πια διακριτές τιμές, αλλά ένα συνεχή άξονα του ω ! Έτσι, οι φασματικές γραμμές θα είναι απειροστά κοντά μεταξύ τους, τόσο κοντά που πλέον δε θα είναι φασματικές γραμμές, αλλά θα ορίζουν μια συνεχή συνάρτηση $X(\omega)$! ;-). Αυτή είναι η διαισθητική προσέγγιση της σχέσης μετασχ. Fourier και της σειράς Fourier...



Σχήμα 2: Βασιστείτε στη διαίσθησή σας!!

2 Ο μετασχ. Fourier

Ας θυμηθούμε τον ορισμό:

$$X(\omega) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

και τον αντίστροφο μετασχ. Fourier

$$x(t) = F^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (2)$$

Η σχέση (1) μας αναλύει ένα μη περιοδικό σήμα σε ένα συνεχές φάσμα $X(\omega)$, ενώ η σχέση (2) μας συνθέτει το σήμα $x(t)$ με ένα συνεχές άθροισμα εκθετικών σημάτων, που έχει βάρος $X(\omega)$.

Η ομοιότητα με τις σειρές Fourier είναι, όπως είδαμε, αρκετά μεγάλη. Όπως, για πραγματικά περιοδικά

σηματα, δυο εκθετικά στις συχνότητες $\pm k\omega_0$ δίνουν ένα συνημίτονο συχνότητας $k\omega_0$, αυτό συμβαίνει και εδώ. Έστω μια απειροστά μικρή συχνότητα $\Delta\omega$ του συνεχούς φάσματος του σήματος. Επειδή αναλύουμε πραγματικά σήματα, θα υπάρχει και η αντίστοιχη συχνότητα $-\Delta\omega$ και το πλάτος καθεμιάς θα είναι $X(\Delta\omega)$ και $X^*(\Delta\omega)$ αντίστοιχα, λόγω των γνωστών ιδιοτήτων για τα πραγματικά σήματα. Άρα προσθέτοντάς τα, όπως επιτάσσει το ολοκλήρωμα, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} X(\Delta\omega)e^{j\Delta\omega t} + X^*(\Delta\omega)e^{-j\Delta\omega t} &= |X(\Delta\omega)|e^{j\phi_{\Delta\omega}}e^{j\Delta\omega t} + (|X(\Delta\omega)|e^{j\phi_{\Delta\omega}})^*e^{-j\Delta\omega t} \\ &= |X(\Delta\omega)|e^{j\phi_{\Delta\omega}}e^{j\Delta\omega t} + |X(\Delta\omega)|e^{-j\phi_{\Delta\omega}}e^{-j\Delta\omega t} \\ &= |X(\Delta\omega)|e^{j(\Delta\omega t + \phi_{\Delta\omega})} + |X(\Delta\omega)|e^{-j(\Delta\omega t + \phi_{\Delta\omega})} \\ &= 2|X(\Delta\omega)|\cos(\Delta\omega t + \phi_{\Delta\omega}) \end{aligned} \quad (3)$$

Το φάσμα περιέχει έναν άπειρο αριθμό από τέτοια ημίτονα, σταθερού πλάτους $2|X(\Delta\omega)|$. Έτσι, ΚΑΙ ο μετασχηματισμός Fourier αναλύει ένα σήμα σε ημίτονα στην πραγματικότητα! Απλά μια τέτοια ανάλυση όπως τη δείξαμε μόλις δεν έχει πρακτική σημασία, παρά μόνο για την καλύτερη κατανόηση του μετασχηματισμού.

2.1 Έπαρξη του μετασχ. Fourier

Όπως προείπαμε, ο μετασχ. Fourier εφαρμόζεται κυρίως σε ΜΗ περιοδικά σήματα. Για να υπάρχει ο μετασχ. Fourier, πρέπει το σήμα που αναλύουμε να είναι απολύτως ολοκληρώσιμο, δηλ. να ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty \quad (4)$$

Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι το εμβαδό που περιλαμβάνεται από τον άξονα t και το σήμα μας πρέπει να είναι πεπερασμένο. Για παράδειγμα, το σήμα $x(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ΔΕΝ έχει μετασχηματισμό Fourier γιατί δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμο. Το ίδιο και το $x(t) = e^{\alpha t}u(t)$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, όπου $u(t)$ η βηματική συνάρτηση. Όμως, το σήμα $x(t) = e^{\alpha t}u(t)$, $\alpha \in \mathbb{R}^-$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμο, άρα ο μετασχ. Fourier υπάρχει. Αυτό δεν είναι τυχαίο. Τα δυο πρώτα σήματα είναι σήματα ισχύος, και για αυτά τα σήματα, ο μετασχ. Fourier δεν υπάρχει μέσω του ολοκληρώματος Fourier, γιατί το ολοκλήρωμα (1) δε συγκλίνει. Ο λόγος είναι ότι τα σήματα αυτά δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμα, δηλ. η σχέση (4) δεν ισχύει. Αυτό δε σημαίνει ότι δεν έχουν μετασχ. Fourier, ΙΣΩΣ έχουν αλλά δεν υπολογίζεται μέσω του ολοκληρώματος αυτού - περισσότερα θα δείτε παρακάτω. Αντίθετα, το τρίτο σήμα ΕΙΝΑΙ απολύτως ολοκληρώσιμο, και άρα έχει μετασχ. Fourier.

2.2 Παρατηρήσεις

Ας ξεκινήσουμε κάποιες παρατηρήσεις...

1. Έχουμε μιλήσει για τα σήματα ισχύος, που είναι άπειρα σε διάρκεια, κι έχουν πεπερασμένη ισχύ και άπειρη ενέργεια. Στον αντίποδα, υπάρχουν τα σήματα ενέργειας, που έχουν πεπερασμένη ενέργεια και μηδενική ισχύ. Θυμίζουμε ότι σήματα ενέργειας είναι τα σήματα για τα οποία ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty, \quad (5)$$

μια σχέση που μοιάζει με τη σχέση (4) αλλά όχι ακριβώς. Τα σήματα ενέργειας έχουν ΠΑΝΤΑ μετασχηματισμό Fourier. Ένας γρήγορος τρόπος για να δείτε αν ένα σήμα έχει μετασχηματισμό Fourier είναι να δείτε τη γραφική παράστασή του. Αν το εμβαδό μεταξύ του σήματος και του οριζόντιου άξονα είναι πεπερασμένο, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier του και μπορείτε να τον υπολογίσετε με τον ορισμό.

