Σήματα και Ανάλυση Fourier - Ασκήσεις

Επιμέλεια: Γιώργος Π. Καφεντζής
Υποψ. Διδάκτωρ Τμήμ. Η/Υ
Πανεπιστήμιο Κρήτης

12 Απριλίου 2013

1. **Να σχεδιάσετε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του σήματος**

$$\mathbf{x(t) = 2 + \cos(2\pi t) - \sin(\pi t) - 3\cos(3\pi t)}$$

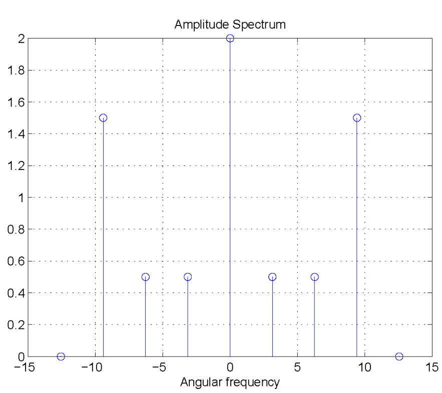
Λύση:
Θα χρειαστούμε τις ταυτότητες:

$$\sin(\theta) = \cos(\theta - \pi/2), \tag{1}$$
$$-\sin(\theta) = \cos(\theta + \pi/2), \tag{2}$$
$$\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta). \tag{3}$$

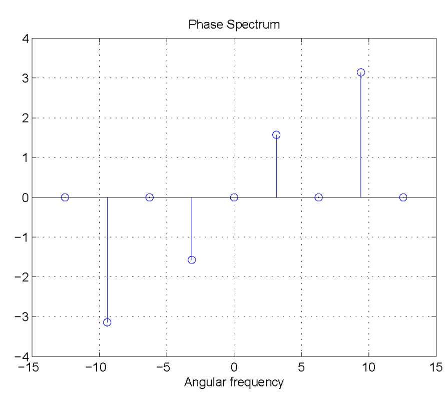
Θα μετατρέψουμε τα sin σε cos και θα φροντίσουμε τα πρόσημα να είναι όλα θετικά, εισάγοντας όπου χρειάζεται την κατάλληλη φάση. Είναι:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 + \cos(2\pi t) - \sin(\pi t) - 3\cos(3\pi t) \\ &= 2 + \cos(2\pi t) + \cos(\pi t + \pi/2) + 3\cos(3\pi t + \pi) \\ &= 2 + \frac{1}{2}e^{j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{j\pi t}e^{j\pi/2} + \\ &+ \frac{1}{2}e^{-j\pi t}e^{-j\pi/2} + \frac{3}{2}e^{j3\pi t}e^{j\pi} + \frac{3}{2}e^{-j3\pi t}e^{-j\pi}. \end{aligned} \tag{4}$$

Το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης φαίνονται στα παρακάτω σχήματα 1α′ και 1β′ αντίστοιχα.



(α′) Φάσμα πλάτους 2.1



(β′) Φάσμα φάσης 2.1

Σχήμα 1: Φάσμα πλάτους και φάσης Άσκησης 2.1

2. **Έστω το σήμα**

$$\mathbf{x(t) = \sin^2(5\pi t)\cos(22\pi t)}$$

Βρείτε την περίοδο $\mathbf{T_0}$ του σήματος και υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\mathbf{T_0}} \mathbf{x^2(t)dt}$$

Λύση:
Για να βρούμε την περίοδο, θα πρέπει να γράψουμε το $x(t)$ ως άθροισμα ημιτόνων ή/και συνημιτόνων. Είναι:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sin^2(5\pi t)\cos(22\pi t) = \Big(\frac{1}{2j}e^{j5\pi t} - \frac{1}{2j}e^{-j5\pi t}\Big)^2\Big(\frac{1}{2}e^{j22\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j22\pi t}\Big) \\
&= \Big(\frac{1}{4j^2}e^{j10\pi t} - 2\frac{1}{2j}\frac{1}{2j}e^{j5\pi t}e^{-j5\pi t} + \frac{1}{4j^2}e^{-j10\pi t}\Big)\Big(\frac{1}{2}e^{j22\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j22\pi t}\Big) \\
&= \Big(-\frac{1}{4}e^{j10\pi t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-j10\pi t}\Big)\Big(\frac{1}{2}e^{j22\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j22\pi t}\Big) \\
&= -\frac{1}{8}e^{j32\pi t} - \frac{1}{8}e^{-j12\pi t} + \frac{1}{4}e^{j22\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j22\pi t} - \frac{1}{8}e^{-j32\pi t} - \frac{1}{8}e^{j12\pi t} \\
&= -\frac{1}{4}\cos(12\pi t) + \frac{1}{2}\cos(22\pi t) - \frac{1}{4}\cos(32\pi t) \\
&= -\frac{1}{4}\cos(2\pi 6t) + \frac{1}{2}\cos(2\pi 11t) - \frac{1}{4}\cos(2\pi 16t) \\
&= \frac{1}{4}\cos(2\pi 6t + \pi) + \frac{1}{2}\cos(2\pi 11t) + \frac{1}{4}\cos(2\pi 16t + \pi) \qquad (5)
\end{aligned}$$

Ένας διαφορετικός τρόπος λύσης θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\sin^2(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta)$$

και

$$\cos(\theta)\cos(\omega) = \frac{1}{2}\cos(\theta+\omega) + \frac{1}{2}\cos(\theta-\omega)$$

Τότε θα είναι:

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(10\pi t)\Big)\cos(22\pi t) &= \frac{1}{2}\cos(22\pi t) - \frac{1}{2}\cos(22\pi t)\cos(10\pi t) \\
&= \frac{1}{2}\cos(22\pi t) + \frac{1}{4}\cos(32\pi t + \pi) + \frac{1}{4}\cos(12\pi t + \pi)
\end{aligned}$$

Προφανώς, η θεμελιώδης συχνότητα θα είναι: $\omega_0 = \text{ΜΚΔ}(12\pi, 22\pi, 32\pi) = 2\pi$. Άρα $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1$ sec.

Τώρα, το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι δύσκολο να υπολογιστεί κατευθείαν στο πεδίο του χρόνου. Όμως η σχέση του Parseval μας λέει ότι:

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x^2(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = A_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(A_k)^2}{2}$$

όπου X_k οι συντελεστές του δίπλευρου αναπτύγματος (σχέση 1) και A_k οι συντελεστές του μονόπλευρου αναπτύγματος (σχέση 2). Επιλέξτε όποιο σας βολεύει.

Άρα θα είναι:

$$\int_0^{T_0} x^2(t)dt = T_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = 4\Big| -\frac{1}{8}\Big|^2 + 2\Big| -\frac{1}{4}\Big|^2 = \frac{4}{64} + \frac{2}{16} = \frac{12}{64} = \frac{3}{16} \tag{6}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και με τον τύπο

$$T_0\Big(A_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(A_k)^2}{2}\Big) = 2\left(\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{2}\right) + \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}\right) = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16} \tag{7}$$

που είναι και το ζητούμενο.

