Σχετικά με τον Μετασχηματισμό Laplace και ΓΧΑ Συστήματα

Επιμέλεια: Γιώργος Καφεντζής
Υποψ. Διδάκτωρ Τμήμ. Η/Υ
Πανεπιστήμιο Κρήτης

8 Ιουνίου 2013

1 Εισαγωγή

Σε αυτές τις σημειώσεις, θα δούμε πως χρησιμοποιειται ο μετασχ. Laplace στα ΓΧΑ συστήματα, και ποιά η βαθύτερη σχέση του με το μετασχ. Fourier. Εχουμε δει οτι όταν το πεδίο σύγκλισης περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα, τοτε μπορούμε να υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier από το μετασχ. Laplace ως:

$$X(\omega) = X(s)\Big|_{\sigma=0} \tag{1}$$

Όμως ποιά ειναι η βαθύτερη σημασία του μετασχ. Laplace; Δεν μπορεί να ειναι μόνο η χρήση του για τον υπολογισμό του μετασχ. Fourier, έτσι δεν είναι; Ποιά η σημασία των πόλων στο πεδίο σύγκλισης; Ποιά αυτή των μηδενικών; Τι συμβαίνει όταν περνάμε ένα σήμα μέσα από ένα σύστημα που περιγράφεται στο χώρο του Laplace; Όλα αυτά θα τα μελετήσουμε εδώ... :-)

2 Η Συνάρτηση Μεταφοράς

Ας θεωρήσουμε μια είσοδο της μορφης

$$x(t) = e^{st} = e^{(\sigma+j\omega)t} \tag{2}$$

σε ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$. Η έξοδος του συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = H\{x(t)\} = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \tag{3}$$

Αντικαθιστωντας, έχουμε

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \tag{4}$$

Ορίζουμε ως **Συνάρτηση Μεταφοράς** το

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt \tag{5}$$

και έτσι μπορούμε να γραψουμε οτι

$$y(t) = H\{e^{st}\} = H(s)e^{st} \tag{6}$$

Άρα βλέπουμε ότι η επίδραση του συστήματος επάνω σε μια είσοδο της μορφης e^{st} είναι ο πολλαπλασιασμός της με τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$. Θυμηθείτε οτι *ιδιοσυνάρτηση* λέγεται το σημα που περνάει από το σύστημα χωρίς καμιά τροποποίηση πλήν του πολλαπλασιασμού του με μια σταθερά. Έτσι, αναγνωρίζουμε το e^{st} ως ιδιοσυνάρτηση του ΓΧΑ συστήματος και το $H(s)$ ως η αντίστοιχη *ιδιοτιμή*.

Τώρα, ας εκφράσουμε την μιγαδική συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ σε πολική μορφή, ως

$$H(s) = |H(s)|e^{j\phi(s)} \tag{7}$$

όπου $|H(s)|$ και $\phi(s)$ είναι το μέτρο και η φάση του $H(s)$, αντίστοιχα. Τώρα, ξαναγράφοντας την έξοδο του συστηματος, θα έχουμε

$$y(t) = |H(s)|e^{j\phi(s)}e^{st} \tag{8}$$

Με χρήση του $s = \sigma + j\omega$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= |H(\sigma + j\omega)|e^{\sigma t}e^{j(\omega t + \phi(\sigma + j\omega))} \\ &= |H(\sigma + j\omega)|e^{\sigma t}\cos(\omega t + \phi(\sigma + j\omega)) + j|H(\sigma + j\omega)|e^{\sigma t}\sin(\omega t + \phi(\sigma + j\omega)) \end{aligned} \tag{9}$$

Μπορούμε εδώ να παρατηρήσουμε ότι το σύστημα, δεδομένης της εισόδου της μορφης $x(t) = e^{st}$, αλλάζει το πλάτος της εισόδου κατα παράγοντα $|H(\sigma + j\omega)|$ και μετατοπίζει τη φάση των ημιτονοειδών συνιστωσών κατά $\phi(\sigma + j\omega)$. Το σύστημα δεν αλλάζει τον παράγοντα απόσβεσης σ, ούτε τη συχνότητα ω της εισόδου. Ενδιαφέρον!! :-)

Έχουμε ήδη ορίσει ένα όνομα για το μετασχ. Laplace της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος: συμφωνήσαμε να τον λέμε *Συνάρτηση Μεταφοράς - Transfer Function*. Θυμηθείτε ότι η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος σχετίζεται με την είσοδό του και με το συστημα μέσω της συνέλιξης

$$y(t) = x(t) * h(t) \tag{10}$$

Αυτή η σχέση μεταφράζεται στο χώρο του μετασχ. Laplace ως

$$Y(s) = X(s)H(s) \tag{11}$$

Άρα ο μετασχ. Laplace της εξόδου ισούται με το γινόμενο της συνάρτησης μεταφοράς επί το μετασχ. Laplace της εισόδου. Με αναδιάταξη της παραπάνω σχέσης, έχουμε

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \tag{12}$$

η οποία σχέση μας θυμίζει την αντίστοιχη σχέση στα συστηματα, οταν μελετούσαμε το μετασχ. Fourier:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \tag{13}$$

Αυτό φυσικά δε θα πρέπει να σας εκπλήσσει. :-)

3 Η Συνάρτηση Μεταφοράς και οι Διαφορικές Εξισώσεις

Η Συνάρτηση Μεταφοράς μπορει να συνδεθεί απ᾽ ευθείας με την περιγραφή μέσω διαφορικών εξισώσεων ενός συστήματος, με χρήση του μετασχ. Laplace. Θυμηθείτε ότι η σχέση εισόδου-εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος N-οστης τάξης περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) \tag{14}$$

Παραπάνω δείξαμε ότι η είσοδος e^{st} είναι μια ιδιοσυνάρτηση ενός ΓΧΑ συστήματος, με την αντίστοιχη ιδιοτιμή ίση με τη Συνάρτηση Μεταφοράς $H(s)$. Αυτό σημαίνει ότι, αν $x(t) = e^{st}$, τότε $y(t) = H(s)e^{st}$. Αντικαθιστωντας αυτά στη σχέση (14), θα έχουμε

$$\left(\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} e^{st}\right) H(s) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} e^{st} \tag{15}$$

Με χρήση της γνωστης σχέσης

$$\frac{d^k}{dt^k} e^{st} = s^k e^{st} \tag{16}$$

θα έχουμε

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} \tag{17}$$

Το $H(s)$ είναι μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς, οπως βλέπετε. Ο συντελεστής b_k του s^k στον αριθμητή αντιστοιχεί στο συντελεστή b_k της k-οστης παραγώγου της εισόδου $x(t)$. Ο συντελεστής a_k του s^k στον παρονομαστη αντιστοιχεί στο συντελεστή a_k της k-οστης παραγώγου της εξόδου $y(t)$. Άρα, μπορούμε να υπολογίζουμε εύκολα τη Συνάρτηση Μεταφοράς ενός συστήματος που περιγράφεται από διαφορική εξίσωση, και αντίστροφα φυσικά.

Παράδειγμα:
Βρειτε τη Συνάρτηση Μεταφοράς του ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3\frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = 2\frac{d}{dt} x(t) - 3x(t) \tag{18}$$

Λύση:
Θα είναι (κατ΄ ευθείαν από τη σχέση (17))

$$H(s) = \frac{2s - 3}{s^2 + 3s + 2} \tag{19}$$

Φυσικά μπορείτε να υπολογίσετε αναλυτικά την $H(s)$ με χρήση της ιδιότητας της παραγωγισης στο χρόνο. Θα καταλήξετε στο ιδιο αποτέλεσμα.

Για να λάβουμε περισσότερη πληροφορία για τη συνάρτηση μεταφοράς, θα ηταν πολύ βολικό να τη γράψουμε σε μορφή παραγόντων, ως

$$H(s) = A\frac{\prod_{k=1}^{M}(s - c_k)}{\prod_{k=1}^{N}(s - d_k)} \tag{20}$$

με A μια σταθερά. Υπενθυμίζουμε ότι οι αριθμοί c_k, d_k λέγονται **μηδενικά** και **πόλοι**, αντίστοιχα. Αυτοί οι αριθμοί δεν είναι φυσικά τίποτα περισσότερο από τις ρίζες του αριθμητή και του παρονομαστη της σχέσης (17), δηλ. τα μηδενικά μηδενίζουν τον αριθμητή του $H(s)$, άρα και το ίδιο το $H(s)$, ενώ οι πόλοι μηδενίζουν τον παρονομαστη του $H(s)$, άρα απειρίζουν το ίδιο το $H(s)$.

Οι πόλοι και τα μηδενικά μιας ρητής συνάρτησης μεταφοράς προσφέρουν σημαντική πληροφορία για τα χαρακτηριστικά ενός ΓΧΑ συστήματος, όπως θα δούμε παρακάτω. Άλλωστε, συμφωνα με την παραπάνω σχέση (20), η γνώση των πόλων, των μηδενικών, και της σταθεράς A καθορίζουν πλήρως της συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ και έτσι προσφέρουν μια ακόμα περιγραφή ενός ΓΧΑ συστήματος, της οποίας η χρησιμότητα θα φανεί αμέσως τώρα...

4 Σχέση Απόκρισης σε Συχνότητα και Πόλων-Μηδενικών

Έστω λοιπόν ότι έχουμε τους πόλους και τα μηδενικά μιας συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$ στο μιγαδικό επίπεδο. Τι μας λέει αυτό για το μετασχ. Fourier του συστηματος, δηλ. της *Απόκρισης σε Συχνότητα* $H(\omega)$;[1] Ποιά η σχέση που τα συνδέει; Πώς επηρεάζει η μορφη της $H(s)$ την απόκριση σε συχνότητα $H(\omega)$; Ναι, βέβαια, ειπαμε ότι ισχύει

$$H(\omega) = H(s)\Big|_{\sigma=0} = H(\sigma + j\omega)\Big|_{\sigma=0} \tag{21}$$

όταν το πεδίο συγκλισης του $H(s)$ περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα, αλλά δε μας αρκει αυτό! :-) We want more! :-) Εδώ λοιπόν θα συζητήσουμε για μια πιο διαισθητική προσέγγιση του μετασχ. Laplace και των πόλων-μηδενικών του, πάντα σε σχέση με το μετασχ. Fourier[2].