2. Γνωρίζετε ότι

$$x(t) = \text{Arect}(t/T) \longleftrightarrow X(\omega) = AT \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) \quad (6)$$

και

$$y(t) = \text{Atri}(t/T) \longleftrightarrow Y(\omega) = AT \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) \quad (7)$$

με

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}. \quad (8)$$

Πολύ γνωστά και πολύ χρήσιμα ζευγάρια μετασχ. Fourier. Παρατηρήστε ότι το $\text{sinc}(\frac{\omega T}{2\pi})$ μηδενίζεται στις θέσεις $\omega = \pm \frac{2\pi k}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$. Το $X(\omega)$ είναι εν γένει μιγαδική συνάρτηση, άρα κι αυτή μπορεί να γραφεί στη μορφή μέτρο-φάση:

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\angle X(\omega)} \quad (9)$$

όπου το $|X(\omega)|$ είναι πάντα θετικό και λέγεται μέτρο και το $\angle X(\omega)$ λέγεται φάση του μετασχ. Fourier, αντίστοιχα. Για τα παραδείγματά μας, έστω $A = 1$, και θα είναι

$$|X(\omega)| = T \left| \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) \right|, \quad |Y(\omega)| = T \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) \quad (10)$$

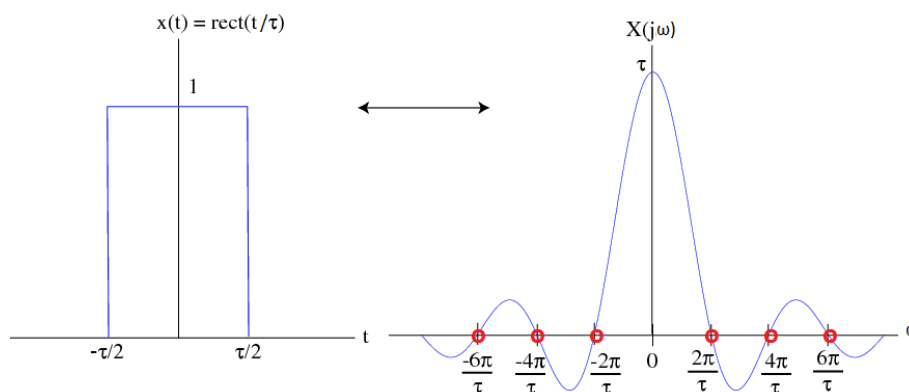
και

$$\angle X(\omega) = \begin{cases} \pi, & \frac{2\pi(1+l)}{T} \leq \omega < \frac{2\pi(2+l)}{T}, \\ -\pi, & -\frac{2\pi(2+l)}{T} \leq \omega < -\frac{2\pi(1+l)}{T}, \\ 0, & \frac{2\pi l}{T} \leq |\omega| < \frac{2\pi(l+1)}{T} \end{cases} \quad (11)$$

με $l = 0, 2, 4, \dots$, και

$$\angle Y(\omega) = 0. \quad (12)$$

Για να εξηγήσουμε λίγο τις τιμές της φάσης τώρα (μην τρομάζετε, αυτά τα περίεργα διαστήματα για



Σχήμα 3: (α) Σήμα τετραγωνικού παραθύρου (β) Μετασχ. Fourier

την ω είναι απλά τα διαστήματα που ορίζουν οι κόκκινες τελίτσες στο σχήμα 3)... Προφανώς, επειδή το $Y(\omega)$ είναι μόνιμα θετικό, για κάθε ω , γι' αυτό και η φάση του είναι πάντα μηδέν. Αντίθετα, το $X(\omega)$ είναι σε κάποια διαστήματα θετικό και σε κάποια αρνητικό. Δείτε το σχήμα 3. Εκεί που το $X(\omega)$ είναι θετικό, η φάση είναι μηδέν. Εκεί που είναι αρνητικό, έχουμε δυο περιπτώσεις:

- αν βρισκόμαστε σε θετικές συχνότητες, τότε έχουμε ότι

$$X(\omega) = -T \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) = T \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) e^{j\pi}, \quad 2\pi \frac{1+l}{T} \leq \omega < 2\pi \frac{2+l}{T}. \quad (13)$$

Άρα η φάση είναι $\angle X(\omega) = \pi$ σε αυτά τα διαστήματα.

- αν βρισκόμαστε σε αρνητικές συχνότητες, τότε έχουμε ότι

$$X(\omega) = -T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) = T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) e^{-j\pi}, \quad -2\pi \frac{2+l}{T} \leq \omega < -2\pi \frac{1+l}{T}. \quad (14)$$

Άρα η φάση είναι $\angle X(\omega) = -\pi$ σε αυτά τα διαστήματα.

3. Αξίζει να αναφέρουμε ότι κι εδώ ισχύει η ιδέα της προβολής που είδαμε στις σειρές Fourier. Μόνο που εδώ δεν προβάλλουμε το σήμα σε εκθετικά συγκεκριμένων συχνοτήτων $k\omega_0$, αλλά σε ΟΛΑ τα εκθετικά, όλων των συχνοτήτων!
4. Ας υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier ενός άλλου συνήθους σήματος ενέργειας, του $x(t) = e^{at}u(t)$, $a < 0$. Είναι:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-j\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{a-j\omega} e^{(a-j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a-j\omega} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a-j\omega)t} - 1 \right) \end{aligned} \quad (15)$$

Εδώ τώρα πρέπει να σταματήσουμε. Για να μην αποκλίνει αυτό το όριο στο ∞ , θα πρέπει το όρισμα του εκθετικού να είναι αρνητικό, ώστε το όριο να τείνει στο μηδέν. Για να ισχύει αυτό, θα πρέπει να ισχύει $a - j\omega < 0$. Ένα λεπτό όμως. Το $a - j\omega$ είναι μιγαδικός αριθμός. Ως γνωστόν, οι μιγαδικοί αριθμοί ΔΕΝ έχουν διάταξη, άρα το να πούμε ότι πρέπει να ισχύει $a - j\omega < 0$ είναι άνευ νοήματος, είναι ολότελα λάθος! :-) Άρα τι κάνουμε;

Θα εκμεταλλευτούμε ένα γνωστό λήμμα της Μιγαδικής Ανάλυσης (μην τρομάζετε, είναι εύκολο, θα το ξαναδείτε και παρακάτω, στο μετασχ. Laplace), που λέει ότι

εάν $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ και $g(t)$ είναι κατ' απόλυτη τιμή φραγμένη, τότε

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)g(t) = 0.$$

Για να δούμε αν μπορούμε κατ' αρχάς να το δείξουμε αυτό για το σήμα μας. Μπορούμε να γράψουμε το σήμα μας ως γινόμενο μιας φραγμένης και μιας συνάρτησης που συγκλίνει στο μηδέν; Είναι:

$$e^{(a-j\omega)t} = e^{at} e^{-j\omega t} = f(t)g(t) \quad (16)$$

Όμως

$$|e^{-j\omega t}| = \sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)} = \sqrt{1} = 1, \quad (17)$$

για κάθε ω, t . Οπότε να η φραγμένη μας συνάρτηση, η $g(t) = e^{-j\omega t}$. Άρα αρκεί να δούμε πότε ισχύει ότι

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{at} = 0 \quad (18)$$

και μετά μπορούμε να συνεχίσουμε τη λύση της άσκησης μας. Εδώ πλέον, στον εκθέτη μας έχουμε πραγματικό αριθμό, άρα ξέρουμε ότι η συνάρτηση e^{at} φθίνει στο 0 όταν $t \rightarrow +\infty$, **μόνο αν** $a < 0$, που ισχύει από υπόθεση (κι αν δεν ίσχυε, θα το βάζαμε με το ζόρι για να συγκλίνει το ολοκλήρωμα :-)). Ας ολοκληρώσουμε τη λύση μας.

$$X(\omega) = \frac{1}{a-j\omega} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a-j\omega)t} - 1 \right) = \frac{1}{a-j\omega} (0 - 1) = \frac{1}{j\omega - a}, \quad a < 0 \quad (19)$$

Άρα ο μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{at}u(t)$, $a < 0$, είναι

$$x(t) = e^{at}u(t), \quad a < 0 \iff X(\omega) = \frac{1}{j\omega - a} \quad (20)$$

2.3 Μετασχ. Fourier και Σήματα Ισχύος

Όμως, εμείς επειδή είμαστε περίεργοι :-), θέλουμε να μπορούμε να βρίσκουμε τον μετασχ. Fourier και για σήματα ισχύος, όχι μόνο ενέργειας. Ας προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τον ορισμό του μετασχ. Fourier σε ένα σήμα ισχύος όπως το $x(t) = \cos(\omega_0 t)$.