3. **Αναπτύξτε σε Σειρά Fourier το περιοδικό, με περίοδο $\mathbf{T_0}$, σήμα:**

$$\mathbf{x(t)} = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \frac{T_0}{2} \\ 2 - 2\frac{t}{T_0}, & \frac{T_0}{2} \le t < T_0 \end{cases}$$

Σας δίνεται ότι:

$$\int \mathbf{t e^{\alpha t} dt} = \frac{\mathbf{e^{\alpha t}}}{\alpha}(\mathbf{t} - \frac{\mathbf{1}}{\alpha})$$

Λύση:
Θα αναπτύξουμε το σήμα κατά την εκθετική σειρά Fourier. Γνωρίζουμε ότι:

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt \text{ και } X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

Είναι χρήσιμο να θυμόμαστε ότι $f_0 T_0 = 1$, $e^{\pm j2\pi k} = 1$, και $e^{-j\pi k} = -1$. Θα είναι λοιπόν:

$$\begin{aligned}
X_0 &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\Big(\int_0^{\frac{T_0}{2}} 1dt + \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} \Big(2 - \frac{2}{T_0}t\Big)dt\Big) \\
&= \frac{1}{T_0}t\Big|_0^{\frac{T_0}{2}} + \frac{1}{T_0}2t\Big|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} - \frac{1}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} \frac{2}{T_0}tdt \\
&= \frac{1}{T_0}\Big(\frac{T_0}{2} - 0\Big) + \frac{2}{T_0}\Big(T_0 - \frac{T_0}{2}\Big) - \frac{1}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} \frac{2}{T_0}tdt \\
&= \frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{T_0^2}\Big(\frac{t^2}{2}\Big)\Big|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{2}{T_0^2}\Big(\frac{T_0^2}{2} - \frac{T_0^2}{8}\Big) \\
&= \frac{3}{2} - 2\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\Big) = \frac{3}{2} - 2\frac{3}{8} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Longleftrightarrow X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{3}{4}
\end{aligned} \tag{8}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\Big(\int_0^{T_0} 1e^{-jk\omega_0 t}dt + \int_0^{T_0}(2-\frac{2}{T_0}t)e^{-jk\omega_0 t}dt\Big)\\
&= \frac{1}{T_0}\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0}\Bigg|_0^{\frac{T_0}{2}} + \frac{1}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} 2e^{-jk\omega_0 t}dt - \frac{2}{T_0^2}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} te^{-jk\omega_0 t}dt\\
&= \frac{1}{-j2\pi k}(e^{-j\pi k}-1) + \frac{2}{T_0}\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0}\Bigg|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} - \frac{2}{T_0^2}\Big(\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0}\Big(t-\frac{1}{-jk\omega_0}\Big)\Bigg|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0}\Big)\\
&= \frac{1}{-j2\pi k}(e^{-j\pi k}-1) + \frac{2}{T_0}\Big(\frac{e^{-j2\pi k}}{-jk\omega_0} - \frac{e^{-j\pi k}}{-jk\omega_0}\Big) - \frac{2}{T_0^2}\Big(\frac{e^{-j2\pi k}}{-jk\omega_0}\Big(T_0 - \frac{1}{-jk\omega_0}\Big) - \\
&- \frac{e^{-j\pi k}}{-jk\omega_0}\Big(\frac{T_0}{2} - \frac{1}{-jk\omega_0}\Big)\Big)\\
&= \frac{1}{-j2\pi k}(e^{-j\pi k}-1) + \frac{2}{-j2\pi k} - \frac{2e^{-j\pi k}}{-j2\pi k} - \frac{2}{-j2\pi k} - \frac{2}{T_0^2(-jk\omega_0)(jk\omega_0)} + \frac{e^{-j\pi k}}{-j2\pi k} + \\
&+ \frac{2e^{-j\pi k}}{T_0^2(-jk\omega_0)(jk\omega_0)}\\
&= \frac{1}{-j2\pi k}(e^{-j\pi k}-1) + \frac{2}{-j2\pi k} - \frac{2e^{-j\pi k}}{-j2\pi k} - \frac{2}{-j2\pi k} - \frac{1}{2\pi^2k^2} + \frac{e^{-j\pi k}}{-j2\pi k} + \frac{e^{-j\pi k}}{2\pi^2k^2}\\
&= -\frac{e^{-j\pi k}}{j2\pi k} + \frac{1}{j2\pi k} + 2\frac{e^{-j\pi k}}{j2\pi k} - \frac{1}{2\pi^2k^2} - \frac{e^{-j\pi k}}{j2\pi k} + \frac{e^{-j\pi k}}{2\pi^2k^2}\\
&= \frac{1}{j2\pi k} - \frac{1}{2\pi^2k^2}(1-e^{-j\pi k})\\
&= \frac{1}{2\pi k}e^{-j\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2\pi^2k^2}(1-e^{-j\pi k}). \qquad (9)
\end{aligned}$$

Οπότε τελικά οι συντελεστές Fourier είναι οι:

$$X_0 = \frac{3}{4} \text{ και } X_k = \frac{1}{2\pi k}e^{-j\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2\pi^2k^2}(1-e^{-j\pi k}).$$

Μπορούμε να γράψουμε τώρα ότι:

$$\begin{aligned}
x(t) &= X_0 + \sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{+\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{+\infty}\Big(\frac{1}{2\pi k}e^{-j\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2\pi^2k^2}(1-e^{-j\pi k})\Big)e^{jk\omega_0 t}\\
&= \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi k}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{jk\omega_0 t} - \sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi^2k^2}(1-e^{-j\pi k})e^{jk\omega_0 t}\\
&= \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi k}e^{j(k\omega_0 t-\frac{\pi}{2})} - \sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi^2k^2}(1-e^{-j\pi k})e^{jk\omega_0 t}. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $(1-e^{-j\pi k}) = 1-(-1)^k$, άρα:

$$(1-e^{-j\pi k}) = \begin{cases} 2, & \text{k odd} \\ 0, & \text{k even}\end{cases}$$

Άρα θα είναι:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi k} e^{j(k\omega_0 t - \frac{\pi}{2})} - \sum_{\text{k odd}}^{+\infty} \frac{1}{2\pi^2 k^2} 2 e^{jk\omega_0 t} \\
&= \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi k} e^{j(k\omega_0 t - \frac{\pi}{2})} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{2\pi^2 (2k-1)^2} e^{j(2k-1)\omega_0 t} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Αν θέλουμε να προχωρήσουμε ακόμα λίγο και να αναπτύξουμε το σήμα μας σε μονόπλευρη σειρά Fourier τότε θα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi k} e^{j(k\omega_0 t - \frac{\pi}{2})} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{2\pi^2 (2k-1)^2} e^{j(2k-1)\omega_0 t} \\
&= \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{2\pi k} \cos(k\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{2\pi^2 (2k-1)^2} \cos((2k-1)\omega_0 t) \\
&= \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi k} \sin(k\omega_0 t) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos((2k-1)\omega_0 t) \qquad (12)
\end{aligned}
$$

γιατί ξέρουμε ότι για τους συντελεστές του μονόπλευρου αναπτύγματος σε σειρά Fourier ισχύει ότι:

$$A_k = 2|X_k|$$

4. **Έστω ένα πραγματικό, περιττό και περιοδικό σήμα $\mathbf{x(t)}$, που αναπτύσσεται σε σειρά Fourier με συντελεστές $\mathbf{X_k}$. Δείξτε ότι**

$$\mathbf{X_k = -X_{-k}}$$

Λύση:
Το σήμα μας είναι περιττό, άρα θα ισχύει $x(t) = -x(-t)$. Είναι:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} -x(-t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Θέτω $u = -t \Rightarrow du = -dt$. Επίσης, $u_1 = 0, u_2 = -T_0$.

Άρα θα είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{-T_0} x(u) e^{jk\omega_0 u} du = -\frac{1}{T_0} \int_{-T_0}^{0} x(u) e^{-j2\pi(-k) f_0 u} du = -X_{-k} \qquad (13)$$

που είναι και το ζητούμενο.