Ας εξετάσουμε λοιπόν το φάσμα πλάτους και φάσης του $H(\omega)$, με χρήση οπτικογραφικών :-P μεθόδων, και φυσικά παρέα με τους πόλους και τα μηδενικά της $H(s)$. Έστω ότι έχουμε την απόκριση πλάτους (δηλ. το φάσμα πλάτους της απόκρισης σε συχνότητα) της $H(\omega)$ ως

$$|H(\omega)| = |A| \frac{\prod_{k=1}^{M} |j\omega - c_k|}{\prod_{k=1}^{N} |j\omega - d_k|} \tag{22}$$

όπως αυτή προκύπτει αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (21) στη σχέση (20). Αυτή η σχέση περιλαμβάνει ένα λόγο γινομένων παραγόντων της μορφής $|j\omega - \lambda|$, όπου το λ είναι είτε πόλος είτε μηδενικό. Τα μηδενικά προφανώς συνεισφέρουν στον αριθμητή, ενώ οι πόλοι στον παρονομαστή. Ας κάνουμε τα πράγματα πιο εύκολα. :-) Ας θεωρήσουμε το απλοποιημένο σύστημα

$$|H(\omega)| = \frac{|j\omega - c_1|}{|j\omega - d_1|} \tag{23}$$

με έναν πόλο στη θέση d_1 και ένα μηδενικό στη θέση c_1. Ας θεωρησουμε ξανά ένα γενικό παράγοντα της μορφης $j\omega - \lambda$. Προφανώς, το ω ειναι η συχνότητά μας, η οποία μεταβάλλεται από το $-\infty$ ως το ∞. Πώς αλλάζει ο αριθμητής $|j\omega - c_1|$ όσο τρέχει το ω; Πώς αλλάζει ο παρονομαστής $|j\omega - d_1|$ όσο τρέχει το ω; Πώς αυτές οι αλλαγές επηρεάζουν το συνολικό $|H(\omega)|$;

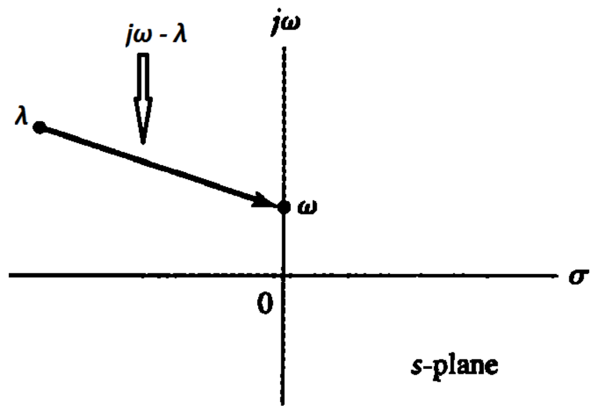
Για να απαντήσουμε σε αυτά τα ερωτήματα, θα πρέπει να φανταστούμε τον παράγοντα $j\omega - \lambda$ ως ένα *διάνυσμα* από το σημείο λ στο σημείο $j\omega$, το οποίο φυσικά δεν είναι σταθερό, όπως στο Σχήμα 1. Αρα αυτό το διάνυσμα είναι μεταβαλλόμενο. Το μήκος αυτού του διανύσματος είναι φυσικά $|j\omega - \lambda|$. Εξετάζοντας λοιπόν το μηκος αυτό όσο το ω μεταβάλλεται, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη συμβολή κάθε πόλου η μηδενικού στη συνολική απόκριση πλάτους $|H(\omega)|$!! :-)

Δείτε το Σχήμα 2. Βλέπετε πώς μεταβάλλεται το διάνυσμα (και αρα και το μήκος του) όσο η συχνότητα ω μεταβάλλεται. :-) Παρατηρήστε ότι το μήκος του διανύσματος ειναι αρκετά μεγάλο οσο το ω έρχεται από το $-\infty$, μικραίνει συνεχώς όσο πλησιάζει κοντά στο λ, γινεται ελάχιστο και ισο με $|j\omega - \lambda| = |\Re\{\lambda\}|$ όταν $\omega = \Im\{\lambda\}$, και μετά, όσο το ω ανεβαίνει στο ∞, το διάνυσμα - και άρα και το μήκος του - ξαναμεγαλώνει. Παρατηρήστε οτι αν το λ είναι αρκετα κοντά στον φανταστικό άξονα, τότε το $|j\omega - \lambda|$ γίνεται πολύ μικρό για $\omega = \Im\{\lambda\}$. Επίσης, στην ίδια περίπτωση, οι πιο ακαριαίες αλλαγές στο $|j\omega - \lambda|$ γίνονται στις συχνότητες κοντά στο λ! :-) Η όλη αυτή διαδικασία περιγράφεται στο Σχήμα 3.

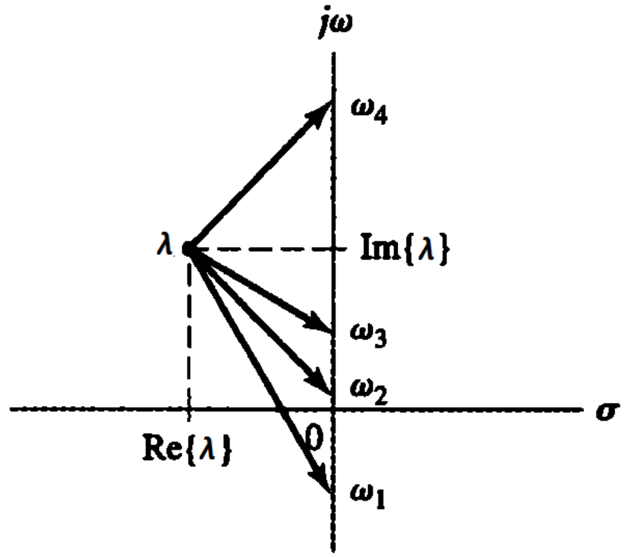
Ας δούμε τώρα τι συμβαινει στην περίπτωση που ο παράγοντας που εξετάζουμε ειναι είτε πόλος είτε μηδενικό.

[1] Θυμηθείτε την ορολογια: Απόκριση σε Συχνότητα $\leftrightarrow H(\omega)$, Συνάρτηση Μεταφοράς $\leftrightarrow H(s)$:-)

[2] Το'χουμε ξαναπεί... είμαστε μηχανικοί, όχι μαθηματικοί, μας ενδιαφέρει η διαισθητική ερμηνεία των πραγμάτων! :-)



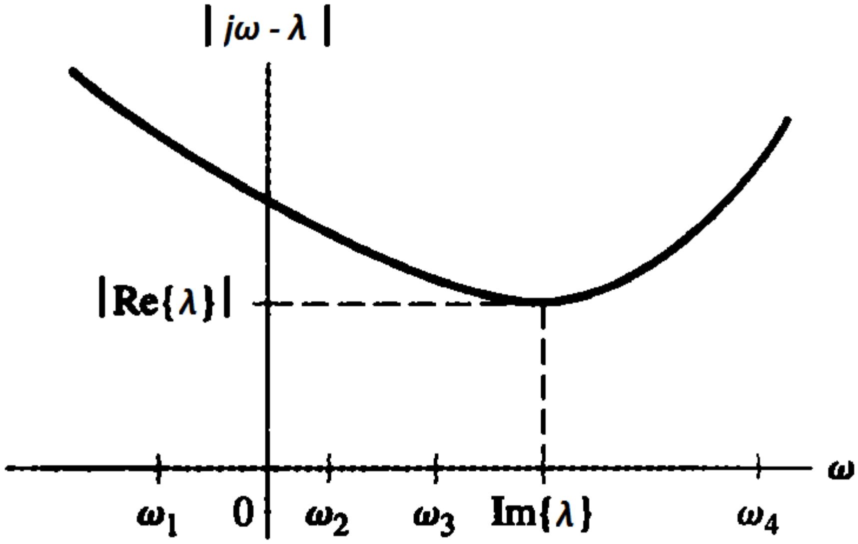
Σχήμα 1: Παράγοντας $j\omega - \lambda$



Σχήμα 2: Παράγοντας $j\omega - \lambda$ όσο το ω μεταβάλλεται

- Αν το λ είναι μηδενικό, τοτε το $|j\omega - \lambda|$ συνεισφέρει στον αριθμητή του $|H(\omega)|$. Άρα, σε συχνότητες που είναι κοντά σε ενα μηδενικό, το $|H(\omega)|$ τείνει να μικραίνει. Το πόσο μικραίνει εξαρτάται από το πόσο κοντά στον κατακόρυφο άξονα είναι το εν λόγω μηδενικό! :-) Αν βρίσκεται σε κάποια απόσταση, όπως στο Σχήμα 2, τότε απλά η απόκριση πλάτους φθίνει, αλλά δε μηδενίζεται, οπως στο Σχημα 3. Αν όμως το μηδενικό βρίσκεται επάνω στον άξονα $j\omega$, τοτε η απόκριση συχνότητας πάει στο μηδέν στη συχνότητα που αντιστοιχει στο μηδενικό. Σε συχνότητες μακριά από το μηδενικό, δηλ. οταν $|\omega| >> \Re\{\lambda\}$, τοτε μπορούμε να πούμε οτι $|j\omega - \lambda| \approx |\omega|$.