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(-j(\omega - \omega_0))} e^{-j(\omega - \omega_0)t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2} \frac{1}{(-j(\omega + \omega_0))} e^{-j(\omega + \omega_0)t} \Big|_{-\infty}^{\infty} \end{aligned} \quad (21)$$

Για να μπορέσουμε να συνεχίσουμε από δω και πέρα, και να υπολογίσουμε τις τιμές των ολοκληρωμάτων, πρέπει να θέσουμε περιορισμούς στα $\omega - \omega_0$, $\omega + \omega_0$, ώστε τα ολοκληρώματα να μην αποκλίνουν στο $\pm\infty$. Συγκεκριμένα, πρέπει να θεωρήσουμε ότι $\omega - \omega_0 > 0 \Leftrightarrow \omega > \omega_0$ για το πρώτο ολοκλήρωμα και $\omega + \omega_0 > 0 \Leftrightarrow \omega > -\omega_0$ για το δεύτερο ολοκλήρωμα, όταν $t = \infty$. Αντίστροφα για όταν $t = -\infty$. Αυτό όμως δεν επιτρέπεται! Ο μετασχ. Fourier πρέπει να ορίζεται για κάθε τιμή του ω ! Άρα ο ορισμός αποτυγχάνει. Τι κάνουμε τότε; Τότε μπαίνει στο παιχνίδι η περίφημη *συνάρτηση Δέλτα*, $\delta(t)$. Αυτή η συνάρτηση είναι περίεργο πράγμα, μαθηματικοειδές από τα λίγα! :-). Η συνάρτηση Δέλτα δεν είναι ακριβώς συνάρτηση αλλά κατανομή, ή αλλιώς γενικευμένη συνάρτηση, οπότε δε συμπεριφέρεται όπως οι γνωστές μας συναρτήσεις. Η συνάρτηση Δέλτα ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0 \quad (22)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (23)$$

Αυτές σημαίνουν ότι μπορείτε να φανταστείτε τη συνάρτηση Δέλτα σαν ένα πολύ πολύ λεπτό τετραγωνικό παλμό,

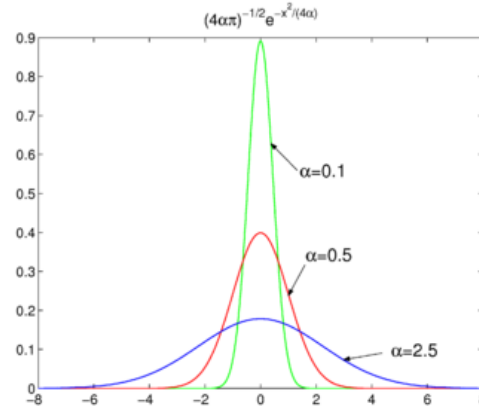
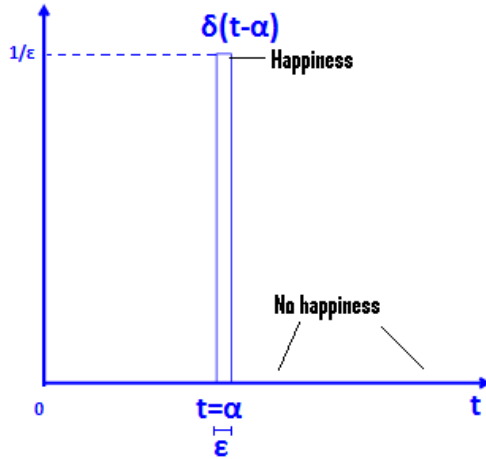
$$\frac{1}{\epsilon} \text{rect}\left(\frac{t}{\epsilon}\right) \quad (24)$$

όπου το ϵ , δηλ. το εύρος του παλμού, τείνει στο 0, οπότε το πλάτος του παλμού, $\frac{1}{\epsilon}$ τείνει στο άπειρο. Δείτε το σχήμα 4α'. Ο συνδυασμός αυτών των δυο κρατάει όμως το συνολικό εμβαδόν της συνάρτησης Δέλτα σταθερό και ίσο με τη μονάδα, όπως μας λέει η σχέση 23. Πολύ διαισθητική αυτή η περιγραφή όμως, μόνο για τους σκοπούς του μαθήματος! :-). Ο τετραγωνικός παλμός δεν είναι η μόνη "φυσιολογική" συνάρτηση που προσεγγίζει τη συνάρτηση Δέλτα. Υπάρχουν κι άλλες, για παράδειγμα η συνάρτηση

$$x(t) = \frac{1}{4a\pi} e^{-\frac{t^2}{4a}} \quad (25)$$

η οποία φαίνεται στο σχήμα 4β' και στο οποίο βλέπετε ότι όσο $a \rightarrow 0$, τόσο η συνάρτηση προσεγγίζει τη συνάρτηση Δέλτα. Επίσης, και η γνωστή μας συνάρτηση *sinc*, που φαίνεται στο σχήμα 3β', μπορεί να προσεγγίζει πολύ καλά τη συνάρτηση Δέλτα. Γενικά, όποια συνάρτηση ικανοποιεί τις σχέσεις 23 και 22, τότε είναι και αυτή μια συνάρτηση Δέλτα! :-). Επειδή, όπως βλέπετε, η γενικότερη συμπεριφορά των γενικευμένων συναρτήσεων είναι έξω από τους σκοπούς των σημειώσεων και του μαθήματος, μας αρκεί να χρησιμοποιούμε μόνο τις ιδιότητές της. Επίσης, η συνάρτηση Δέλτα χρησιμοποιείται όποτε θέλουμε να ορίσουμε συναρτήσεις που έχουν τιμή ΜΟΝΟ σε σημεία, και παντού αλλού είναι μηδέν. Για παράδειγμα, το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 2, & t = 0, \\ -1, & t = 2, \\ 3, & t = 5 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (26)$$



(α') Προσέγγιση $\delta(t)$ από τετραγωνικό παλμό (β') Προσέγγιση $\delta(t)$ από Γκαουσιανή συνάρτηση

Σχήμα 4: Προσεγγίσεις της συνάρτησης Δέλτα

μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = 2\delta(t) - \delta(t - 2) + 3\delta(t - 5) \quad (27)$$

Με χρήση του μετασχ. Fourier της συνάρτησης Δέλτα, ο οποίος είναι

$$\delta(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} \quad (28)$$

μπορούμε να βρούμε το μετασχηματισμό Fourier της παραπάνω συνάρτησης, και ο οποίος είναι

$$X(\omega) = 2 - e^{-j2\omega} + 3e^{-j5\omega} \quad (29)$$

Επανερχόμενοι στο παράδειγμά μας με το $x(t) = \cos(\omega_0 t)$, ο μετασχ. Fourier του θα είναι

$$X(\omega) = F\left\{\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}\right\} + F\left\{\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\right\} = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0) \quad (30)$$

Υπάρχουν χαρακτηριστικές ιδιότητες της στη βιβλιογραφία, που μας διευκολύνουν πολύ στη χρήση της. Οι σημαντικότερες από αυτές είναι οι παρακάτω:

$$x(t - t_0) * \delta(t - t_1) = x(t - t_0 - t_1) \quad (31)$$

$$x(t - t_0)\delta(t - t_1) = x(t_1 - t_0)\delta(t - t_1) \quad (32)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = x(0) \quad (33)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0) \quad (34)$$

όπου * δηλώνει την πράξη της συνέλιξης.