5. **Δίδονται τρια πραγματικά, περιοδικά σήματα με μικρό αριθμό αρμονικών. Οι μη μηδενικοί συντελεστές για $\mathbf{k > 0}$ δίδονται ακολούθως:**
α) $\mathbf{x_1(t) : T_0 = 1, X_1 = 5, X_3 = 2}$.
β) $\mathbf{x_2(t) : T_0 = 2, X_1 = j, X_2 = -j\frac{1}{2}, X_3 = j\frac{1}{4}, X_4 = -j\frac{1}{8}}$.
Βρείτε τα $\mathbf{x_i(t)}$.

Λύση:
Αφού τα σήματα είναι πραγματικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν συντελεστές X_k και για $k < 0$, και για αυτούς θα ισχύει ότι $X_{-k} = X_k^*$.
α) Είναι

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= X_{-3}e^{j2\pi(-3)\frac{1}{T_0}t} + X_{-1}e^{j2\pi(-1)\frac{1}{T_0}t} + X_1e^{j2\pi(+1)\frac{1}{T_0}t} + X_3e^{j2\pi(+3)\frac{1}{T_0}t} \\
&= X_3^*e^{-j2\pi 3\frac{1}{T_0}t} + X_1^*e^{-j2\pi\frac{1}{T_0}t} + X_1e^{j2\pi\frac{1}{T_0}t} + X_3e^{j2\pi 3\frac{1}{T_0}t} \\
&= 2e^{-j2\pi 3\frac{1}{T_0}t} + 5e^{-j2\pi\frac{1}{T_0}t} + 5e^{j2\pi\frac{1}{T_0}t} + 2e^{j2\pi 3\frac{1}{T_0}t} \\
&= 2e^{-j6\pi t} + 5e^{-j2\pi t} + 5e^{j2\pi t} + 2e^{j6\pi t} \\
&= 2(e^{-j6\pi t} + e^{j6\pi t}) + 5(e^{-j2\pi t} + e^{j2\pi t}) \\
&= 4\cos(6\pi t) + 10\cos(2\pi t). \qquad (14)
\end{aligned}$$

β) Είναι

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= X_{-4}e^{j2\pi(-4)\frac{1}{T_0}t} + X_{-3}e^{j2\pi(-3)\frac{1}{T_0}t} + \cdots + X_3e^{j2\pi(+3)\frac{1}{T_0}t} + X_4e^{j2\pi(+4)\frac{1}{T_0}t} \\
&= X_4^*e^{-j2\pi 4\frac{1}{T_0}t} + X_3^*e^{-j2\pi 3\frac{1}{T_0}t} + \cdots + X_3e^{j2\pi 3\frac{1}{T_0}t} + X_4e^{j2\pi 4\frac{1}{T_0}t} \\
&= j\frac{1}{8}e^{-j2\pi 4\frac{1}{2}t} - j\frac{1}{4}e^{-j2\pi 3\frac{1}{2}t} + j\frac{1}{2}e^{-j2\pi 2\frac{1}{2}t} + \cdots - j\frac{1}{2}e^{j2\pi 2\frac{1}{2}t} + j\frac{1}{4}e^{j2\pi 3\frac{1}{2}t} - j\frac{1}{8}e^{j2\pi 4\frac{1}{2}t} \\
&= j\frac{1}{8}e^{-j4\pi t} - j\frac{1}{4}e^{-j3\pi t} + j\frac{1}{2}e^{-j2\pi t} - je^{-j\pi t} + je^{j\pi t} - j\frac{1}{2}e^{j2\pi t} + j\frac{1}{4}e^{j3\pi t} - j\frac{1}{8}e^{j4\pi t} \\
&= j\frac{1}{8}(e^{-j4\pi t} - e^{j4\pi t}) - j\frac{1}{4}(e^{-j3\pi t} - e^{j3\pi t}) + j\frac{1}{2}(e^{-j2\pi t} - e^{j2\pi t}) - j(e^{-j\pi t} - je^{j\pi t}) \\
&= -j\frac{1}{8}2j\sin(4\pi t) + j\frac{1}{4}2j\sin(3\pi t) - j\frac{1}{2}2j\sin(2\pi t) + j2j\sin(\pi t) \\
&= \frac{1}{4}\sin(4\pi t) - \frac{1}{2}\sin(3\pi t) + \sin(2\pi t) - 2\sin(\pi t) \qquad (15)
\end{aligned}$$

που είναι και τα ζητούμενα.

6. **Αναπτύξτε σε Σειρά Fourier το περιοδικό, με περίοδο $\mathbf{T_0}$, σήμα:**

$$\mathbf{x(t)} = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & 0 \le t < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} \le t < T_0 \end{cases}$$

Λύση:
Θα αναπτύξουμε το σήμα κατά την εκθετική σειρά Fourier. Γνωρίζουμε ότι:

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt \text{ και}$$
$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

Θα είναι λοιπόν:

$$
\begin{aligned}
X_0 &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-\alpha t}dt \\
&= \frac{1}{T_0}\frac{1}{-\alpha}e^{-\alpha t}\Big|_0^{\frac{T_0}{2}} \\
&= \frac{1}{T_0}\frac{1}{-\alpha}(e^{-\alpha\frac{T_0}{2}}-1) \\
\Longleftrightarrow \quad & X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{\alpha T_0}(1-e^{-\alpha\frac{T_0}{2}}) \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Επίσης,

$$
\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-\alpha t}e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-\alpha t - jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-(\alpha+jk\omega_0)t}dt = \frac{1}{T_0}\frac{1}{-(\alpha+jk\omega_0)}e^{-(\alpha+jk\omega_0)t}\Big|_0^{\frac{T_0}{2}} \\
&= \frac{1}{T_0}\frac{1}{-(\alpha+jk\omega_0)}\left(e^{-(\alpha+jk\omega_0)\frac{T_0}{2}}-1\right) \\
&= -\frac{1}{T_0}\frac{1}{(\alpha+jk\omega_0)}\left(e^{-(\alpha\frac{T_0}{2}+j\pi k)}-1\right) \\
&= -\frac{1}{T_0}\frac{1}{(\alpha+jk\omega_0)}(e^{-\alpha\frac{T_0}{2}}e^{-j\pi k}-1) = \frac{1}{(\alpha T_0+j2\pi k)}(1-e^{-\alpha\frac{T_0}{2}}e^{-j\pi k}) \qquad (17)
\end{aligned}
$$

Όμως ξέρουμε ότι: $e^{-j\pi k} = \cos\pi k - j\sin\pi k = (-1)^k$, γιατί για κάθε k ακέραιο, το $\cos\pi k$ είναι είτε 1 για άρτια k, είτε -1 για περιττά k, ενώ το $\sin\pi k$ είναι μηδέν για κάθε k.

Άρα μπορούμε να γράψουμε τελικά ότι:

$$X_k = \frac{1}{(\alpha T_0+j2\pi k)}\left(1-(-1)^k e^{-\alpha\frac{T_0}{2}}\right)$$

Οπότε τελικά οι συντελεστές Fourier είναι οι:

$$
\begin{aligned}
X_0 &= \frac{1}{\alpha T_0}\left(1-e^{-\alpha\frac{T_0}{2}}\right) \text{ και} \qquad (18) \\
X_k &= \frac{1}{(\alpha T_0+j2\pi k)}\left(1-(-1)^k e^{-\alpha\frac{T_0}{2}}\right) \qquad (19)
\end{aligned}
$$

Άρα το σήμα μας θα γράφεται ως:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\alpha T_0+j2\pi k)}\left(1-(-1)^k e^{-\alpha\frac{T_0}{2}}\right)e^{jk\omega_0 t} \qquad (20)$$

που είναι και το ζητούμενο.