- Αν το λ είναι πόλος, τότε το $|j\omega - \lambda|$ συνεισφέρει στον παρονομαστή του $|H(\omega)|$. Άρα, σε συχνότητες που είναι κοντά σε εναν πόλο, το $|H(\omega)|$ τείνει να μεγαλώνει και σχηματιζει μια κορυφή (γιατι ο παρονομαστης του κλάσματος μικραίνει, φτάνει σε ενα ελάχιστο, και ξαναμεγαλώνει). Το πόσο μεγαλώνει εξαρτάται από το πόσο κοντά στον κατακόρυφο άξονα είναι ο εν λόγω πόλος! :-) Αν βρίσκεται σε κάποια απόσταση, όπως στο Σχήμα 2, τότε απλά η απόκριση πλάτους μεγαλώνει, αλλά δε μηδενίζεται, με κάπως ανάποδη γραφική παράσταση, σαν ένα αντίστροφο Σχήμα 3. Αν όμως ο



Σχήμα 3: Παράγοντας $|j\omega - \lambda|$ συναρτήσει του ω

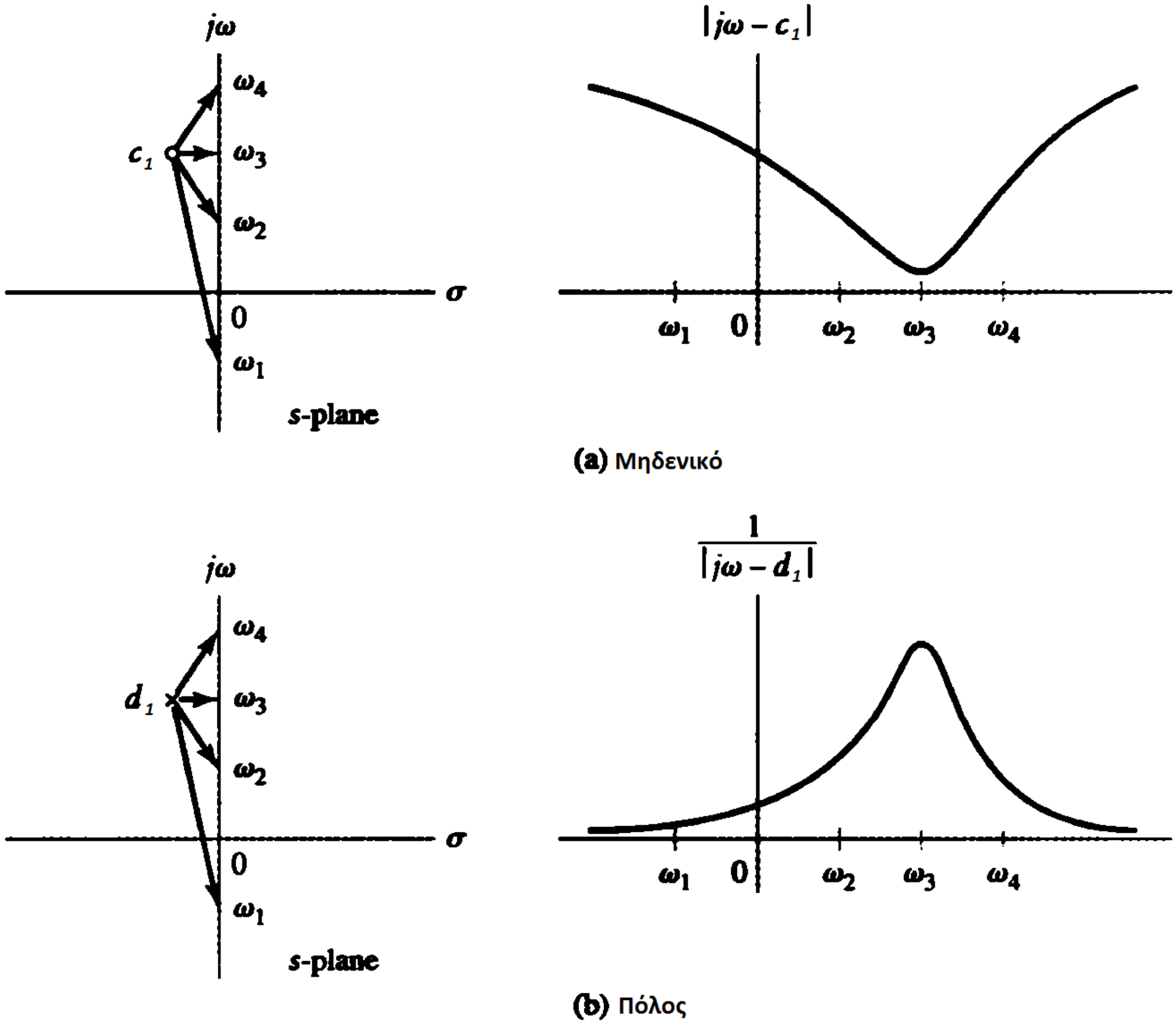
πόλος βρίσκεται επάνω στον άξονα $j\omega$, τοτε η απόκριση συχνότητας πάει στο άπειρο στη συχνότητα που αντιστοιχει στον πόλο. Σε συχνότητες μακριά από τον πόλο, δηλ. οταν $|\omega| >> \Re\{\lambda\}$, τοτε μπορούμε να πούμε οτι $|j\omega - \lambda| \approx |\omega|$.

Γενικά, τα μηδενικά κοντά στον κατακόρυφο άξονα τεινουν να κατεβάζουν την απόκριση πλάτους προς το μηδέν, ενώ οι πόλοι κοντά στον κατακόρυφο άξονα, τείνουν να ανεβάζουν την απόκριση πλάτους προς τα πάνω. Σημειώστε οτι ενας πόλος δεν μπορεί να βρίσκεται στον φανταστικό αξονα, γιατι τότε η απόκριση πλάτους απειρίζεται (και άλλωστε εχουμε υποθέσει οτι ο φανταστικός άξονας περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace).[3]

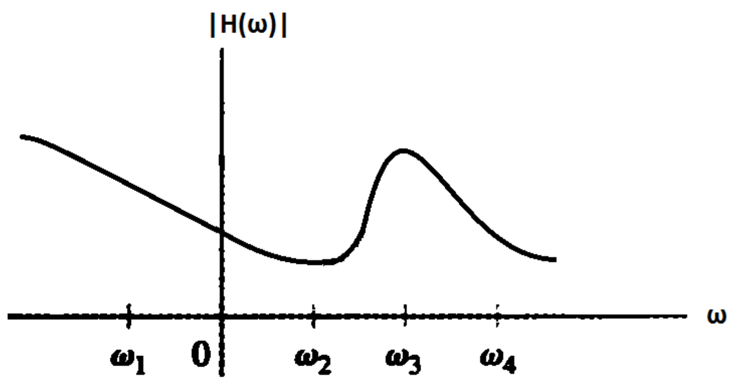
Ας επιστρέψουμε τώρα στο παράδειγμά μας, με τον ένα πόλο και το ένα μηδενικό. Στο Σχήμα 4, φαίνεται η συνεισφορά του μηδενικού και του πόλου αντίστοιχα, στην απόκριση πλάτους, ως ξεχωριστοί παράγοντες, συναρτήσει της μεταβλητής ω. Παρατηρήστε ότι αν ο πόλος και το μηδενικό είναι στην ίδια θέση, όπως φαίνεται στο σχήμα, αυτοί αλληλοακυρώνονται, και η απόκριση πλάτους είναι σταθερή, αφού $|H(\omega)| = |A||j\omega - c_1|\dfrac{1}{|j\omega - d_1|} = |A|$, αν $c_1 = d_1$!! Αυτό φαινεται κι αν πολλαπλασιάσετε τα δυο φάσματα πλάτους του Σχήματος 4.

Φυσικά μια τέτοια περίπτωση δεν έχει ενδιαφέρον τόσο αναλυτικής μελέτης όπως κάναμε εδω, οπότε συνήθως σε μια τετοια αναπαράσταση θεωρούμε οτι αξίζει αναλυτικής μελέτης όταν $c_k \neq d_k$. Τότε, αν θεωρήσουμε οτι το μηδενικό είναι στη συχνότητα ω_2 και ο πόλος στην ω_3, το συνολικό φάσμα πλάτους θα είναι, ΠΟΛΥ ποιοτικά, κάπως όπως στο Σχήμα 5.

[3]Θεωρητικά, οι πόλοι και τα μηδενικά μπορούν να βρίσκονται οπουδήποτε! :-) Απλά δεν έχει κανένα πρακτικό ενδιαφερον ένα σύστημα που έχει πόλους στο φανταστικό άξονα - ειναι δηλαδή ένα *ασταθές* σύστημα, όπως γνωρίζετε.



Σχήμα 4: Μηδενικό-πόλος και απόκριση πλάτους



Σχήμα 5: Μηδενικό-πόλος και συνεισφορά στη συνολική απόκριση πλάτους $|H(\omega)|$

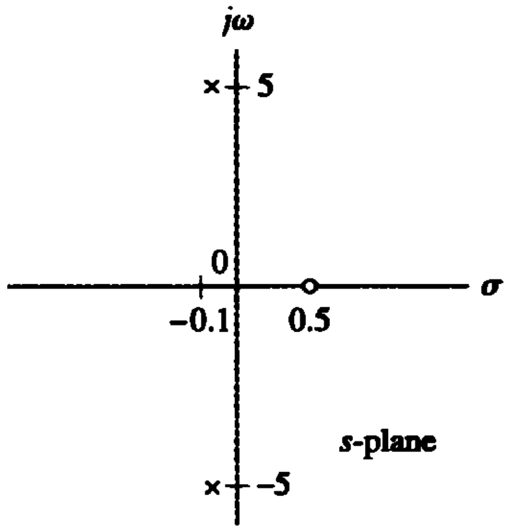
Ας τα βάλουμε ολα αυτά σε ένα παράδειγμα, για να δούμε συνολικά τι γίνεται. :-)

Παράδειγμα:
Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s - 0.5}{(s + 0.1 - j5)(s + 0.1 + j5)} \tag{24}$$

Σχεδιάστε ποιοτικά την απόκριση πλάτους του ΓΧΑ συστήματος.