Επίσης, υπάρχουν άλλες τεχνικές για τον υπολογισμό του μετασχ. Fourier σημάτων ισχύος. Για παράδειγμα, ένα σήμα ισχύος $\hat{x}(t)$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα της μέσης τιμής του και ενός σήματος που έχει μηδενική μέση τιμή, δηλ.

$$\hat{x}(t) = x_0 + x_z(t) \quad (35)$$

όπου x_0 είναι η μέση τιμή του σήματος και $x_z(t)$ το τμήμα του σήματος με τη μηδενική μέση τιμή. Προφανώς, ο μετασχ. Fourier του θα είναι:

$$\hat{X}(\omega) = 2\pi x_0\delta(\omega) + F\{x_z(t)\} \quad (36)$$

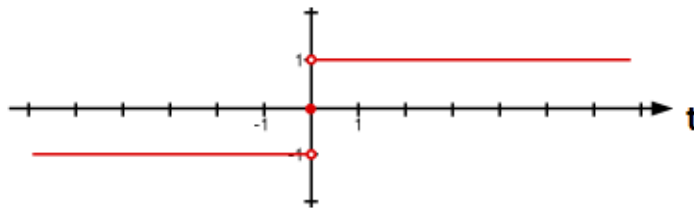
Αρκεί να βρούμε το μετασχ. Fourier του $x_z(t)$. Για παράδειγμα, η γνωστή βηματική συνάρτηση $x(t) = u(t)$ δεν έχει μηδενική μέση τιμή. Μπορεί όμως να γραφεί όπως παραπάνω ως:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) \quad (37)$$

όπου $\operatorname{sgn}(t)$ είναι η συνάρτηση προσήμου

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ -1, & t < 0, \end{cases} \quad (38)$$

Η συνάρτηση προσήμου φαίνεται στο σχήμα 5. Προφανώς $x_z(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)$ και $x_0 = \frac{1}{2}$. Αρκεί να βρούμε



Σχήμα 5: Σήμα προσήμου $\operatorname{sgn}(t)$

το μετασχ. Fourier της συνάρτησης προσήμου. Αν χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της παραγώγισης για το μετασχ. Fourier, η οποία υπενθυμίζεται ότι είναι η

$$F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = j\omega X(\omega) \quad (39)$$

θα έχουμε ότι:

$$X_z(\omega) = \frac{1}{j\omega} F\left\{\frac{dx_z(t)}{dt}\right\} = \frac{1}{j\omega} F\{2\delta(t)\} \longleftrightarrow X_z(\omega) = \frac{2}{j\omega} \quad (40)$$

Οπότε τελικά η βηματική συνάρτηση έχει μετασχ. Fourier

$$\hat{X}(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (41)$$

Φυσικά η παραπάνω ανάλυση για τα σήματα ισχύος έχει νόημα όταν η μέση τιμή του σήματος είναι ΜΗ μηδενική. Για παράδειγμα, το σήμα ισχύος

$$x(t) = e^{2t}u(t) \quad (42)$$

ΔΕΝ έχει μέση τιμή, καθώς αυξάνει στο ∞ όσο $t \rightarrow \infty$. Ένα καλό κριτήριο – αλλά όχι και αναγκαίο – για την ύπαρξη του μετασχ. Fourier ενός σήματος ισχύος είναι το να είναι φραγμένο, δηλ.

$$|x(t)| < M, \quad M < \infty \quad (43)$$

όπως για παράδειγμα τα

$$x(t) = \cos(t), \quad y(t) = \sin(t), \quad z(t) = u(t), \quad w(t) = \operatorname{sgn}(t) \quad (44)$$

και άλλα που ικανοποιούν τη σχέση 43.

Το φοβερό της υπόθεσης είναι ότι παρ' όλα τα "κόλπα" που μπορούμε να εφαρμόσουμε για να βρούμε το μετασχ. Fourier σημάτων ισχύος, αυτός μπορεί να ΜΗΝ υπάρξει! :-P Δεν είναι σίγουρο δηλαδή ότι ένα σήμα ισχύος έχει σώνει και καλά μετασχ. Fourier, όσες τεχνικές κι αν χρησιμοποιήσουμε (βέβαια τέτοια σήματα συνήθως έχουν ελάχιστο πρακτικό ενδιαφέρον και δε μας απασχολούν). Οπότε τίθεται το πρόβλημα του τι μπορούμε να κάνουμε για να μελετήσουμε το συχνοτικό περιεχόμενο τέτοιων σημάτων. Η απάντηση είναι ότι μελετούμε το μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης του σήματος, αλλά δε θα επεκταθούμε περισσότερο...

Στην αρχή του κεφαλαίου, ορίσαμε διαισθητικά το μετασχ. Fourier ως μια γενίκευση των σειρών Fourier, όταν η περίοδος έτεινε στο ∞ . Είδαμε τότε ότι οι φασματικές γραμμές έρχονταν όλο και πιο κοντά, με αποτέλεσμα να μην έχουμε τελικά ένα διακριτό φάσμα X_k αλλά ένα συνεχές φάσμα $X(\omega)$. Είμαι σίγουρος :-P ότι πολλοί έχετε αναρωτηθεί αν μπορούμε να πάμε αντίστροφα! Δηλ. αν μπορούμε να "αραιώσουμε" τις φασματικές γραμμές, και να επιστρέψουμε από το μετασχ. Fourier στις σειρές Fourier. Η απάντηση είναι ένα μεγάλο ΝΑΙ! :-) Μόνο που δεν "αραιώνουμε" τις φασματικές γραμμές, αλλά διαλέγουμε από το συνεχές φάσμα αυτές τις γραμμές που ανταποκρίνονται στη σειρά Fourier! Πώς; Απλά παίρνοντας τιμές της $X(\omega)$ ανά διαστήματα $2\pi k/T_0$, όπου T_0 η περίοδος του περιοδικού σήματος!!! :-) Με λίγα μαθηματικά,

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(\omega) \Big|_{\omega = \frac{2\pi k}{T_0}} \quad (45)$$

Έτσι λοιπόν, έχουμε άλλο ένα εργαλείο υπολογισμού των σειρών Fourier, μέσω του μετασχηματισμού. Υπολογίζουμε το μετασχ. Fourier ΜΙΑΣ περιόδου του σήματος, και μετά τον δειγματοληπτούμε ανά ακέραια πολλαπλάσια του $\frac{2\pi}{T_0}$, δηλ. του ω_0 ! :-) Ένα πολύ ενδιαφέρον στοιχείο είναι ότι, όπως βλέπετε, το T_0 μπορεί να είναι ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ περίοδος! Με άλλα λόγια, μπορούμε από το φάσμα του μετασχ. Fourier, να βρούμε τους συντελεστές Fourier για οποιαδήποτε περίοδο του αντίστοιχου περιοδικού σήματος! Αυτό που συμβαίνει είναι ότι απλά δειγματοληπτούμε σε διαφορετικές αποστάσεις το φάσμα του μετασχηματισμού Fourier! :-)