7. **Ένα περιοδικό σήμα όταν αναπτυχθεί σε σειρά Fourier έχει συντελεστές**

$$\mathbf{A_{2k+1} = 2/3, 1/3, 1/3, 1/5, 2/25}$$

όπου $\mathbf{k = 0, 1, 2, \cdots}$ και τα $\mathbf{A_k}$ έχουν υπολογιστεί μέσω της σχέσης

$$\mathbf{A_k e^{j\phi_k} = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt}$$

Πόση συνολική ενέργεια έχει κατανεμηθεί από τη συχνότητα ω_0 έως και την $\mathbf{6\omega_0}$;

Λύση:
Βλέπουμε ότι τα A_k είναι τα A_1, A_3, A_5, A_7, A_9, δηλ. οι περιττοί συντελεστές που εμπλέκονται στο μονόπλευρο ανάπτυγμα σε σειρά Fourier. Θυμίζεται ότι το μονόπλευρο ανάπτυγμα προκύπτει από τη σχέση:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + \Re\Big\{\sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{j\phi_k} e^{jk\omega_0 t}\Big\} = A_0 + \Re\Big\{\sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{j(k\omega_0 t + \phi_k)}\Big\} \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k) \end{aligned} \tag{21}$$

Επίσης, έχει δειχθεί ότι ισχύει:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(k\omega_0 t + \phi_k) \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(k\omega_0 t + \phi_k) \end{aligned} \tag{22}$$

Άρα βλέπουμε ότι το A_k είναι οι συντελεστές του μονόπλευρου αναπτύγματος σε σειρά Fourier και σχετίζονται με τα X_k ως: $A_k = 2|X_k|$.

Προφανώς τα άρτια A_k είναι μηδέν στο παράδειγμά μας. Άρα καταλαβαίνουμε από όλα αυτά ότι στην πρώτη αρμονική συχνότητα, ω_0, υπάρχει πλάτος A_1, στην τρίτη αρμονική συχνότητα, $3\omega_0$, υπάρχει πλάτος A_3, στην πέμπτη αρμονική συχνότητα $5\omega_0$, υπάρχει πλάτος A_5, κ.ο.κ.
Το θεώρημα του Parseval μπορεί να μας δώσει τη συνολική ενέργεια που είναι κατανεμημένη από τη συχνότητα ω_0 (πρώτη αρμονική) ως τη συχνότητα $6\omega_0$ (έκτη αρμονική - που έχει $A_6 = 0$ στην περίπτωσή μας).
Άρα, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Parseval για μονόπλευρη σειρά Fourier, θα έχουμε:

$$E = A_0^2 + \sum_{k=1}^{6} \frac{A_k^2}{2} = \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_3^2}{2} + \frac{A_5^2}{2} = \frac{1}{3} \tag{23}$$

8. **Οι συντελεστές στο ανάπτυγμα σε σειρά Fourier ενός περιοδικού σήματος έχουν υπολογιστεί από τη σχέση**

$$\mathbf{A_k e^{j\phi_k} = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt} \tag{24}$$

και είναι οι παρακάτω για $\mathbf{k > 0}$

$$\mathbf{A_k e^{j\phi_k} = -\frac{A}{j2\pi k}[(-1)^k - 1]} \tag{25}$$

και $\mathbf{A_0 = 0}$. Βρείτε το σήμα σε ανάπτυγμα μονόπλευρης σειράς Fourier.

Λύση:
Ξέρουμε ότι η μονόπλευρη σειρά Fourier δίνεται από:

$$x(t) = A_0 + Re\{\sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{j\phi_k} e^{jk\omega_0 t}\} = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k) \tag{26}$$

Παρατηρούμε ότι το $A_k e^{j\phi_k}$ είναι μη μηδενικό και ίσο με $\frac{A}{jk\pi}$, για περιττά k, και $A_k e^{j\phi_k} = 0$ για άρτια k. Άρα το $A_k e^{j\phi_k}$ μπορεί να γραφεί ως:

$$A_k e^{j\phi_k} = \begin{cases} \frac{A}{j\pi k} = \frac{A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & \text{k odd} \\ 0, & \text{k even} \end{cases}$$

Άρα εύκολα συμπεραίνουμε ότι $A_k = \frac{A}{\pi k}$ και $\phi_k = -\frac{\pi}{2}$, για k περιττά.
Άρα θα είναι: $(A_0 = X_0 = 0)$

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{\text{k odd}}^{+\infty} \frac{A}{\pi k} \cos(k\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A}{\pi(2k+1)} \cos((2k+1)\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A}{\pi(2k+1)} \sin((2k+1)\omega_0 t) = \frac{A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\omega_0 t) \end{aligned} \tag{27}$$

Σημείωση: Αν δινόταν αρχικά ότι $X_k = -\frac{A}{4j\pi k}[(-1)^k - 1]$ (δηλ. οι συντελεστές του δίπλευρου αναπτύγματος), και ζητούσε το μονόπλευρο ανάπτυγμα, τότε πολύ απλά:

$$X_k = \frac{A}{2\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}, \tag{28}$$

για k περιττά, με τον ίδιο συλλογισμό με παραπάνω, και θα είχαμε:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{\text{k odd}}^{+\infty} 2|X_k| \cos(k\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) = \sum_{\text{k odd}}^{+\infty} 2\frac{A}{2\pi k} \sin(k\omega_0 t) \\ &= \sum_{\text{k odd}}^{+\infty} \frac{A}{\pi k} \sin(k\omega_0 t) = \frac{A}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\omega_0 t) \end{aligned} \tag{29}$$

το ίδιο δηλαδή αποτέλεσμα.

9. **Βρείτε την περίοδο του σήματος:**

$$\mathbf{x(t) = \sin^2(5\pi t + \phi_1) + \sin^2(2\pi t + \phi_2)}$$

Λύση:
Θα χρειαστεί να γράψουμε το σήμα μας ως άθροισμα απλών ημιτόνων ή/και συνημιτόνων, ώστε να

μπορούμε να αποφανθούμε για την περιοδικότητά του. Είναι:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sin^2(5\pi t+\phi_1)+\sin^2(2\pi t+\phi_2)\\
&= \Big(\frac{1}{2j}e^{j5\pi t}e^{j\phi_1}-\frac{1}{2j}e^{-j5\pi t}e^{-j\phi_1}\Big)^2+\Big(\frac{1}{2j}e^{j2\pi t}e^{j\phi_2}-\frac{1}{2j}e^{-j2\pi t}e^{-j\phi_2}\Big)^2\\
&= -\frac{1}{4}e^{j10\pi t}e^{j2\phi_1}-2\frac{1}{2j}\frac{1}{2j}-\frac{1}{4}e^{-j10\pi t}e^{-j2\phi_1}-\frac{1}{4}e^{j4\pi t}e^{j2\phi_2}-2\frac{1}{2j}\frac{1}{2j}-\frac{1}{4}e^{-j4\pi t}e^{-j2\phi_2}\\
&= -\frac{1}{4}(e^{j10\pi t}e^{j2\phi_1}+e^{-j10\pi t}e^{-j2\phi_1})-\frac{1}{4}(e^{j4\pi t}e^{j2\phi_2}+e^{-j4\pi t}e^{-j2\phi_2})+1\\
&= 1-\frac{1}{4}2\cos(10\pi t+2\phi_1)-\frac{1}{4}2\cos(4\pi t+2\phi_2)\\
&= 1-\frac{1}{2}\cos(10\pi t+2\phi_1)-\frac{1}{2}\cos(4\pi t+2\phi_2)\\
&= 1-\frac{1}{2}\cos(2\pi 5t+2\phi_1)-\frac{1}{2}\cos(2\pi 2t+2\phi_2) \qquad (30)
\end{aligned}$$

Άρα η θεμελιώδης συχνότητα του σήματος θα είναι $\omega_0 = \text{ΜΚΔ}\{10\pi, 4\pi\} = 2\pi$. Άρα $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1$ sec. Αλλιώς, θα μπορούσαμε να πούμε ότι $T_0 = \text{ΕΚΠ}\{\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\}$ $=\text{ΕΚΠ}\{0.2, 0.5\} = 1$ sec.