Λύση:
Το συστημα έχει ένα μηδενικό στη θέση $z_1 = 0.5$ και πόλους στις θέσεις $p_i = -0.1 \pm j5$, $i = 1, 2$. Το διάγραμμα πόλων-μηδενικών φαίνεται στο Σχήμα 6. Έτσι, το μηδενικό κάνει την απόκριση πλάτους να



Σχήμα 6: Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών Παραδείγματος

φθίνει κοντά στο $\omega = 0$, ενώ ο πόλος την κάνει να αυξάνει κοντά στο $\omega = \pm 5$. Στο $\omega = 0$, έχουμε

$$|H(0)| = \frac{0.5}{|0.1 - 5j||0.1 + 5j|} \approx \frac{0.5}{5^2} = 0.02 \tag{25}$$

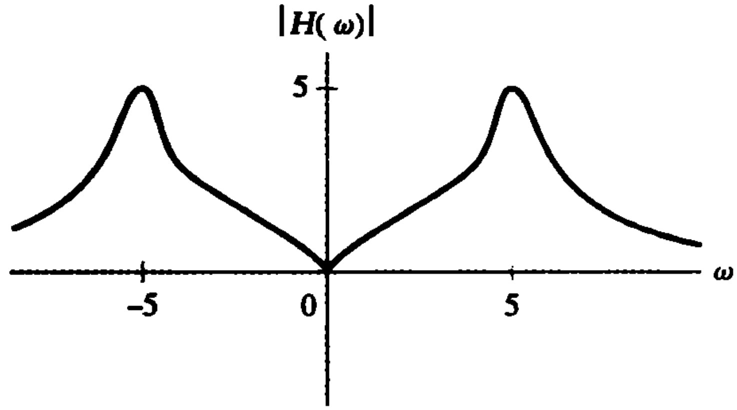
ενώ για $\omega = 5$, είναι

$$|H(5)| = \frac{|j5 - 0.5|}{|0.1||j10 + 0.1|} \approx \frac{5}{0.1(10)} = 5 \tag{26}$$

Για $\omega >> 5$, το μήκος του διανύσματος από το $j\omega$ σε έναν από τους πόλους ειναι προσεγγιστικά ίσο με το διάνυσμα από το $j\omega$ προς το μηδενικό, και έτσι το μηδενικό και ο ενας πόλος αλληλοακυρώνονται. Η απόσταση από το $j\omega$ στον εναπομείναντα πόλο αυξάνεται όσο αυξάνει το ω. Έτσι, η απόκριση πλάτους $|H(\omega)|$ πηγαίνει προς το μηδέν όσο αυξάνει το ω. Όλα τα παραπάνω φαίνονται στο Σχήμα 7.

Με παρόμοιους συλλογισμούς μπορούμε να βγαλουμε συμπεράσματα και για τη φάση του συστήματος, $arg\{H(\omega)\}$. Μπορούμε να δείξουμε οτι

$$arg\{H(\omega)\} = arg\{A\} + \sum_{k=1}^{M} arg\{j\omega - c_k\} - \sum_{k=1}^{N} arg\{j\omega - d_k\} \tag{27}$$



Σχήμα 7: Απόκριση Πλάτους Παραδείγματος

Σε αυτήν την περίπτωση, η φάση του $H(\omega)$ είναι το άθροισμα όλων των φάσεων που οφείλονται στα μηδενικά, μείον το άθροισμα ολων των φάσεων που οφείλεται στους πόλους. Ο πρώτος ορος, $arg\{A\}$, δεν εξαρτάται από το ω. Ξανά εδώ θεωρούμε ενα παράγοντα της μορφης $arg\{j\omega - \lambda\}$, που είναι η γωνία ενός διανύσματος που δείχνει από το λ στο $j\omega$ στο μιγαδικό επίπεδο. Κι εδώ φυσικά το $j\omega$ μεταβάλλεται, αρα η γωνία αλλάζει. Η γωνία αυτή μετριέται σχετικά με μια οριζόντια γραμμή, παράλληλη του άξονα των σ και περνά από το λ. Εξετάζοντας τη φάση αυτού του διανύσματος όσο αλλάζει το ω, μπορούμε να βρούμε τη συνεισφορά του κάθε πόλου ή μηδενικού στη συνολική απόκριση φάσης του συστήματος, όπως κάναμε και για την απόκριση πλάτους! :-) Όμως, δε θα επεκταθούμε εδώ... μπορείτε βέβαια να το δοκιμάσετε εσείς! :-) :-)

5 Αντίστροφα Συστήματα

Ας θεωρήσουμε ένα ΓΧΑ σύστημα, με κρουστική απόκριση $h(t)$. Η κρουστική απόκριση του **αντίστροφου συστήματος**, $h^{inv}(t)$, ικανοποιεί τη συνθήκη

$$h^{inv}(t) * h(t) = \delta(t) \tag{28}$$

που την έχετε ξαναδεί όταν πρωτοσυζητήσαμε για συστήματα. Αν εφαρμόσουμε μετασχ. Laplace και στα δυο μέλη, έχουμε οτι

$$H^{inv}(s)H(s) = 1 \Leftrightarrow H^{inv}(s) = \frac{1}{H(s)} \tag{29}$$

Άρα βλέπουμε οτι η Συνάρτηση Μεταφοράς $H^{inv}(s)$ του αντίστροφου συστήματος δεν είναι άλλη από την αντίστροφη της Συνάρτησης Μεταφοράς, $1/H(s)$, του αρχικού συστήματος. Με όρους πόλων-μηδενικών, αυτή η σχέση γράφεται

$$H^{inv}(s) = \frac{1}{A}\frac{\prod_{k=1}^{N}(s-d_k)}{\prod_{k=1}^{M}(s-c_k)} \tag{30}$$

όπου c_k, d_k τα μηδενικά και οι πόλοι του αρχικού συστήματος, που εδω βλέπετε οτι έχουν γινει πόλοι (c_k) και μηδενικά (d_k), για το αντίστροφο σύστημα. Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε οτι κάθε σύστημα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς έχει αντίστροφο σύστημα.

Συχνά στην πράξη, μας ενδιαφέρουν συστήματα που εχουν ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα. Προφανώς για να είναι ένα συστημα ευσταθές και αιτιατό, πρέπει να έχει ολους τους πόλους του στο αριστερό ημιεπίπεδο του μιγαδικό επιπέδου. Γιατί; Γιατι τότε θα έχει δεξιόπλευρο πεδίο συγκλισης (ως αιτιατο, είναι και δεξιόπλευρο σήμα, και τα δεξιόπλευρα σήματα ξέρουμε οτι έχουν δεξιόπλευρο πεδίο σύγκλισης), και αυτό θα είναι της μορφης $\Re\{s\} > max_{k=1,\cdots,N}\{\Re\{d_k\}\}$, όπου d_k οι πόλοι του συστήματος. Αφού λοιπόν το πεδίο σύγκλισης είναι έτσι, ο μεγαλύτερος πόλος θα είναι στο αριστερο ημιεπίπεδο, και έτσι το πεδίο σύγκλισης σιγουρα θα περιλαμβάνει τον κατακόρυφο άξονα $j\omega$, αρα θα είναι και ευσταθές.

Αφού για ένα τέτοιο σύστημα $H(s)$, το αντίστροφό του, $H^{inv}(s)$, θα έχει για πόλους τα μηδενικά του $H(s)$, και για μηδενικά τους πόλους του $H(s)$, ένα ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα υπάρχει μόνον όταν όλα τα μηδενικά <u>και</u> οι πόλοι του $H(s)$ είναι στο αριστερό ημιεπίπεδο του $s-$επιπέδου. Ένα σύστημα που έχει όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά στο αριστερό του ημιεπίπεδο λέγεται **Σύστημα Ελάχιστης Φάσης**. Μόνο συστήματα ελάχιστης φάσης μπορούν να δώσουν ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα! :-)

Μια σημαντική ιδιότητα των συστημάτων ελαχίστης φάσης είναι η μοναδική σχέση μεταξύ του φάσματος πλάτους και του φάσματος φάσης. Δηλαδή, η απόκριση φάσης ενός συστήματος ελαχίστης φάσης μπορεί να ευρεθεί μοναδικά από την απόκριση πλάτους, και αντίστροφα.

<u>Παράδειγμα:</u>
Θεωρήστε το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{d}{dt}x(t) - 2x(t) \tag{31}$$

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του αντιστρόφου συστήματος. Είναι αυτό ευσταθές και αιτιατό;

<u>Λύση:</u>
Πρώτα, ας βρούμε τη συνάρτηση μεταφοράς του ίδιου του συστήματος. Θα είναι, με εφαρμογή της ιδιότητας της παραγώγισης

$$sY(s) + 3Y(s) = s^2X(s) + sX(s) - 2X(s) \Leftrightarrow Y(s)(s+3) = X(s)(s^2+s-2) \tag{32}$$

Άρα η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2+s-2}{s+3} \tag{33}$$

και το αντίστροφο σύστημα θα είναι το

$$H^{inv}(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{s+3}{s^2+s-2} = \frac{s+3}{(s-1)(s+2)} \tag{34}$$

Το αντίστροφο σύστημα έχει πόλους στις θέσεις $s = 1, s = -2$. Ο πόλος στη θέση $s = 1$ είναι στο δεξιό ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου. Έτσι, το αντίστροφο σύστημα δεν μπορεί να ειναι και αιτιατό και ευσταθές.