Τέλος, ένα σημαντικό, όσο και αξιοθαύμαστο, στοιχείο που αξίζει να αναφερθεί είναι το εξής: τόσο στις σειρές Fourier, όσο και στο μετασχ. Fourier, ένα οποιοδήποτε σήμα $x(t)$ αναπαρίσταται (ή αλλιώς, μπορεί να συντεθεί) από μιγαδικά εκθετικά, που στην περίπτωση των πραγματικών σημάτων είναι συνημίτονα (είδαμε ότι ο μετασχ. Fourier σχετίζεται στενά με τις σειρές Fourier). Ως γνωστόν, τα συνημίτονα έχουν άπειρη διάρκεια. Σκεφτείτε το λίγο: ένα μη περιοδικό σήμα που είναι, για παράδειγμα, μη μηδενικό σε ένα διάστημα $[a, b]$ και μηδέν παντού αλλού, μπορεί να αναπαρασταθεί ΑΚΡΙΒΩΣ ως ένα άθροισμα άπειρων σε διάρκεια συνημιτόνων! Το φάσμα $X(\omega)$ περιέχει άπειρα μιγαδικά εκθετικά (ή συνημίτονα) που ξεκινούν από το $-\infty$ και διαρκούν για πάντα. Τα πλάτη και οι φάσεις αυτών των συνιστωσών είναι τέτοια ώστε όταν τα προσθέσουμε, παίρνουμε ΑΚΡΙΒΩΣ το σήμα $x(t)$ στο διάστημα $[a, b]$, ενώ έξω από αυτό, οι συνιστώσες αυτές αθροίζονται στο μηδέν!!!! Αν "παίζαμε" με πλάτη και φάσεις άπειρου αριθμού συνημιτόνων για να πετύχουμε μια τόσο τέλεια, ακριβής, και λεπτή ισορροπία μεταξύ τους ώστε να ανακατασκευάζουμε ακριβώς το σήμα μας, θα ήταν αφάνταστα δύσκολο – πιθανώς αδύνατο – να τα καταφέρουμε! Κι όμως, ο μετασχ. Fourier (όπως και οι σειρές Fourier) το πετυχαίνει με μεγάλη ευκολία, χωρίς πολλή σκέψη από μέρους μας. Μερικές φορές, μας απορροφούν τόσο τα μαθηματικά που ξεχνάμε να προσέξουμε μερικές τέτοιες, όμορφες, και θαυμαστές λεπτομέρειες...

2.4 Ιδιότητες και ζεύγη μετασχ. Fourier

Υπάρχουν πολλές ιδιότητες του μετασχ. Fourier που σας βοηθούν να παραλείψετε τον ορισμό. Πρέπει να τις γνωρίζετε καλά και να μπορείτε να τις χρησιμοποιείτε με ευχέρεια. Στον πίνακα 1 απεικονίζονται οι περισσότερες.

Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(\omega)$
	$y(t)$	$Y(\omega)$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(\omega) + BY(\omega)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X(\omega)e^{-j\omega t_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X(-\omega)^*$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Στάθμιση	$x(at)$	$\frac{1}{ a }X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Συνέλιξη	$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$	$X(\omega)Y(\omega)$
Δυσικότητα	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
Πολλαπλασιασμός	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(\omega) * Y(\omega)$
Παραγωγήιση	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(\omega)$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$\frac{X(\omega)}{j\omega} + X(0)\pi\delta(\omega)$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X(\omega) = X(-\omega)^*, \\ \Re\{X(\omega)\} = \Re\{X(-\omega)\}, \\ \Im\{X(\omega)\} = -\Im\{X(-\omega)\}, \\ X(\omega) = X(-\omega) , \\ \angle X(\omega) = -\angle X(-\omega) \end{cases}$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = Ev\{x(t)\}, x(t)$ πραγματικό	$\Re\{X(\omega)\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = Od\{x(t)\}, x(t)$ πραγματικό	$j\Im\{X(\omega)\}$
Θεώρημα του Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) ^2 d\omega$

Πίνακας 1: Πίνακας Ιδιοτήτων του μετασχ. Fourier

Επίσης, ο πίνακας 2 δείχνει μερικά γνωστά ζεύγη μετασχηματισμών που μπορείτε να χρησιμοποιείτε χωρίς απόδειξη.

3 Συστήματα στο χώρο της συχνότητας

Γνωρίζετε ότι η σχέση που συνδέει την είσοδο, $x(t)$, με την έξοδο, $y(t)$, ενός συστήματος, $h(t)$, εκφράζεται μέσω της συνέλιξης:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (46)$$

Όμως ένα από τα σημαντικότερα πορίσματα της Ανάλυσης Fourier είναι ότι η συνέλιξη στο χρόνο γίνεται πολλαπλασιασμός στη συχνότητα, και το αντίστροφο. Άρα η ίδια σχέση που περιγράφει το σύστημα μπορεί να γραφεί και ως:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \quad (47)$$

Ο μετασχ. Fourier του συστήματος $h(t)$ λέγεται, στην ορολογία των συστημάτων, *απόκριση συχνότητας*. Ένα σύστημα $h(t)$ με απόκριση σε συχνότητα $H(\omega)$ ίσως μπορεί να υπολογιστεί πιο εύκολα στο χώρο των

Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμού Fourier	
Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(\omega - k\omega_0)$
$e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}\delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega + \omega_0)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$Arect\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$
$Atri\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$e^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$
$e^{at}u(-t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a - j\omega}$
$te^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$
$-te^{at}u(-t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a - j\omega)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}u(-t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a - j\omega)^n}$

Πίνακας 2: Πίνακας ζευγών μετασχ. Fourier

συχνοτήτων απ' ότι στο χώρο του χρόνου. Πώς; Προφανώς από τη σχέση

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (48)$$

Βλέπετε ότι, εν γένει, η απόκριση σε συχνότητα είναι μια ρητή συνάρτηση της συχνότητας ω . Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} \quad (49)$$

όπου $N(\omega), D(\omega)$ ο αριθμητής και ο παρονομαστής, αντίστοιχα, της απόκρισης σε συχνότητα $H(\omega)$, με όποιες απλοποιήσεις μπορεί να γίνουν στο κλάσμα. Αποδεικνύεται ότι μια τέτοια ρητή συνάρτηση μπορεί να αναλυθεί σε μικρότερα κλάσματα μέσα από μια απλή διαδικασία που λέγεται “Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα”, και περιγράφεται αναλυτικά λίγο παρακάτω. Εν συντομία, το Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα λέει ότι μια τέτοια ρητή συνάρτηση, εν γένει, μπορεί να γραφεί ως

$$H(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} = \sum_{k=1}^M \frac{A_k}{\alpha_k + j\omega} + \sum_{k=1}^L \frac{B_k}{\beta_k - j\omega} \quad (50)$$

Σύμφωνα με τον πίνακα με τα ζεύγη Fourier (Πίνακας 2), μπορούμε, έχοντας την Ανάλυση σε Μερικά Κλάσματα, να βρούμε την $h(t)$, ως

$$H(\omega) = \sum_{k=1}^M \frac{A_k}{\alpha_k + j\omega} + \sum_{k=1}^L \frac{B_k}{\beta_k - j\omega} \longleftrightarrow h(t) = \sum_{k=1}^M A_k e^{-\alpha_k t} u(t) + \sum_{k=1}^L B_k e^{\beta_k t} u(-t) \quad (51)$$

Φυσικά η διαδικασία αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί και το $x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$, αφού και το $X(\omega)$ εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση:

$$X(\omega) = \frac{Y(\omega)}{H(\omega)} \quad (52)$$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα πάνω σε αυτά.

Παράδειγμα 1:

Έστω το σύστημα

$$h(t) = e^{-3t} u(t) \quad (53)$$

Στην είσοδό του παρουσιάζεται το σήμα

$$x(t) = 2e^{-t} u(t) + e^{-2t} u(t) \quad (54)$$

Βρείτε την έξοδο του συστήματος $y(t)$.