Σημείωση:

(α′) Αν μας ζητούσε να *δείξουμε* ότι το σήμα είναι περιοδικό, και μετά να υπολογίσουμε την περίοδό του, τότε θα έπρεπε (για να είμαστε απόλυτα σωστοί) να πούμε ότι:
$\frac{T1}{T2} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$, που είναι λόγος ακεραίων αριθμών, άρα το σήμα είναι περιοδικό. Έπειτα, θα υπολογίζαμε την περίοδο με όποιον τρόπο θέλαμε.
Ένα καλό αντιπαράδειγμα σχετικά με αυτή τη σημείωση, θα ήταν το

$$x(t) = 2+\cos(10\pi t+\phi_1)-\frac{1}{2}\cos(4t-\phi_2)$$

Τότε, θα ήταν $\frac{T1}{T2} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{\pi}} = \frac{\pi}{10}$, το οποίο προφανώς ΔΕΝ είναι λόγος ακεραίων αριθμών, άρα το σήμα ΔΕΝ είναι περιοδικό.

(β′) Εννοείται πως με τη διαδικασία που ακολουθήσαμε για να λύσουμε την άσκηση, μπορούμε αμέσως (έστω, με ελάχιστες πράξεις ακόμα :)) να απαντήσουμε σε ερωτήματα σχεδίασης φάσματος πλάτους και φάσης, όπως και ερωτήματα σχετικά με θεώρ. Parseval, κατανομής ενέργειας κλπ. Ό,τι χρειαζόμαστε για να απαντήσουμε σε αυτά υπάρχει έτοιμο στη λύση παραπάνω!

10. **Ένα περιοδικό σήμα $\mathbf{x(t)} = \mathbf{A}\cos(\omega_0 \mathbf{t})$ με περίοδο 5 sec θέλουμε να καθυστερήσει κατά 0.05 sec. Πόση θα είναι η φάση μετατόπισής του;**

Λύση:
Έστω $t_0 = 0.05sec$. Το καθυστερημένο κατά t_0 σήμα εκφράζεται ως:

$$x(t-t_0) = A\cos(\omega_0(t-t_0)) = A\cos(\omega_0 t-\omega_0 t_0) = A\cos(\omega_0 t+\phi)$$

Άρα

$$\phi = -\omega_0 t_0 = -2\pi\frac{1}{T_0}t_0 = -2\pi\frac{1}{5}0.05 = -0.02\pi \qquad (31)$$

Προφανώς, αν θέλαμε να προηγείται κατά $t_0 = 0.05sec$, θα είχαμε $\phi = 0.02\pi$, με παρόμοιο συλλογισμό με παραπάνω (θα ζητούσαμε τότε το $x(t+t_0)$).

11. **Έστω το σήμα**

$$\mathbf{x(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k \cos(2(k+1)\pi t + \phi_k)}$$

Βρείτε την περίοδό του.

Λύση:
Βλέπουμε ότι για $k = 1, k = 2, k = 3 \cdots$, παίρνουμε αντίστοιχα συχνότητες $\omega_1 = 4\pi, \omega_2 = 6\pi, \omega_3 = 8\pi \cdots$. Προφανώς, όλες αυτές οι συχνότητες είναι πολλαπλάσια μιας θεμελιώδους, της $\omega_0 = 2\pi$. Άρα η περίοδος είναι $T_0 = \frac{2\pi}{f_0} = 1$. Προσέξτε, το γεγονός ότι δεν υπάρχει συνημίτονο με τέτοια συχνότητα στην παραπάνω αναπαράσταση, δε σημαίνει κάτι για την περίοδο του σήματος.

12. **Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το σήμα**

$$\mathbf{x(t) = \frac{\sin(2t) + \sin(3t)}{\sin(t)}}$$

α) Ποιά είναι η περίοδος του σήματος;
β) Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσμα φάσης του σήματος.

Λύση:
Αναπτύσσουμε το σήμα μας σύμφωνα με τους τύπους του Euler:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\sin(2t) + \sin(3t)}{\sin(t)} = \frac{\frac{1}{2j}(e^{j2t} - e^{-j2t} + e^{j3t} - e^{-j3t})}{\frac{1}{2j}(e^{jt} - e^{-jt})} \\ &= \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})}(e^{j2t} - e^{-j2t} + e^{j3t} - e^{-j3t}) \end{aligned}$$

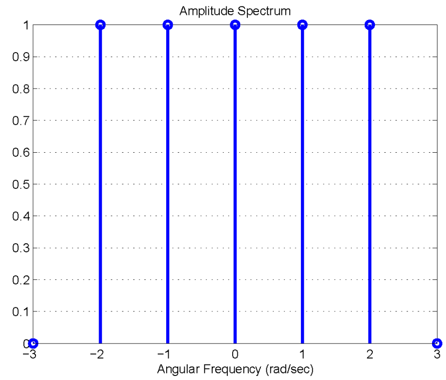
Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τις ταυτότητες:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), \tag{32}$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \tag{33}$$

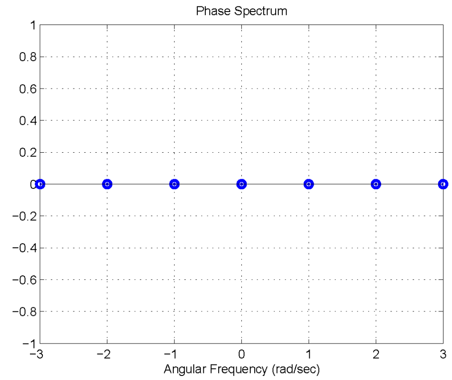
για τα εκθετικά του αριθμητή. Θα είναι λοιπόν:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})}(e^{j2t} - e^{-j2t} + e^{j3t} - e^{-j3t}) = \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})}[(e^{jt})^2 - (e^{-jt})^2 + (e^{jt})^3 - (e^{-jt})^3] \\ &= \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})}[(e^{jt} - e^{-jt})(e^{jt} + e^{-jt}) + (e^{jt} - e^{-jt})(e^{j2t} + 1 + e^{-j2t})] \\ &= \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})}(e^{jt} - e^{-jt})(e^{jt} + e^{-jt} + 1 + e^{j2t} + e^{-j2t}) = e^{jt} + e^{-jt} + 1 + e^{j2t} + e^{-j2t} \\ &= 1 + 2\cos(t) + 2\cos(2t) \end{aligned} \tag{34}$$

α) Η περίοδος του σήματος θα είναι $T_0 = \text{ΕΚΠ}\{2\pi, \pi\} = 2\pi$.
β) Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνονται στα σχήματα 2.