Ένα ερώτημα που μπορει να θέσει κάποιος είναι τι συμβαίνει με το πεδίο σύγκλισης του αντίστροφου συστήματος. Αν $ROC_{H(s)} = R_H$, τότε ποιό είναι το πεδίο σύγκλισης του αντίστροφου συστήματος, R_H^{inv}; Την απάντηση σε αυτό το ερώτημα μας τη δίνει το θεώρημα της συνέλιξης, το οποίο, όπως ξέρετε ήδη, μας λέει ότι τα $H(s)$ και $G(s) = H^{inv}(s)$ πρέπει να έχουν επικαλυπτόμενα πεδία σύγκλισης.

<u>Παράδειγμα:</u>
Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με

$$H(s) = \frac{s-0.5}{s-0.8},\ \ ROC = \Re\{s\} > 0.8 \tag{35}$$

τότε το αντίστροφο σύστημα είναι το

$$H^{inv}(s) = \frac{s-0.8}{s-0.5} \tag{36}$$

Όμως για το πεδίο σύγκλισης έχουμε δυο επιλογές: i) $\Re\{s\} > 0.5$, ii) $\Re\{s\} < 0.5$. Από αυτά τα δυο πεδία, αυτό που επικαλύπτεται με το πεδίο σύγκλισης του $H(s)$ είναι το $\Re\{s\} > 0.5$. Άρα μόνο το σύστημα με αυτό το πεδίο σύγκλισης είναι έγκυρο αντίστροφο σύστημα! Έτσι, μπορούμε να βρούμε και την κρουστική απόκριση του αντιστρόφου συστήματος, $h^{inv}(t)$, η οποία είναι

$$\begin{aligned} h^{inv}(t) &= \text{Ł}^{-1}\Big\{\frac{s}{s-0.5}\Big\} - \text{Ł}^{-1}\Big\{\frac{0.8}{s-0.5}\Big\} = \text{Ł}^{-1}\Big\{s\frac{1}{s-0.5}\Big\} - \text{Ł}^{-1}\Big\{\frac{0.8}{s-0.5}\Big\} \\ &= \frac{d}{dt}e^{t/2}u(t) - 0.8e^{t/2}u(t) \\ &= \delta(t) + 0.5e^{t/2}u(t) - 0.8e^{t/2}u(t) \\ &= \delta(t) - 0.3e^{t/2}u(t) \end{aligned} \tag{37}$$

6 Συνοψίζοντας...

Ο μετασχ. Laplace αναπαριστά σήματα συνεχούς χρόνου ως αθροίσματα μιγαδικών εκθετικών με βάρη, που είναι πιο γενικά σήματα από τα μιγαδικά ημίτονα (τα οποία ειναι ειδική περίπτωση των πρώτων). Έτσι, ο μετασχ. Laplace αναπαριαστά επιτυχώς ένα μεγαλύτερο σύνολο σημάτων απ΄ ό,τι ο μετασχ. Fourier, και μάλιστα περιλαμβάνει και σήματα που δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμα. Άρα μπορούμε να χρησιμοποιούμε το μετασχ. Laplace για ανάλυση ΓΧΑ συστημάτων που δεν είναι ευσταθή.

Η συνάρτηση μεταφοράς ορίζεται ως ο μετασχ. Laplace της κρουστικής απόκρισης και προσφέρει μια ακόμα περιγραφή των χαρακτηριστικών εισόδου-εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος. Η θέση των πόλων και των μηδενικών της συνάρτησης μεταφοράς στο μιγαδικό επίπεδο προσφερει ακόμα μια περιγραφή ενός ΓΧΑ συστήματος, δίνοντας πληροφορία σχετικά με την ευστάθεια, την αιτιατότητα, την αντιστρεψιμότητα, και φυσικά και την απόκριση σε συχνότητα του συστήματος.

Τα μιγαδικά εκθετικά παραμετροποιούνται από μια μιγαδική μεταβλητή s. Ο μετασχ. Laplace είναι συνάρτηση της μεταβλητής αυτής και αυτή αναπαρισταται σε ένα μιγαδικό επίπεδο που ονομάζεται $s-$επίπεδο. Ο μετασχ. Fourier μπορεί να υπολογιστεί μέσω του μετασχ. Laplace, θέτοντας $s = j\omega$, μόνον όταν ο φανταστικός άξονας περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης. Οι ιδιότητες του μετασχ. Laplace ειναι παρόμοιες με αυτές του μετασχ. Fourier. Ο μετασχ. Laplace και ο μετασχ. Fourier έχουν πολλές ομοιότητες και συχνά μπορούν να χρησιμοποιούνται εναλλάξ, αλλά έχουν σημαντικά διαφορετικό ρόλο στην ανάλυση σημάτων και συστημάτων. Ο μετασχ. Laplace χρησιμοποιείται συχνότερα στην ανάλυση μεταβάσεων και ευστάθειας των συστημάτων. Αντίθετα, ο μετασχ. Fourier συχνά εφαρμόζεται ως εργαλείο αναπαράστασης σημάτων και στην επίλυση προβλημάτων συστημάτων όπου μας ενδιαφέρουν τα χαρακτηριστικά σταθερής κατάστασης. Ο μετασχ. Fourier οπτικοποιείται ευκολότερα από το μετασχ. Laplace, γιατί είναι συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής ω, αντίθετα με το μετασχ. Laplace που είναι συνάρτηση της μιγαδικής συχνότητας $\sigma + j\omega$.

7 Ασκήσεις

1. **Ένα ευσταθές σύστημα έχει τις παρακάτω εισόδους και εξόδους $\mathbf{x(t)}$ και $\mathbf{y(t)}$ αντίστοιχα. Χρησιμοποιήστε το μετασχ.Laplace για να βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς και την κρουστική απόκριση του συστήματος.**

   (α΄) $\mathbf{x(t) = e^{-t}u(t)}$, $\mathbf{y(t) = e^{-2t}\cos(t)u(t)}$

   (β΄) $\mathbf{x(t) = e^{-2t}u(t)}$, $\mathbf{y(t) = -2e^{-t}u(t) + 2e^{-3t}u(t)}$

Λύση:
Είναι

(α′) Προφανώς

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

άρα αρκεί να βρούμε τα $X(s), Y(s)$. Έχουμε

$$x(t) = e^{-t}u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s+1},\ \Re\{s\} > -1$$

αφού το σήμα ειναι δεξιόπλευρο. Επίσης

$$y(t) = e^{-2t}\cos(t)u(t) \leftrightarrow Y(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2+1},\ \Re\{s\} > -2$$

και άρα

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}}{\frac{1}{s+1}} = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+2)^2+1} = \frac{s^2+3s+2}{s^2+4s+5}$$

Κάνοντας διαιρεση πολυωνύμων, θα έχουμε

$$H(s) = \frac{s^2+3s+2}{s^2+4s+5} = 1 - \frac{s+3}{(s+2)^2+1}$$

Εδώ μπορούμε να ακολουθησουμε μια διαφορετική προσέγγιση αντι της Ανάπτυξης σε Μερικά Κλάσματα. Βλέπουμε οτι ο παρονομαστής μας θυμίζει δυο πολύ γνωστά ζεύγη Laplace, τα

$$e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t) \longleftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2+(\omega_0)^2},\ \ \Re\{s\} > -\Re\{a\}$$

$$e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t) \longleftrightarrow \frac{\omega_0}{(s+a)^2+(\omega_0)^2},\ \ \Re\{s\} > -\Re\{a\}$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε τον αριθμητή με τέτοιο τρόπο ώστε να χρησιμοποιήσουμε τους παραπάνω τύπους. Δηλ.

$$H(s) = 1 - \frac{s+3}{(s+2)^2+1} = 1 - \frac{(s+2)}{(s+2)^2+1} - \frac{1}{(s+2)^2+1}$$

Επίσης, το πεδίο σύγκλισης για αυτά τα δυο σήματα είναι το $\Re\{s\} > -2$, το οποίο συμφωνεί με το χαρακτηριστικό της ευστάθειας του συστήματος που μας λέει η εκφώνηση, άρα

$$h(t) = \delta(t) - e^{-2t}\cos(t)u(t) - e^{-2t}\sin(t)u(t) \tag{38}$$

(β′) Όμοια, εχουμε

$$X(s) = \frac{1}{s+2},\ \ Y(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+3}$$

άρα

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{-4(s+2)}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}$$

με

$$A = H(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{-4(s+2)}{(s+3)}\Big|_{s=-1} = -2$$

και

$$B = H(s)(s+3)\Big|_{s=-3} = \frac{-4(s+2)}{(s+1)}\Big|_{s=-3} = -2$$

και αρα

$$H(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{-2}{s+3} \longleftrightarrow h(t) = -2e^{-t}u(t) - 2e^{-3t}u(t) \tag{39}$$

που είναι και το ζητούμενο.

2. **Εξετάστε αν τα παρακάτω συστήματα είναι ευσταθή <u>και</u> αιτιατά, και αν έχουν ευσταθές <u>και</u> αιτιατό αντίστροφο.**

   (α′) $\mathbf{H(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+1)(s^2+2s+10)}}$

   (β′) $\mathbf{H(s) = \frac{s^2+2s-3}{(s+3)(s^2+2s+5)}}$

   (γ′) $\mathbf{H(s) = \frac{s^2-3s+2}{(s+2)(s^2-2s+8)}}$

   (δ′) $\mathbf{H(s) = \frac{(s^2+2s)}{(s^2+3s-2)(s^2+s+2)}}$

   <u>Λύση:</u>
   Για να είναι ένα σύστημα ευσταθές και αιτιατό, θα πρέπει να έχει πεδίο σύγκλισης που να είναι δεξιόπλευρο ($\Re\{s\} > \sigma_{max}$) , όπου σ_{max} το πραγματικό μέρος του μεγαλύτερου πόλου, και να περιλαμβάνει τον κατακόρυφο άξονα $j\omega$, δηλ. το σ_{max} πρέπει να είναι στο αριστερό ημιεπίπεδο. Με άλλα λόγια, όλοι οι πόλοι του συστήματος, $s_k = \sigma_k + j\omega_k$, πρέπει να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο $\sigma_k < 0$.