Λύση:

Αυτό που θα μπορούσαμε να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τη συνέλιξη της εισόδου με το σύστημα, με τον κλασικό τρόπο του ολοκληρώματος. Όμως, αν μεταφερθούμε στο πεδίο της συχνότητας, συμβουλευόμενοι τον πίνακα 2, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} y(t) = x(t) * h(t) \longleftrightarrow Y(\omega) &= X(\omega)H(\omega) = \left(\frac{2}{1+j\omega} + \frac{1}{2+j\omega} \right) \frac{1}{3+j\omega} \\ &= \frac{2}{(1+j\omega)(3+j\omega)} + \frac{1}{(2+j\omega)(3+j\omega)} \\ &= \frac{A}{1+j\omega} + \frac{B}{3+j\omega} + \frac{C}{2+j\omega} + \frac{D}{3+j\omega} \longleftrightarrow \\ y(t) &= Ae^{-t}u(t) + (B+D)e^{-3t}u(t) + Ce^{-2t}u(t) \end{aligned} \quad (55)$$

με

$$A = \frac{2}{(1+j\omega)(3+j\omega)}(1+j\omega) \Big|_{j\omega=-1} = \frac{2}{(3+j\omega)} \Big|_{j\omega=-1} = 1 \quad (56)$$

$$B = \frac{2}{(1+j\omega)(3+j\omega)}(3+j\omega) \Big|_{j\omega=-3} = \frac{2}{(1+j\omega)} \Big|_{j\omega=-3} = -1 \quad (57)$$

$$C = \frac{1}{(2+j\omega)(3+j\omega)}(2+j\omega) \Big|_{j\omega=-2} = \frac{1}{(3+j\omega)} \Big|_{j\omega=-2} = 1 \quad (58)$$

$$D = \frac{1}{(2+j\omega)(3+j\omega)}(3+j\omega) \Big|_{j\omega=-3} = \frac{1}{(2+j\omega)} \Big|_{j\omega=-3} = -1 \quad (59)$$

και άρα

$$y(t) = e^{-t}u(t) - 2e^{-3t}u(t) + e^{-2t}u(t) \quad (60)$$

Ας υπολογίσουμε το ίδιο με εφαρμογή του ορισμού της συνέλιξης (χωρίς γραφική λύση, μια και δεν είναι

απαραίτητο). Έτσι, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (2e^{-\tau}u(\tau) + e^{-2\tau}u(\tau))e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-\tau}u(\tau)e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau}u(\tau)e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \\
 &\left(\text{ισχύει ότι } u(\tau)u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \right) \\
 &= \int_0^t 2e^{-\tau}e^{-3(t-\tau)}d\tau + \int_0^t e^{-2\tau}e^{-3(t-\tau)}d\tau \\
 &= \int_0^t 2e^{-\tau-3(t-\tau)}d\tau + \int_0^t e^{-2\tau-3(t-\tau)}d\tau \\
 &= \int_0^t 2e^{2\tau-3t}d\tau + \int_0^t e^{\tau-3t}d\tau \\
 &= 2e^{-3t} \int_0^t e^{2\tau}d\tau + e^{-3t} \int_0^t e^{\tau}d\tau \\
 &= e^{-3t}e^{2\tau} \Big|_0^t + e^{-3t}e^{\tau} \Big|_0^t \\
 &= e^{-3t}(e^{2t} - 1) + e^{-3t}(e^t - 1) \\
 &= e^{-t} - e^{-3t} + e^{-2t} - e^{-3t} \\
 &= e^{-t} - 2e^{-3t} + e^{-2t}, \quad 0 < t \\
 &= e^{-t}u(t) - 2e^{-3t}u(t) + e^{-2t}u(t)
 \end{aligned} \tag{61}$$

που είναι η ίδια ακριβώς σχέση με την 60! :-) Διαλέξτε τι προτιμάτε. :-)

Επίσης, με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να βρούμε την είσοδο $x(t)$, αν μας δίνεται το σύστημα και η έξοδος του. Δείτε:

Παράδειγμα 2:

Έστω ένα σύστημα με απόκριση συχνότητας

$$H(\omega) = \frac{1}{3 + j\omega} \tag{62}$$

Στην είσοδό του, βρίσκεται ένα σήμα $x(t)$, το οποίο δίνει έξοδο

$$y(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) \tag{63}$$

Βρείτε την είσοδο, $x(t)$.

Λύση:

Με παρόμοιο τρόπο έχουμε

$$y(t) \longleftrightarrow Y(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} - \frac{1}{2 + j\omega} \tag{64}$$

Προφανώς ισχύει

$$\begin{aligned}
 Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) &\iff X(\omega) = \frac{Y(\omega)}{H(\omega)} = \frac{\frac{1}{1+j\omega} - \frac{1}{2+j\omega}}{\frac{1}{3+j\omega}} \\
 &= \frac{1}{\frac{(2+j\omega)(1+j\omega)}{3+j\omega}} \\
 &= \frac{3+j\omega}{(2+j\omega)(1+j\omega)} \\
 &= \frac{A}{2+j\omega} + \frac{B}{1+j\omega} \iff \\
 x(t) &= Ae^{-2t}u(t) + Be^{-t}u(t) \tag{65}
 \end{aligned}$$

με

$$A = \frac{3+j\omega}{(2+j\omega)(1+j\omega)}(2+j\omega)\Big|_{j\omega=-2} = \frac{3+j\omega}{(1+j\omega)}\Big|_{j\omega=-2} = -1 \tag{66}$$

$$B = \frac{3+j\omega}{(2+j\omega)(1+j\omega)}(1+j\omega)\Big|_{j\omega=-1} = \frac{3+j\omega}{(2+j\omega)}\Big|_{j\omega=-1} = 2 \tag{67}$$

και άρα τελικά η είσοδος θα είναι

$$x(t) = -e^{-2t}u(t) + 2e^{-t}u(t) \tag{68}$$

Μερικές παρατηρήσεις...

1. Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε το σύστημα $h(t)$ αν μας δίνεται η είσοδος και η έξοδος, $x(t), y(t)$, αντίστοιχα. Κάντε το! :-)
2. Για τον υπολογισμό των σταθερών A, B, C, D παραπάνω, δείτε την επόμενη παράγραφο αυτών των σημειώσεων.
3. Φυσικά για τον υπολογισμό της εξόδου ενός συστήματος μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης, αν σας βολεύει. Το πώς θα καταλαβαίνετε ποιός τρόπος είναι πιο εύκολος ή σύντομος, απαιτεί εμπειρία και τριβή σε ασκήσεις. Πολλές φορές μάλιστα δεν είναι εμφανές με το μάτι κάτι τέτοιο, και αναγκαστικά δουλεύετε όπως νομίζετε εσείς, μέχρι να επιβεβαιωθείτε ή να διαψευστείτε. :-)