(α′) Φάσμα πλάτους 2.14



(β′) Φάσμα φάσης 2.14

Σχήμα 2: Φάσμα πλάτους και φάσης Άσκησης 2.14

13. **Ένα πραγματικό περιοδικό σήμα $\mathbf{x(t)}$ έχει αναπτυχθεί σε σειρά Fourier, και για τις συχνότητες $\mathbf{200\pi, 400\pi, 600\pi, 800\pi}$ rad/sec έχει αντίστοιχα μιγαδικά πλάτη:**

$$\mathbf{X_1 = e^{j\frac{\pi}{3}}, X_2 = 2e^{j\frac{\pi}{4}}, X_3 = 3e^{j\frac{\pi}{16}}, X_4 = 2e^{j\frac{\pi}{8}}}$$

Ένα δεύτερο πραγματικό σήμα $\mathbf{y(t)}$ έχει αναπτυχθεί σε σειρά Fourier και για τις συχνότητες $\mathbf{100\pi, 200\pi, 300\pi, 400\pi}$ rad/sec έχει αντίστοιχα μιγαδικά πλάτη:

$$\mathbf{Y_1 = 3e^{j\pi}, Y_2 = 2e^{j\frac{\pi}{3}}, Y_3 = e^{j\frac{\pi}{16}}, Y_4 = e^{j\frac{\pi}{4}}}$$

Άλλες συχνότητες δεν υπάρχουν στα σήματα.
Υπολογίστε τα:

$$\mathbf{\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} x^2(t)dt}$$

$$\mathbf{\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} y^2(t)dt}$$

$$\mathbf{\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} x(t)y(t)dt}$$

όπου $\mathbf{T_1, T_2}$ οι αντίστοιχες περίοδοι των $\mathbf{x(t), y(t)}$.

Λύση:
Πολύ χρήσιμο θα μας φανεί εδώ το θεώρημα του Parseval για ένα και δυο σήματα:
Για ένα σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0, ισχύει ότι:

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x^2(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \tag{35}$$

δηλαδή η ενέργεια ενός σήματος σε μια περίοδο προς την περίοδο αυτή, ισούται με το άθροισμα των απολύτων τιμών στο τετράγωνο των συντελεστών Fourier του δίπλευρου αναπτύγματος.
Για ένα σήμα $x(t)$ κι ένα σήμα $y(t)$, με *κοινή περίοδο* T_0, ισχύει ότι:

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)y^*(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^*$$

δηλαδή το παραπάνω ολοκλήρωμα ισούται με το άθροισμα των γινομένων των συντελεστών Fourier (με τον έναν εκ των δύο να είναι συζυγής) του δίπλευρου αναπτύγματος στις ΙΔΙΕΣ αρμονικές συχνότητες $k\omega_0$! Το τι ακριβώς σημαίνει αυτό, θα το δούμε σε λίγο.
Για το πρώτο ολοκλήρωμα θα είναι:

$$\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} x^2(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|X_k|^2 = |X_{-4}|^2+|X_{-3}|^2+|X_{-2}|^2+|X_{-1}|^2+|X_1|^2+|X_2|^2+|X_3|^2+|X_4|^2$$

Το σήμα μας όμως είναι πραγματικό, άρα ισχύει: $X_{-k} = X_k^*$. Άρα θα έχουμε:

$$\begin{aligned}|X_{-4}|^2 &+ |X_{-3}|^2+|X_{-2}|^2+|X_{-1}|^2+|X_1|^2+|X_2|^2+|X_3|^2+|X_4|^2\\ &= |X_4^*|^2+|X_3^*|^2+|X_2^*|^2+|X_1^*|^2+|X_1|^2+|X_2|^2+|X_3|^2+|X_4|^2\\ &= |2e^{-j\frac{\pi}{8}}|^2+|3e^{-j\frac{\pi}{16}}|^2+|2e^{-j\frac{\pi}{4}}|^2+|e^{-j\pi}|^2+|e^{j\pi}|^2+|2e^{j\frac{\pi}{4}}|^2+|3e^{j\frac{\pi}{16}}|^2+|2e^{j\frac{\pi}{8}}|^2\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι $|Ae^{j\phi}|^2 = |A|^2|e^{j\phi}|^2 = |A|^2$, γιατί είναι $|e^{j\phi}|^2 = |\cos(\phi)+j\sin(\phi)|^2 = \cos^2(\phi)+\sin^2(\phi) = 1$ (μέτρο μιγαδικού αριθμού στο τετράγωνο). Άρα τελικά θα έχουμε:

$$\begin{aligned}|2e^{-j\frac{\pi}{8}}|^2 &+ |3e^{-j\frac{\pi}{16}}|^2+|2e^{-j\frac{\pi}{4}}|^2+|e^{-j\pi}|^2+|e^{j\pi}|^2+|2e^{j\frac{\pi}{4}}|^2+|3e^{j\frac{\pi}{16}}|^2+|2e^{j\frac{\pi}{8}}|^2\\ &= |2|^2+|3|^2+|2|^2+|1|^2+|1|^2+|2|^2+|3|^2+|2|^2\\ &= 4+9+4+1+1+4+9+4 = 36 \qquad (36)\end{aligned}$$

Επαληθεύστε εσείς, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, ότι $\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} y^2(t)dt = 30$.

Για το τρίτο ολοκλήρωμα, πρέπει να προσέξουμε ιδιαίτερα. Όπως προαναφέρθηκε, μπορούμε να εκφράσουμε τον τύπο του Parseval, $\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} x(t)y(t)dt$, με λόγια: το ολοκλήρωμα σε μια *κοινή* περίοδο του γινομένου των δυο σημάτων στο χρόνο ισούται με το άθροισμα των γινομένων των συντελεστών Fourier (με τον έναν εκ των δύο να είναι συζυγής) του δίπλευρου αναπτύγματος στις ΙΔΙΕΣ αρμονικές συχνότητες $k\omega_0$.
Ας κάνουμε πρώτα σαφές το εξής (ΠΡΟΣΟΧΗ!): Δυο ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ πραγματικά περιοδικά σήματα με την *ίδια περίοδο* T_0 αναπτύσσονται το καθένα σε μια σειρά Fourier στις ΙΔΙΕΣ αρμονικές συχνότητες $k\omega_0$. Ας το δούμε μαθηματικά (μην τρομάζετε, ψυχραιμία!):
Ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0 (και άρα θεμελιώδη συχνότητα $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$) αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$$

Ένα δεύτερο περιοδικό σήμα $y(t)$ με την ΙΔΙΑ περίοδο T_0 (και άρα με την ΙΔΙΑ θεμελιώδη συχνότητα ω_0 που έχει και το $x(t)$) αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k e^{jk\omega_0 t}$$

Βλέπετε ότι αυτό που αλλάζει είναι τα μιγαδικά πλάτη των εκθετικών συνιστωσών $e^{jk\omega_0 t}$. Για το πρώτο σήμα, τα μιγαδικά πλάτη είναι X_k, για το δεύτερο σήμα είναι Y_k. Όμως οι εκθετικές συνιστώσες είναι οι ίδιες και στις δυο περιπτώσεις: $e^{jk\omega_0 t}$! Αυτό σημαίνει ότι ΚΑΙ ΤΑ ΔΥΟ ΣΗΜΑΤΑ αναλύονται στις ίδιες εκθετικές συνιστώσες, δηλ. στις ίδιες αρμονικές συχνότητες. Δείτε το κι αλλιώς: αυτό σημαίνει ότι στα δίπλευρα φάσματα πλάτους (και φάσης) ΚΑΙ ΤΩΝ ΔΥΟ ΣΗΜΑΤΩΝ, θα έχουμε μη