   (α′) Προφανώς οι οροι $s+1$ σε αριθμητή και παρονομαστή απαλείφονται, και άρα μένει το

   $$H(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+10} \tag{40}$$

   Για το σύστημα αυτό, όλοι οι πόλοι, $s = -1 \pm 3j$, βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο, και αν επιλέξουμε $\Re\{s\} > -1$, τοτε το σύστημα είναι ευσταθές και αιτιατό. Για το αντίστροφο σύστημα,

   $$H^{inv}(s) = \frac{s^2+2s+10}{s+2} \tag{41}$$

   ο πόλος ειναι στη θέση $s = -2$, άρα βρίσκεται στο αριστερό ημιεπίπεδο, και αν επιλέξουμε $\Re\{s\} > -2$, τότε το αντίστροφο σύστημα είναι ευσταθές και αιτιατό.

   (β′) Για το σύστημα

   $$H(s) = \frac{s^2+2s-3}{(s+3)(s^2+2s+5)} = \frac{(s+3)(s-1)}{(s+3)(s^2+2s+5)} = \frac{s-1}{s^2+2s+5} \tag{42}$$

   έχουμε ότι οι πόλοι του είναι στις θέσεις $s = -1 \pm 2j$, άρα αν επιλέξουμε $\Re\{s\} > -1$, τότε το σύστημα είναι ευσταθές και αιτιατό. Για το αντίστροφο σύστημα,

   $$H^{inv}(s) = \frac{s^2+2s+5}{s-1} \tag{43}$$

   βλέπουμε οτι οι πόλοι του είναι στη θέση $s = 1$, και άρα οποιο πεδίο σύκλισης και να διαλέξουμε (είτε $\Re\{s\} > 1$ είτε $\Re\{s\} < 1$) το σύστημά μας δεν μπορεί να ειναι και ευσταθές και αιτιατό.

(γ′) Για το σύστημα

$$H(s) = \frac{s^2 - 3s + 2}{(s+2)(s^2 - 2s + 8)} \tag{44}$$

βλέπουμε οτι έχει πόλους στις θέσεις $s = -2, 1 \pm j\sqrt{7}$. Άρα δεν υπάρχει πεδίο σύγκλισης που να δινει ευσταθές και αιτιατό σύστημα. Το αντίστροφο σύστημα,

$$H^{inv}(s) = \frac{(s+2)(s^2 - 2s + 8)}{s^2 - 3s + 2} \tag{45}$$

έχει πόλους στις θέσεις $s = 1, 2$, και άρα επίσης δεν μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό, για κανένα πιθανό πεδίο σύγκλισης.

(δ′) Για το σύστημα

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s}{(s^2 + 3s - 2)(s^2 + s + 2)} \tag{46}$$

βλέπουμε ότι οι πόλοι του είναι στις θέσεις $s = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}, -0.5 \pm j\sqrt{\frac{7}{4}}$. Άρα δεν υπάρχει πεδίο συγκλισης που να δίνει ευσταθές και αιτιατό σύστημα. Για το αντίστροφο,

$$H^{inv}(s) = \frac{(s^2 + 3s - 2)(s^2 + s + 2)}{s^2 + 2s} \tag{47}$$

παρατηρούμε ότι οι πόλοι βρίσκονται στις θέσεις $s = 0, -2$, άρα λόγω δεν υπάρχει πεδιο σύγκλισης που να δίνει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο συστημα.

Σημείωση:
Είπαμε στη θεωρία ότι μια μόνο κατηγορία ευσταθών και αιτιατών συστημάτων έχουν ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο: τα συστήματα *Ελάχιστης Φάσης*. Θυμίζουμε ότι τα συστήματα *Ελάχιστης Φάσης* είναι αυτά που έχουν όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά στο αριστερό ημιεπίπεδο. Άρα η παραπάνω άσκηση θα μπορούσε να απαντηθεί για τα αντίστροφα συστήματα $H^{inv}(s)$ εξετάζοντας απλά αν όλοι οι πόλοι και όλα τα μηδενικά του κάθε $H(s)$ είναι στο αριστερό ημιεπίπεδο. Αν είναι, τότε θα έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο $H^{inv}(s)$, χωρίς να χρειάζεται να βρούμε ποιό είναι και που έχει τους πόλους του. Αν δεν είναι, τότε δε θα έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο.

3. **Σχεδιάστε την απόκριση πλάτους για τα παρακάτω συστήματα**

(α′) $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \dfrac{\mathbf{s}}{\mathbf{s^2 + 2s + 101}}$

(β′) $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \dfrac{\mathbf{s^2 + 16}}{\mathbf{s + 1}}$

(γ′) $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \dfrac{\mathbf{s - 1}}{\mathbf{s + 1}}$

χρησιμοποιώντας τη σχέση μεταξύ πόλων, μηδενικών, και του κατακόρυφου άξονα στο μιγαδικό επίπεδο.

Λύση:
Θα έχουμε

(α′) Η απόκριση πλάτους θα είναι

$$|H(\omega)| = \frac{|\omega|}{|j(\omega - 10) + 1||j(\omega + 10) + 1|} \tag{48}$$

Άρα θα είναι $H(0) = 0$ και $H(\pm 10) \approx \pm\frac{1}{2}$.

(β′) Η απόκριση πλάτους θα είναι

$$|H(\omega)| = \frac{|j(\omega+4)||j(\omega-4)|}{|j\omega-1|} \tag{49}$$

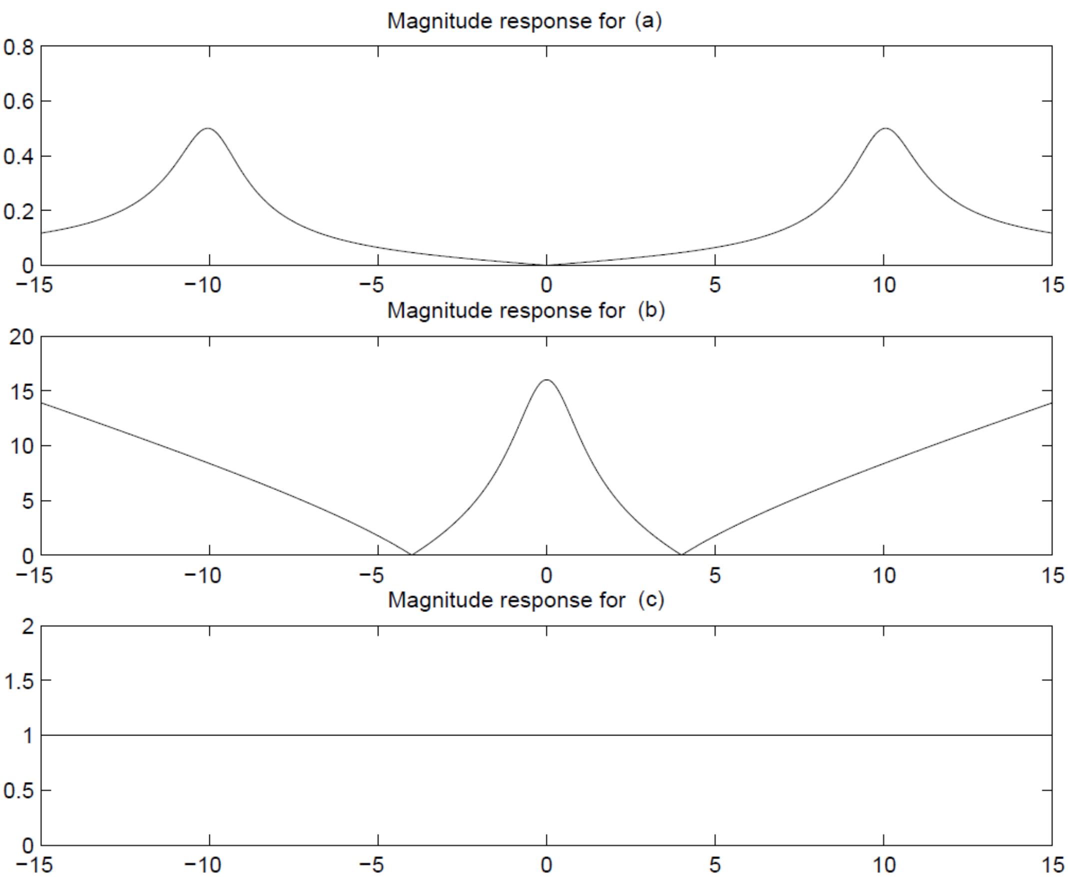
Άρα θα είναι $H(0) = 16$ και $H(\pm 4) = 0$.

(γ′) Η απόκριση πλάτους θα είναι

$$|H(\omega)| = \frac{|j\omega-1|}{|j\omega+1|} = \frac{\sqrt{\omega^2+1}}{\sqrt{\omega^2+1}} = 1 \tag{50}$$

άρα το σύστημα είναι all-pass.

Οι αποκρίσεις πλάτους των παραπάνω συστημάτων φαίνονται στο Σχήμα 8.



Σχήμα 8: Απόκριση Πλάτους Άσκησης 7.3

4. **Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ενός σήματος $\mathbf{x(t)}$ ορίζεται ως**

$$\mathbf{r(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x(\tau)x(t+\tau)d\tau}$$

(α′) **Γράψτε το παραπάνω ολοκλήρωμα με τη μορφή συνέλιξης.**

(β′) **Χρησιμοποιήστε το παραπάνω αποτέλεσμα για να βρείτε το μετασχ. Laplace του $\mathbf{r(t)}$.**

(γ′) **Αν το $\mathbf{x(t)}$ είναι πραγματικό και το $\mathbf{X(s)}$ έχει δυο πόλους, εκ των οποίων ο ενας είναι στη θέση $\mathbf{s = \sigma_p + j\omega_p}$, βρείτε τη θέση όλων των πόλων του $\mathbf{R(s)}$.**

Λύση:

(α′) Έχουμε

$$\begin{aligned} r(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t+\tau)d\tau \quad (\text{Θέτω } u=-\tau) \\ &= -\int_{+\infty}^{-\infty} x(-u)x(t-u)du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(-u)x(t-u)du \\ &= x(-t)*x(t) \end{aligned} \tag{51}$$

που είναι και το ζητούμενο. Άρα η αυτοσυσχέτιση δεν είναι τιποτα περισσότερο από τη συνέλιξη του σήματος με το ανεστραμμένο ως προς τον κατακόρυφο άξονα εαυτό του.