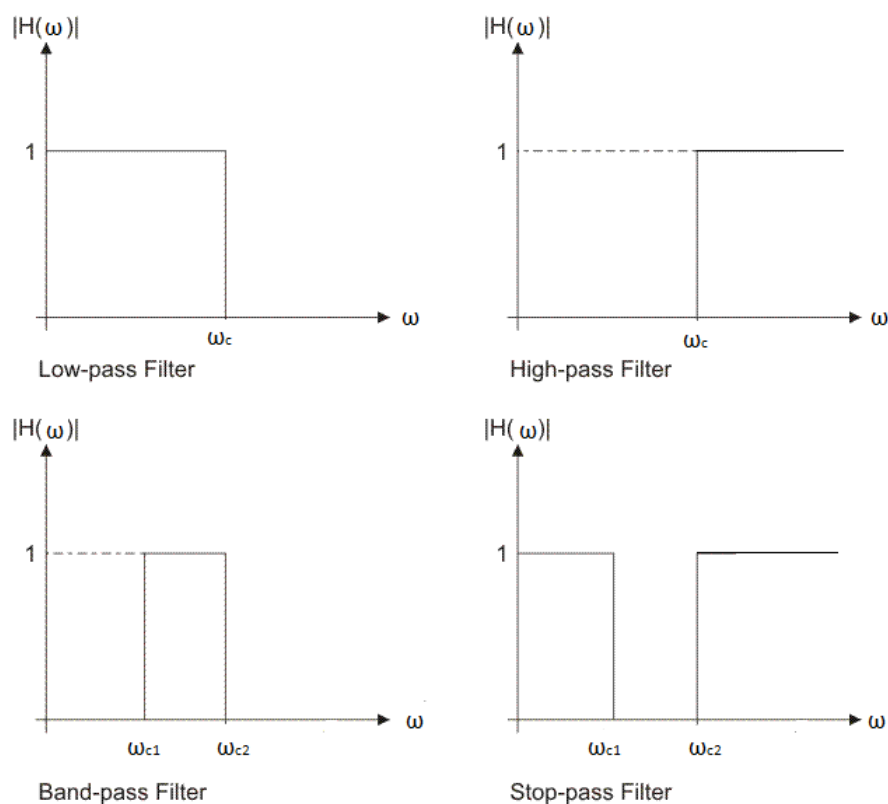
3.1 Φίλτρα

Κάποια συστήματα εκτελούν συγκεκριμένες λειτουργίες, οι οποίες είναι πολύ συνήθεις και πολύ χρήσιμες στην πράξη. Αυτές οι λειτουργίες περιλαμβάνουν την αποκοπή συγκεκριμένων συχνοτήτων του σήματος εισόδου και τη διέλευση κάποιων άλλων, και/ή την ενίσχυση των συχνοτήτων του σήματος εισόδου που διέρχονται ελεύθερα του συστήματος. Λόγω αυτής της λειτουργίας τους, αυτά τα συστήματα ονομάζονται “φίλτρα”. Ο λόγος, προφανής: όπως το φίλτρο (του καφέ π.χ.) δεσμεύει τον καφέ σε στέρεα μορφή και επιτρέπει τη διέλευση του υγρού καφέ, έτσι και αυτά τα φίλτρα, επιτρέπουν τη διέλευση ορισμένων συχνοτήτων ενώ δεσμεύουν (καταστέλλουν, μηδενίζουν το πλάτος τους δηλαδή) κάποιες άλλες.

Υπάρχουν τέσσερα βασικά είδη φίλτρων:

1. Το βαθυπερατό (lowpass) φίλτρο: επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από τη μηδενική συχνότητα ως μια συγκεκριμένη, που λέγεται *συχνότητα αποκοπής*, ω_c .
2. Το υψιπερατό (highpass) φίλτρο: επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από μια συγκεκριμένη, που λέγεται *συχνότητα αποκοπής*, ω_c , ως το $+\infty$.

3. Το ζωνοπερατό (bandpass) φίλτρο: επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από μια συγκεκριμένη ω_{c1} , ως μια άλλη συγκεκριμένη συχνότητα, ω_{c2} . Συνήθως αυτή η ζώνη συχνοτήτων είναι μικρή.
4. Το ζωνοαπαγορευτικό (bandstop) φίλτρο: απαγορεύει τη διέλευση συχνοτήτων από μια συγκεκριμένη ω_{c1} , ως μια άλλη συγκεκριμένη συχνότητα, ω_{c2} . Συνήθως αυτή η ζώνη συχνοτήτων είναι μικρή. Το ζωνοαπαγορευτικό φίλτρο είναι κάπως σαν το “αντίθετο” του ζωνοπερατού. :-)

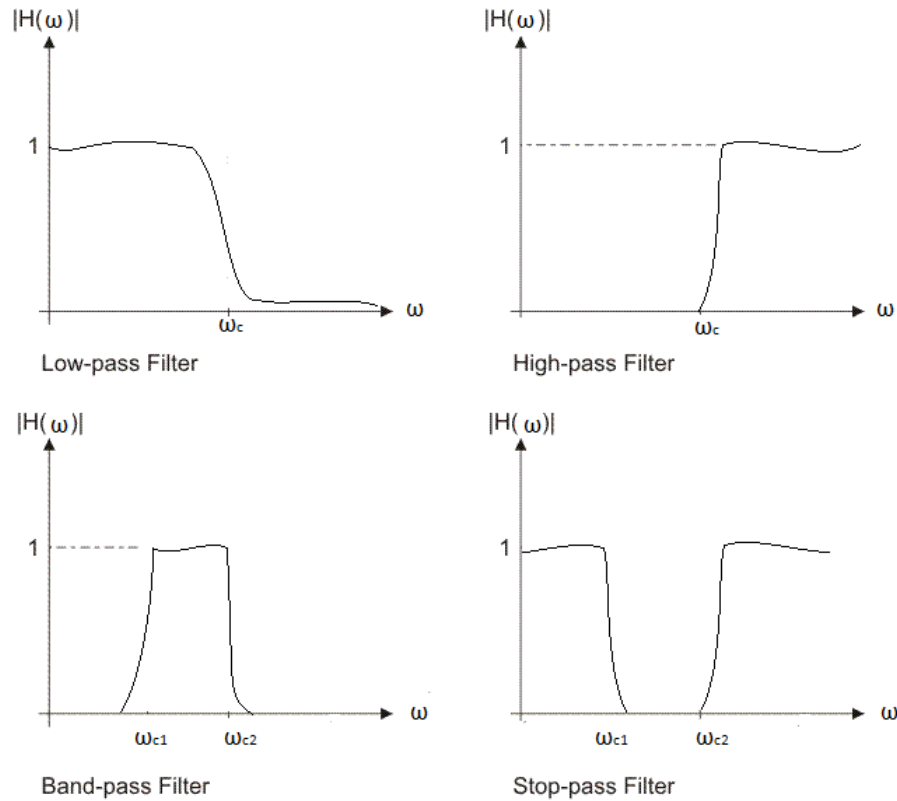


Σχήμα 6: Ιδανικά Φίλτρα

Τα φίλτρα αυτά φαίνονται σχηματικά στην εικόνα 6, μόνο για τις θετικές συχνότητες. Συμμετρικά είναι τα σχήματα και για τις αρνητικές, αφού μιλάμε για πραγματικά σήματα. Τα φίλτρα αυτά λέγονται *ιδανικά*, γιατί ορίζονται μόνο θεωρητικά, δηλ. δεν μπορούμε να τα κατασκευάσουμε στην πράξη έτσι όπως φαίνονται στην εικόνα. Μπορούμε να τα προσεγγίσουμε αρκετά καλά, με φίλτρα όπως αυτά της εικόνας 7. Προς το παρόν και σε αυτό το μάθημα, μας ενδιαφέρουν μόνο τα ιδανικά φίλτρα, για τα οποία μπορούμε να έχουμε μια εύκολη μαθηματική αναπαράστασή τους. Για παράδειγμα, το χαμηλοπερατό φίλτρο μπορεί να αναπαρασταθεί μαθηματικά ως:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (69)$$

Η Σχεδίαση Φίλτρων είναι ένας ολόκληρος τομέας της Επεξεργασίας Σήματος από μόνος του, οπότε δε θα επεκταθούμε περισσότερο εδώ.