μηδενικές τιμές στις συχνότητες $k\omega_0$, δηλ. στις $\pm\omega_0$,$\pm 2\omega_0$,$\pm 3\omega_0$,$\pm 4\omega_0$ κλπ.
Αυτό συμβαίνει γιατί και τα δυο σήματα έχουν την ίδια περίοδο, άρα την ίδια θεμελιώδη συχνότητα $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, οπότε οι αρμονικές *συχνότητες* που προκύπτουν κατά τα αναπτύγματα σε σειρά Fourier είναι οι ίδιες και στα δυο αναπτύγματα!
Σε μια τέτοια περίπτωση, η εφαρμογή του τύπου του Parseval γίνεται κατευθείαν:

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)y^*(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^* = ... + X_{-4}Y_{-4}^* + X_{-3}Y_{-3}^* + ... + X_3 Y_3^* + X_4 Y_4^* + ...$$

αφού το X_1 αντιστοιχεί στη συχνότητα $1\omega_0$, όπως και το Y_1, το X_2 αντιστοιχεί στη συχνότητα $2\omega_0$, όπως και το Y_2, το X_3 αντιστοιχεί στη συχνότητα $3\omega_0$, όπως και το Y_3 κ.ο.κ. , το ίδιο και για τα $k < 0$.
(Αν κάπου το ''χάσατε'', ξαναδιαβάστε το! Είναι εύκολο, κι ας μην του φαίνεται :))

Έστω ότι έχουμε κατανοήσει το παραπάνω :). Προσπαθώντας να εφαρμόσουμε τον τύπο του Parseval για τα $x(t), y(t)$, βλέπουμε ότι αυτός ισχύει ΜΟΝΟ για σήματα που έχουν την ίδια περίοδο T_0 (ή αλλιώς, την ίδια θεμελιώδη συχνότητα ω_0). Στην περίπτωσή μας, το ένα σήμα ($x(t)$) έχει μιγαδικά πλάτη στις συχνότητες 200π, 400π, 600π, 800π rad/sec, και το άλλο σήμα ($y(t)$) έχει μιγαδικά πλάτη στις συχνότητες 100π, 200π, 300π, 400π rad/sec. Το να πούμε:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^* = X_{-4}Y_{-4}^* + X_{-3}Y_{-3}^* + ... + X_3 Y_3^* + X_4 Y_4^*$$

και μετά αντικαθιστώντας αμέσως τις τιμές από την εκφώνηση, θα ήταν ΛΑΘΟΣ! Γιατί; Γιατί τα X_k, Y_k δεν ανταποκρίνονται στις ίδιες αρμονικές συχνότητες! Για παράδειγμα, το X_1 είναι το μιγαδικό πλάτος που αντιστοιχεί στα 200π rad/sec, ενώ το Y_1 είναι το μιγαδικό πλάτος που αντιστοιχεί στα 100π rad/sec! Οπότε δεν ισχύει το άθροισμα γινομένων που γράψαμε μόλις πιο πάνω. Πρέπει να υπάρχει ''αντιστοιχία'' μεταξύ των πλατών, δηλ. να αναφέρονται στις ίδιες συχνότητες, άσχετα με τον δείκτη k που έχουν!
Άρα τελικά (ουφ!...) αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να πολλαπλασιάσουμε τα X_k, Y_k των ίδιων συχνοτήτων. Συγκεκριμένα:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^* = \underbrace{X_{-1}^* Y_{-2}} + \underbrace{X_{-2}^* Y_{-4}} + \underbrace{X_1 Y_2^*} + \underbrace{X_2 Y_4^*}$$

με το πρώτο άγκιστρο να δείχνει τα μιγαδικά πλάτη των -200π rad/sec, το δεύτερο των -400π rad/sec, το τρίτο των 200π rad/sec και το τέταρτο των 400π rad/sec.

Επειδή τα σήματα είναι πραγματικά, ισχύει $X_{-k} = X_k^*$, άρα θα είναι τελικά:

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^* &= X_1 Y_2^* + X_2 Y_4^* + X_1 Y_2^* + X_2 Y_4^* \\ &= e^{j\frac{\pi}{3}} 2e^{-j\frac{\pi}{3}} + 2e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j\frac{\pi}{4}} + e^{j\frac{\pi}{3}} 2e^{-j\frac{\pi}{3}} + 2e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \\ &= 2 + 2 + 2 + 2 = 8 \qquad (37)\end{aligned}$$

αποτέλεσμα λογικό, γιατί το ολοκλήρωμα δυο πραγματικών σημάτων δε γίνεται να μας δώσει μιγαδικό αποτέλεσμα. Αν περίσσευε κάποιο $e^{j\phi}$, τότε κάποιο λάθος θα είχαμε κάνει.

Σημείωση - για προχωρημένους :-) : Αυτό που κάναμε ``σιωπηρά'' παραπάνω είναι το εξής: Παρατηρούμε ότι το $x(t)$ έχει περίοδο $T_1 = \frac{1}{100} = 0.01sec$ και το $y(t)$ έχει περίοδο $T_2 = \frac{1}{50} = 0.02sec$, δηλ. $T_2 = 2T_1$. Οπότε μπορούμε να ``θεωρήσουμε'' (κάπως τεχνική προσέγγιση αυτή) ότι το $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $T_1 = 0.02sec$ και άρα θεμελιώδη συχνότητα $\omega_0 = 100\pi$ rad/sec. Οπότε οι ``νέες '' αρμονικές του θα είναι $[\pm 100\pi, \pm 200\pi, \pm 300\pi, \pm 400\pi, \pm 500\pi, \pm 600\pi, \pm 700\pi, \pm 800\pi]$ rad/sec, και βέβαια στα $\pm 100\pi, \pm 300\pi, \pm 500\pi, \pm 700\pi$ rad/sec τα μιγαδικά πλάτη θα είναι μηδέν. Οπότε για το $x(t)$ έχουμε τους ``νέους '' συντελεστές Fourier, X'_k, οι οποίοι είναι:

$$X'_k = [X'_1, X'_2, X'_3, X'_4, X'_5, X'_6, X'_7, X'_8] = [0, X_1, 0, X_2, 0, X_3, 0, X_4] \tag{38}$$

για τις συχνότητες $[100\pi, 200\pi, 300\pi, 400\pi, 500\pi, 600\pi, 700\pi, 800\pi]$.

Τώρα υπάρχει αντιστοιχία συχνοτήτων με το Y_k, οπότε πλέον μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Parseval ως:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} x(t)y(t)dt &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X'_k Y_k^* \\
&= X'_{-4}Y_{-4}^* + X'_{-3}Y_{-3}^* + ... + X'_3 Y_3^* + X'_4 Y_4^* \\
&= X_4'^* Y_4 + X_3'^* Y_3 + ... + X'_3 Y_3^* + X'_4 Y_4^* \\
&= ... = 8
\end{aligned} \tag{39}$$

όπως παραπάνω.

14. **Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το περιοδικό σήμα**

$$\mathbf{x(t) = \sin(\pi f_0 t)} \tag{40}$$

το οποίο έχει περίοδο $\mathbf{T_0}$.