(β′) Είναι

$$r(t) = x(-t)*x(t) \longleftrightarrow R(s) = X(-s)X(s) \tag{52}$$

(γ′) Αφού το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό, τότε οι πόλοι του $X(s)$ είναι συζυγώς συμμετρικοί, κι έτσι θα έχουμε $s = \sigma_p \pm j\omega_p$. Όμως, οι πόλοι του $X(-s)$ είναι οι $s = -\sigma_p \pm j\omega_p$, και άρα συνολικά οι πόλοι του $R(s) = X(s)X(-s)$ είναι οι $s = \pm\sigma_p \pm j\omega_p$.

5. **Θεωρήστε το σύστημα**

$$\mathbf{H(s) = \frac{(s+2)(s-1)}{(s+3)(s+4)(s+5)}}$$

(α′) **Έχει το παραπάνω σύστημα ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα;**

(β′) **Εκφραστε το $\mathbf{H(s)}$ ως το γινόμενο δυο συστημάτων: ενός συστήματος Ελάχιστης Φάσης, $\mathbf{H_{min}(s)}$, και ενός συστήματος All-pass, $\mathbf{H_{ap}(s)}$, το οποίο θα πρέπει να έχει έναν πόλο και ένα μηδενικό.**

(γ′) **Θεωρηστε το αντίστροφο σύστημα του συστήματος Ελάχιστης Φάσης που βρήκατε παραπάνω, $\mathbf{H_{min}^{inv}(s)}$. Μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό;**

(δ′) **Σχεδιάστε την απόκριση πλάτους του νέου συστήματος, $\mathbf{G(s) = H(s)H_{min}^{inv}(s)}$.**

Λύση:

(α′) Τα μηδενικά του $H(s)$ βρίσκονται στις θέσεις $s = -2, 1$. Αφού ένα μηδενικό από αυτά είναι στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο, το αντίστροφο σύστημα δεν μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό.

(β′) Τα συστήματα Ελάχιστης Φάσης έχουμε δει ότι έχουν όλους τους πόλους και τα μηδενικά στο αριστερό ημιεπίπεδο. Τα συστήματα All-pass έχουν τους πόλους και τα μηδενικά σε συμμετρία γύρω από τον κατακόρυφο άξονα $j\omega$, δηλ. αν ένας πόλος βρίσκεται στη θέση $s = \sigma_p + j\omega_p$, τότε πρέπει να υπάρχει κι ένα μηδενικό στη θέση $s = -\sigma_p + j\omega_p$. Οπότε, στη δική μας παραγοντοποίηση, το σύστημα Ελάχιστης Φάσης θα πάρει όλους τους πόλους και τα μηδενικά του $H(s)$ που βρίσκονται στο αριστερο ημιεπίπεδο. Το σύστημα All-pass θα πρέπει έπειτα να είναι τέτοιο ώστε να έχει όλους τους υπόλοιπους πόλους και μηδενικά του $H(s)$, αλλά επειδή θα πρέπει

να έχει αναγκαστικά και πόλους/μηδενικά στις συμμετρικές θέσεις ως προς $j\omega$, που προφανώς το αρχικό $H(s)$ δεν έχει, θα πρέπει αυτά να τα ''ακυρώσουμε'', βάζοντας κατάλληλους πόλους και μηδενικά στο συστημα Ελάχιστης Φάσης, προσέχοντας βέβαια να μην πέφτουν στο δεξιό ημιεπίπεδο. Δηλαδή:
Οι πόλοι και τα μηδενικά του $H(s)$ που είναι στο αριστερό ημιεπίπεδο είναι οι $p = -3, -4, -5$ (όλοι δλδ) και $z = -2$ (το ένα από τα δυο μηδενικά), αντίστοιχα. Άρα το σύστημα Ελάχιστης Φάσης θα ειναι το

$$H_{min}(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s+4)(s+5)}$$

Το σύστημα All-pass θα πάρει το εναπομείναν μηδενικό, $z = 1$, αλλά επειδή είπαμε οτι στα All-pass συστήματα, οι πόλοι και τα μηδενικά έρχονται σε συμμετρια γύρω από τον $j\omega$, θα πρέπει το σύστημα να έχει και έναν πόλο στη θέση $p = -1$. Άρα

$$H_{ap}(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

Όμως έτσι όπως είναι τώρα κατασκευασμένα τα συστήματα, το γινόμενο $H_{min}(s)H_{ap}(s)$ δεν είναι το ίδιο με το $H(s)$, γιατι υπάρχει ο πόλος στη θέση $p = -1$ που εισήχθη στο All-pass σύστημα. Δείτε:

$$\begin{aligned} H_{dec}(s) &= H_{min}(s)H_{ap}(s) \\ &= \frac{s+2}{(s+3)(s+4)(s+5)}\frac{s-1}{s+1} \\ &= \frac{(s+2)(s-1)}{(s+1)(s+3)(s+4)(s+5)} \\ &\neq \frac{(s+2)(s-1)}{(s+3)(s+4)(s+5)} = H(s) \end{aligned} \tag{53}$$

Το πρόβλημα, οπως είπαμε και βλέπετε και παραπάνω, είναι ο πόλος στο $p = -1$, που μπήκε υποχρεωτικά στο All-pass σύστημα. Όμως, ο πόλος αυτός βρίσκεται στο αριστερό ημιεπίπεδο, άρα μπορούμε να τον ''ακυρώσουμε'', βάζοντας στο σύστημα Ελάχιστης Φάσης ένα μηδενικό εκει, έτσι ώστε στο γινόμενο των δυο, να απαλειφθούν. Μια τέτοια ενέργεια διατηρεί το σύστημα Ελάχιστης Φάσης ως τέτοιο, ενώ πλέον το γινόμενό μας είναι σωστό. Βέβαια, το σύστημα Ελάχιστης Φάσης έχει τώρα ένα μηδενικό που δεν υπήρχε στο αρχικό σύστημα $H(s)$. Αυτό δεν έχει σημασία, άλλωστε και το All-pass σύστημα έχει έναν πόλο που δεν υπήρχε στο αρχικό σύστημα $H(s)$. Εμάς μας ενδιαφέρει το γινόμενο των δυο συστημάτων $H_{min}(s)H_{ap}(s)$ να δίνει το αρχικό σύστημα $H(s)$, και κάθε ένα σύστημα να έχει τα χαρακτηριστικά που πρέπει να έχει. Αρα

$$H_{min}(s) = \frac{(s+2)(s+1)}{(s+3)(s+4)(s+5)} \tag{54}$$

$$H_{ap}(s) = \frac{s-1}{s+1} \tag{55}$$

Βλέπετε οτι το γινόμενο των παραπάνω είναι ίσο με το $H(s)$. Άρα αυτά είναι τα συστήματα που ζητούνται.

(γ′) Το αντίστροφο σύστημα του $H_{min}(s)$ είναι το $H_{min}^{inv}(s)$ και ειναι

$$H_{min}^{inv}(s) = \frac{(s+3)(s+4)(s+5)}{(s+2)(s+1)} \tag{56}$$

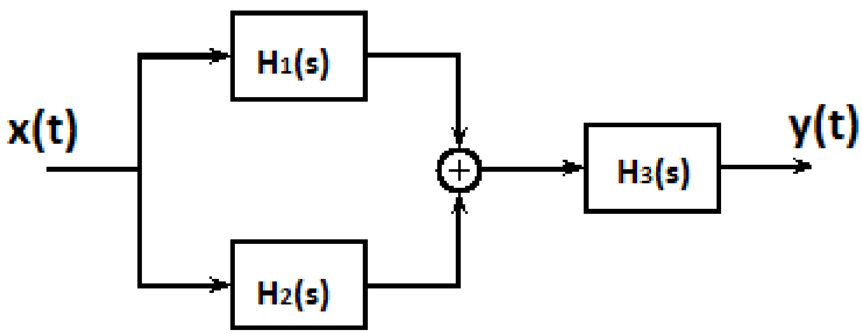
Οι πόλοι είναι στις θέσεις $s = -1, -2$, και βρίσκονται στο αριστερο ημιεπίπεδο, και έτσι το σύστημα μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό, επιλέγοντας $\Re\{s\} > -1$.

(δ′) Είναι

$$G(s) = H(s)H^{inv}_{min}(s) = \frac{s-1}{s+1} = H_{ap}(s) \tag{57}$$

άρα η απόκριση πλάτους είναι σταθερή και ίση με τη μονάδα.