Σχήμα 7: Πραγματοποιησιμα Φίλτρα

4 Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα

Σε αυτήν την παράγραφο, θα δούμε μερικά πράγματα σχετικά με την Ανάλυση σε Μερικά Κλάσματα (Partial Fraction Expansion - PFE), που μας είναι χρήσιμη στους μετασχ. Fourier και αργότερα στο μετασχ. Laplace, αλλά και στη μελέτη σημάτων και συστημάτων γενικότερα. Όπως λέει και το όνομά της, η PFE διασπά μια ρητή συνάρτηση, με συνήθως υψηλής τάξης πολυώνυμα στον αριθμητή και στον παρονομαστή, σε απλά κλάσματα, με πολυώνυμα μικρής τάξης (1 ή 2) στον παρονομαστή.

Η μέθοδος που ακολουθούμε για την PFE είναι πολύ απλή, και απλά χρειάζεται τριβή για να τη συνηθίσετε. Υπάρχουν δυο συνήθεις περιπτώσεις PFE που συναντάμε στην Επεξεργ. Σήματος σχετικά με τη ρητή συνάρτηση που θέλουμε να απλουστεύσουμε.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η PFE εφαρμόζεται MONON όταν η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή είναι γνήσια μικρότερη της τάξης του πολυωνύμου του παρονομαστή. Αν δεν ισχύει αυτό, τότε πρέπει να κάνουμε πρώτα διαίρεση πολυωνύμων αριθμητή και παρονομαστή, ώστε να καταλήξουμε σε περίπτωση που μπορούμε να εφαρμόσουμε PFE.

Διακρίνουμε λοιπόν τις περιπτώσεις:

1. Ο παρονομαστής έχει απλές ρίζες
2. Ο παρονομαστής έχει μια ή περισσότερες ρίζες πολλαπλότητας r

4.1 Απλές ρίζες

Θεωρούμε πρώτα την πιο απλή περίπτωση, όπου η συνάρτησή μας

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (70)$$

έχει απλές ρίζες στον παρονομαστή της, $Q(x)$. Θεωρήστε το ακόλουθο παράδειγμα:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}{x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}, \quad m < n \\ &= \frac{P(x)}{(x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_n)} \end{aligned} \quad (71)$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$F(x) = \frac{k_1}{x - \rho_1} + \frac{k_2}{x - \rho_2} + \dots + \frac{k_n}{x - \rho_n} \quad (72)$$

Για να βρούμε τον συντελεστή k_i , πολλαπλασιάζουμε και τις δυο πλευρές της παραπάνω σχέσης με $(x - \rho_1)$, και έπειτα θέτουμε $x = \rho_1$. Άρα

$$(x - \rho_1)F(x) \Big|_{x=\rho_1} = \left[k_1 + \frac{k_2(x - \rho_1)}{x - \rho_2} + \frac{k_3(x - \rho_1)}{x - \rho_3} + \dots + \frac{k_n(x - \rho_1)}{x - \rho_n} \right] \Big|_{x=\rho_1} \quad (73)$$

Όλοι οι όροι στη δεξιά πλευρά απαλείφονται, εκτός του k_1 . Άρα καταλήγουμε στο

$$k_1 = (x - \rho_1)F(x) \Big|_{x=\rho_1} \quad (74)$$

Παρόμοια, καταλήγουμε ότι

$$k_i = (x - \rho_i)F(x) \Big|_{x=\rho_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (75)$$

Η παραπάνω διαδικασία δουλεύει ανεξάρτητα αν οι ρίζες είναι πραγματικές ή μιγαδικές.

4.2 Ρίζες πολλαπλότητας r

Αν η συνάρτηση $F(x)$ έχει πολλαπλή ρίζα, με πολλαπλότητα r , στον παρονομαστή, τότε θα είναι της μορφής

$$F(x) = \frac{P(x)}{(x - \lambda)^r (x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3) \dots (x - \rho_j)} \quad (76)$$

Το Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα για αυτή τη συνάρτηση δίνεται ως

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{d_0}{(x - \lambda)^r} + \frac{d_1}{(x - \lambda)^{r-1}} + \dots + \frac{d_{r-1}}{(x - \lambda)} \\ &+ \frac{k_1}{x - \rho_1} + \frac{k_2}{x - \rho_2} + \dots + \frac{k_j}{x - \rho_j} \end{aligned} \quad (77)$$

Οι συντελεστές k_i αντιστοιχούν στις ρίζες χωρίς πολλαπλότητα και υπολογίζονται όπως περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Για να βρούμε τους συντελεστές d_0, \dots, d_{r-1} , πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη με $(x - \lambda)^r$:

$$\begin{aligned} (x - \lambda)^r F(x) &= d_0 + d_1(x - \lambda) + d_2(x - \lambda)^2 + \dots + d_{r-1}(x - \lambda)^{r-1} + \\ &+ k_1 \frac{(x - \lambda)^r}{x - \rho_1} + k_2 \frac{(x - \lambda)^r}{x - \rho_2} + \dots + k_n \frac{(x - \lambda)^r}{x - \rho_n} \end{aligned} \quad (78)$$

Θέτοντας $x = \lambda$ και στα δυο μέλη, έχουμε

$$(x - \lambda)^r F(x) \Big|_{x=\lambda} = d_0 \quad (79)$$

Άρα το d_0 υπολογίζεται “κρύβοντας” τον όρο $(x - \lambda)^r$ στην $F(x)$, και θέτοντας $x = \lambda$ στη σχέση που απομένει. Αν παραγωγίσουμε τη σχέση 78 ως προς x , το δεξιό μέλος καταλήγει στο $d_1 +$ όροι που περιέχουν το $(x - \lambda)$ στους αριθμητές. Θέτοντας $x = \lambda$ και στα δυο μέλη, έχουμε

$$\frac{d}{dx} [(x - \lambda)^r F(x)] \Big|_{x=\lambda} = d_1 \quad (80)$$

Άρα, το d_1 υπολογίζεται “κρύβοντας” τον όρο $(x - \lambda)^r$ από τον όρο $F(x)$, παραγωγίζοντας την υπόλοιπη έκφραση ως προς x και μετά θέτοντας $x = \lambda$. Συνεχίζοντας κατ’ αυτόν τον τρόπο, έχουμε ότι

$$d_j = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dx^j} [(x - \lambda)^r F(x)] \Big|_{x=\lambda} \quad (81)$$

Άρα ο συντελεστής d_j υπολογίζεται “κρύβοντας” τον όρο $(x - \lambda)^r$ στο $F(x)$, υπολογίζοντας μετά την j -οστή παράγωγο την έκφρασης που απομένει, διαιρώντας με $j!$, και τέλος θέτοντας $x = \lambda$.

5 Όμως...

Χμ. Πολύ καλά ως τώρα. :-) Έχουμε λύσει το πρόβλημα της μη περιοδικότητας, αφού όπως είχαμε πει όταν μελετούσαμε τις σειρές Fourier, ένα από τα προβλήματά μας ήταν ότι τα σήματα που υπάρχουν στη φύση ή που μπορούμε να παράξουμε στο εργαστήριο είναι μη περιοδικά, και άρα οι σειρές Fourier δεν επαρκούσαν. Με την εισαγωγή του μετασχ. Fourier, λύσαμε αυτό το πρόβλημα. Όμως μας παρουσιάστηκε ένα νέο πρόβλημα, αυτό της μη ύπαρξης του μετασχ. Fourier για ορισμένα σήματα ισχύος. Τέτοια σήματα μπορεί να αντιπροσωπεύουν συστήματα ή και εισόδους σε συστήματα, και καλό θα ήταν να βρούμε έναν τρόπο να τα χειριζόμαστε. Αυτό θα μας το προσφέρει ο μετασχ. Laplace, που θα δούμε πολύ σύντομα.