Λύση:
Είναι

$$\begin{aligned}
X_0 &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt \\
&= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \sin\left(\frac{\pi}{T_0}\right)dt \\
&= -\frac{1}{T_0}\frac{T_0}{\pi}\int_0^{T_0}\left(\cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)\right)' dt \\
&= -\frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)\Big|_0^{T_0} \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}.
\end{aligned} \tag{41}$$

Επίσης

$$
\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= -\frac{1}{T_0}\frac{T_0}{\pi}\int_0^{T_0}\Big(\cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)\Big)' e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\
&= -\frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-jk\omega_0 t}\Big|_0^{T_0} + \frac{1}{\pi}\int_0^{T_0}\cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)\Big(e^{-jk\omega_0 t}\Big)' dt \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}(-jk\omega_0)\int_0^{T_0}\cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{2}{\pi} - \frac{2jk}{T_0}\int_0^{T_0}\cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{2}{\pi} - \frac{2jk}{T_0}\int_0^{T_0}\frac{T_0}{\pi}\Big(\sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)\Big)' e^{-kk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{2}{\pi} - \frac{2jk}{\pi}\sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-jk\omega_0 t}\Big|_0^{T_0} + \frac{2jk}{T_0}\frac{T_0}{\pi}\Big(-\frac{2j\pi k}{T_0}\Big)\int_0^{T_0}\sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{2}{\pi} + \frac{4k^2}{T_0}\int_0^{T_0}\sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{2}{\pi} + 4k^2\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{2}{\pi} + 4k^2 X_k \Longleftrightarrow \\
X_k - 4k^2 X_k &= \frac{2}{\pi} \\
X_k(1-4k^2) &= \frac{2}{\pi} \\
X_k &= \frac{2}{\pi(1-4k^2)} \qquad (42)
\end{aligned}
$$

Άρα θα είναι

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{2}{\pi} + \sum_{k=\infty, k\neq 0}^{\infty}\frac{2}{\pi(1-4k^2)}e^{jk\omega_0 t} \\
&= \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(1-4k^2)}\cos(k\omega_0 t) \\
&= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1-4k^2)}\cos(k\omega_0 t) \qquad (43)
\end{aligned}
$$

15. **Δείξτε ότι για πραγματικά σήματα ισχύει:**

   - **Άρτιο σήμα Χ Άρτιο σήμα = Άρτιο σήμα**
   - **Περιττό σήμα Χ Περιττό σήμα = Άρτιο σήμα**
   - **Άρτιο σήμα Χ Περιττό σήμα = Περιττό σήμα**

   Λύση:

   - $$\left.\begin{array}{r} \text{Αν } x(t) \text{ άρτιο } \Leftrightarrow x(t) = x(-t) \\ \text{Αν } y(t) \text{ άρτιο } \Leftrightarrow y(t) = y(-t) \end{array}\right\} \Longrightarrow x(t)y(t) = x(-t)y(-t) \Longrightarrow z(t) = z(-t) \tag{44}$$

     που δηλώνει ότι το $z(t)$ είναι άρτιο.

   - $$\left.\begin{array}{r} \text{Αν } x(t) \text{ περιττό } \Leftrightarrow x(t) = -x(-t) \\ \text{Αν } y(t) \text{ περιττό } \Leftrightarrow y(t) = -y(-t) \end{array}\right\} \Longrightarrow x(t)y(t) = x(-t)y(-t) \Longrightarrow z(t) = z(-t) \tag{45}$$

     που δηλώνει ότι το $z(t)$ είναι άρτιο.

   - $$\left.\begin{array}{r} \text{Αν } x(t) \text{ άρτιο } \Leftrightarrow x(t) = x(-t) \\ \text{Αν } y(t) \text{ περιττό } \Leftrightarrow y(t) = -y(-t) \end{array}\right\} \Longrightarrow x(t)y(t) = -x(-t)y(-t) \Longrightarrow z(t) = -z(-t) \tag{46}$$

     που δηλώνει ότι το $z(t)$ είναι περιττό.

16. **Υπολογίστε το ολοκλήρωμα**

   $$\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2\pi}} \sin^{\mathbf{10}}(\mathbf{t})\mathbf{dt}$$

   χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Parseval.

   Λύση:
   Το θεώρημα του Parseval συνοψίζεται στην εξίσωση

   $$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x^2(t)dt = X_0^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 = A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2}$$

   η οποία περιλαμβάνει και τη μονόπλευρη και τη δίπλευρη (εκθετική) αναπαράσταση της σειράς Fourier. Αναλύουμε το σήμα σε σειρά Fourier:

   $$x(t) = \sin^5(t) = \left(\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}\right)^5 = \frac{(e^{jt} - e^{-jt})^5}{32j} \tag{47}$$

   Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Newton,

   $$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + nab^{n-1} + b^n \tag{48}$$

η σχέση (47) γράφεται:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{32j}(e^{j5t} - 5e^{j4t}e^{-jt} + 10e^{j3t}e^{-j2t} - 10e^{j2t}e^{-j3t} + 5e^{jt}e^{-j4t} - e^{-j5t}) \\
&= \frac{1}{32j}(e^{j5t} - e^{-j5t} - 5e^{j3t} + 5e^{-j3t} + 10e^{jt} - 10e^{-jt}) \\
&= \frac{1}{32j}(2j\sin(5t) - 10j\sin(3t) + 20j\sin(t)) \\
&= \frac{1}{16}\sin(5t) - \frac{5}{16}\sin(3t) + \frac{5}{8}\sin(t)
\end{aligned}$$

Οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\sin^5(t)\Big)^2 dt = \frac{126}{512} \Rightarrow \int_0^{2\pi}\Big(\sin^5(t)\Big)^2 dt = 2\pi\frac{126}{512} \tag{49}$$

που είναι και το ζητούμενο.

17. **Έστω το περιοδικό σήμα $\mathbf{x(t)}$ που ορίζεται σε μια περίοδο $-\mathbf{T_0/2 \leq t \leq T_0/2}$ ως:**

$$\mathbf{x(t)} = \begin{cases} 1, & |t| \leq t_c \\ 0, & t_c < |t| \leq T_0/2 \end{cases}$$

με $\mathbf{tc < T_0/2}$. Αναπτύξτε το σε σειρά Fourier, για $\mathbf{t_c = T_0/4}$ και $\mathbf{t_c = T_0/10}$.

Λύση:
Θα αναπτύξουμε το περιοδικό σήμα σε σειρά Fourier χωρίς αντικατάσταση της t_c, η οποία θα γίνει στο τέλος. Είναι:

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_{-t_c}^{t_c} 1dt = \frac{1}{T_0}t\Big|_{-t_c}^{t_c} = \frac{1}{T_0}(t_c + t_c) = \frac{2t_c}{T_0} \tag{50}$$

και

$$\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{1}{T_0}\int_{-t_c}^{t_c} e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{1}{T_0}\frac{1}{-jk\omega_0}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-t_c}^{t_c} \\
&= -\frac{1}{j2\pi k}\Big(e^{-jk\omega_0 t_c} - e^{jk\omega_0 t_c}\Big) \\
&= \frac{1}{j2\pi k}2j\sin(k\omega_0 t_c) \\
&= \frac{\sin(k\omega_0 t_c)}{\pi k} \qquad (51)
\end{aligned}$$

- Για $t_c = \frac{T_0}{4}$, έχουμε

$$X_0 = \frac{2T_0/4}{T_0} = \frac{1}{2} \tag{52}$$

$$X_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_0/4)}{\pi k} = \frac{\sin(\pi k/2)}{\pi k} = \frac{1}{2}sinc(k/2) \tag{53}$$

- Για $t_c = \frac{T_0}{10}$, έχουμε

$$X_0 = \frac{2T_0/10}{T_0} = \frac{1}{5} \tag{54}$$

$$X_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_0/10)}{\pi k} = \frac{\sin(\pi k/5)}{\pi k} = \frac{1}{5}sinc(k/5) \tag{55}$$