6. **Έστω το ευσταθές σύστημα του Σχήματος 9. με**



Σχήμα 9: Σύστημα Άσκησης 7.6

$$\mathbf{H_1}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{s-1})(\mathbf{s-2})}, \quad \mathbf{H_2}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s+2}}, \quad \mathbf{H_3}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{s-1}}{\mathbf{s+1}}$$

(α′) **Βρείτε το συνολικό σύστημα $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ και το πεδίο συγκλισής του.**

(β′) **Βρείτε την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος, $\mathbf{h}(\mathbf{t})$.**

(γ′) **Εξετάστε, χωρίς γνώση του συνολικού συστήματος, πότε τα συστήματα $\mathbf{H_i}(\mathbf{s})$ είναι ευσταθή, αιτιατά, και αντιστρέψιμα.**

(δ′) **Βρείτε τις επιμέρους κρουστικές αποκρίσεις των συστημάτων, $\mathbf{h_i}(\mathbf{t})$, γνωρίζοντας ότι το συνολικό σύστημα είναι ευσταθές.**

(ε′) **Γράψτε το $\mathbf{H_1}(\mathbf{s})$ ως γινόμενο δυο συστημάτων: ενός συστήματος Ελάχιστης Φάσης $\mathbf{H_1^{min}}(\mathbf{s})$ και ενός All-pass συστήματος, $\mathbf{H_1^{ap}}(\mathbf{s})$.**

<u>Λύση:</u>

(α′) Προφανώς το συνολικό σύστημα θα είναι της μορφής

$$\begin{aligned} H(s) &= (H_1(s) + H_2(s))H_3(s) \\ &= H_1(s)H_3(s) + H_2(s)H_3(s) \\ &= \frac{1}{(s-2)(s+1)} + \frac{s(s-1)}{(s+2)(s+1)} = \frac{s+2+s(s-1)(s-2)}{(s-2)(s+2)(s+1)} \\ &= \frac{s+2+s^3-2s^2-s^2+2s}{(s-2)(s+2)(s+1)} = \frac{s^3-3s^2+3s+2}{(s-2)(s+2)(s+1)} \end{aligned} \tag{58}$$

Δεδομένου ότι το σύστημα είναι ευσταθές, και οι πόλοι στις θέσεις $p = -2, -1, 2$, το πεδίο σύγκλισης δεν μπορεί να είναι άλλο από το $-1 < \Re\{s\} < 2$, δεδομένου ότι μόνο αυτό περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα $\Re\{s\} = 0$.

(β′) Το σύστημα γράφεται ως

$$H(s) = \frac{s^3 - 3s^2 + 3s + 2}{(s-2)(s+2)(s+1)} = \frac{s^3 - 3s^2 + 3s + 2}{s^3 + s^2 - 4s - 4}$$

και επειδή η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή είναι ίση με αυτή του παρονομαστή, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα πριν κάνουμε πρώτα διαίρεση των πολυωνύμων. Άρα:

$$H(s) = 1 + \frac{-4s^2 + 7s + 6}{(s-2)(s+2)(s+1)} = 1 + G(s)$$

με

$$G(s) = \frac{-4s^2 + 7s + 6}{(s-2)(s+2)(s+1)}$$

Σε αυτόν τον όρο μπορούμε να κάνουμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, αρα

$$G(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+1}$$

με

$$\begin{aligned} A &= G(s)(s-2)\Big|_{s=2} = \frac{-4s^2 + 7s + 6}{(s+2)(s+1)}\Big|_{s=2} = \frac{1}{3} \\ B &= G(s)(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{-4s^2 + 7s + 6}{(s-2)(s+1)}\Big|_{s=-2} = -6 \\ C &= G(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{-4s^2 + 7s + 6}{(s-2)(s+2)}\Big|_{s=-1} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Άρα

$$G(s) = \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} - 6\frac{1}{s+2} + \frac{5}{3}\frac{1}{s+1}$$

οπότε συνολικά,

$$H(s) = 1 + G(s) = 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} - 6\frac{1}{s+2} + \frac{5}{3}\frac{1}{s+1}$$

Αφού έχουμε τρια γνωστά κλάσματα και το πεδίο σύγκλισης του συνολικού συστήματος είναι το $-1 < \Re\{s\} < 2$, συμπεραίνουμε ότι τα επιμέρους πεδία σύγκλισης είναι τα

i. $\Re\{s\} > -2$
ii. $\Re\{s\} > -1$
iii. $\Re\{s\} < 2$

αφού η τομή των παραπάνω μας δίνει το συνολικό πεδίο σύγκλισης. Από τα γνωστά ζεύγη μετασχ. Laplace, θα έχουμε

$$G(s) \longleftrightarrow g(t) = -\frac{1}{3}e^{2t}u(-t) - 6e^{-2t}u(t) + \frac{5}{3}e^{-t}u(t)$$

οπότε συνολικά

$$H(s) = 1 + G(s) \longleftrightarrow h(t) = \delta(t) + g(t) = \delta(t) - \frac{1}{3}e^{2t}u(-t) - 6e^{-2t}u(t) + \frac{5}{3}e^{-t}u(t) \quad (59)$$

(γ′) Για το $H_1(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s-2)}$, βλέπουμε οτι έχει πόλους στις θέσεις $p = 1, 2$, άρα για να είναι ευσταθές, πρέπει να ισχύει $\Re\{s\} < 1$. Για να ειναι αιτιατό, πρέπει $\Re\{s\} > 2$. Το αντίστροφό του είναι το

$$H_1^{inv}(s) = (s-1)(s-2) \tag{60}$$

το οποίο είναι ευσταθές και αιτιατό σε ολο το $s-$επίπεδο.

Για το $H_2(s) = \dfrac{s}{s+2}$, βλέπουμε ότι έχει πόλους στη θέση $s - -2$, και άρα είναι ευσταθές όταν $\Re\{s\} > -2$, και το ίδιο πρέπει να ισχύει για να είναι και αιτιατό. Το αντίστροφό του είναι το

$$H_2^{inv}(s) = \frac{s+2}{s} \tag{61}$$

το οποίο έχει δυο δυνατά πεδία σύγκλισης, $\Re\{s\} > 0$ και $\Re\{s\} < 0$. Προσέξτε, σε περίπτωση που το $H_2(s)$ έχει πεδίο σύγκλισης $R_{H_2} = \{\Re\{s\} < -2\}$, είναι δηλαδή ασταθές και αντι-αιτιατό, τότε ορίζεται αντίστροφο σύστημα μόνον όταν αυτό έχει πεδίο σύγκλισης το $R_{H_2^{inv}} = \{\Re\{s\} < 0\}$, γιατι σε αντίθετη περίπτωση δεν υπάρχει επικάλυψη με το πεδίο σύγκλισης του $H_2(s)$.

Για το $H_3(s) = \dfrac{s-1}{s+1}$, βλέπουμε ότι έχει έναν πόλο στη θέση $s = -1$, άρα για να είναι ευσταθές πρέπει να ισχυει $\Re\{s\} > -1$, ενώ το ίδιο πρέπει να ισχύει και για αιτιατότητα. Το αντίστροφό του είναι το

$$H_3^{inv}(s) = \frac{s+1}{s-1} \tag{62}$$

το οποίο έχει δυο δυνατά πεδία σύγκλισης, $\Re\{s\} > 1$ και $\Re\{s\} < 1$. Κι εδώ προσέξτε, όπως και πριν, σε περίπτωση που το $H_3(s)$ έχει πεδίο σύγκλισης $R_{H_3} = \{\Re\{s\} < -1\}$, είναι δηλαδή ασταθές και αντι-αιτιατό, τότε ορίζεται αντίστροφο σύστημα μόνον όταν αυτό έχει πεδίο σύγκλισης το $R_{H_3^{inv}} = \{\Re\{s\} < 1\}$, γιατι σε αντίθετη περίπτωση δεν υπάρχει επικάλυψη με το πεδίο σύγκλισης του $H_3(s)$.

(δ′) Δεδομένου ότι το συνολικό σύστημα είναι ευσταθές, και ότι προκύπτει από τομές των επιμέρους συστημάτων, τα επιμέρους συστήματα πρέπει να είναι ευσταθή. Άρα τα πεδια σύγκλισης θα ειναι $R_{H_1} = \{\Re\{s\} < 1\}$, $R_{H_2} = \{\Re\{s\} > -2\}$, και $R_{H_3} = \{\Re\{s\} > -1\}$. Άρα θα είναι

$$\begin{aligned}
H_1(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)}, \quad \Re\{s\} < 1 \longleftrightarrow h_1(t) &= L^{-1}\Big\{\frac{-1}{s-1} + \frac{1}{s-2}\Big\} \\
&= e^t u(-t) - e^{2t}u(-t) && (63) \\
H_2(s) = \frac{s}{s+2}, \quad \Re\{s\} < -2 \longleftrightarrow h_2(t) &= L^{-1}\Big\{s\frac{1}{s+2}\Big\} \\
&= \frac{d}{dt}e^{2t}u(-t) \\
&= 2e^{2t}u(-t) - \delta(t) && (64) \\
H_3(s) = \frac{s-1}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1 \longleftrightarrow h_3(t) &= L^{-1}\Big\{\frac{s-1}{s+1}\Big\} \\
&= L^{-1}\Big\{s\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+1}\Big\} \\
&= \Big(\frac{d}{dt}e^{-t}u(t)\Big) - e^{-t}u(t) \\
&= \delta(t) - e^{-t}u(t) - e^{-t}u(t) \\
&= \delta(t) - 2e^{-t}u(t) && (65)
\end{aligned}$$

(ε′) Το $H_1(s)$ έχει μόνο πόλους, στις θέσεις $s = 1, 2$. Προφανώς αυτοί οι πόλοι δεν μπορούν να ανήκουν στο $H_1^{min}(s)$, γιατι αυτοί βρίσκονται στο δεξιό ημιεπίπεδο. Άρα υποχρεωτικά θα ανήκουν στο All-pass σύστημα. Όμως στο All-pass συστημα θα έχουμε και μηδενικά στις θέσεις $s = -1, -2$. Άρα το All-pass θα είναι της μορφης

$$H_1^{ap}(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s-1)(s-2)} \tag{66}$$

Το σύστημα Ελάχιστης Φάσης θα έχει φυσικά μόνο πόλους που ακυρώνουν τα μηδενικά που υπάρχουν στο All-pass σύστημα. Άρα

$$H_1^{min}(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \tag{67}$$

Άρα τελικά

$$H_1(s) = H_1^{min}(s)H_1^{ap}(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\frac{(s+1)(s+2)}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{(s-1)(s-2)} \tag{68}$$