

Ασκήσεις με τον Μετασχηματισμό Laplace

Επιμέλεια: Γιώργος Καφεντζής
Υποψ. Διδάκτωρ Τμήμ. Η/Υ
Πανεπιστήμιο Κρήτης

4 Ιουνίου 2013

1. Έστω το σήμα

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (1)$$

(α') Να υπολογίσετε το μετασχ. Fourier του.

(β') Να υπολογίσετε το μετασχ. Laplace του. Επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος, χρησιμοποιώντας τον μετασχ. Laplace.

Λύση:
Είναι

(α') Είναι

$$x(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \leftrightarrow X(\omega) = AT \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) e^{-j\omega T/2} = AT \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) e^{-j\omega T/2} \quad (2)$$

(β') Είναι

$$X(s) = \int_0^T A e^{-st} dt = \frac{A}{-s} e^{-st} \Big|_0^T = -\frac{A}{s} (e^{-sT} - 1) = \frac{A}{s} (1 - e^{-sT}) \quad (3)$$

Επειδή το σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας, το πεδίο σύγκλισής του είναι όλο το s -επίπεδο. Επειδή το πεδίο σύγκλισης περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα, ας βρούμε το μετασχ. Fourier μέσω του μετασχ. Laplace που μόλις υπολογίσαμε. Είναι

$$\begin{aligned} X(s) \Big|_{\sigma=0} &= \frac{A}{j\omega} (1 - e^{-j\omega T}) = \frac{A}{j\omega} e^{-j\omega T/2} (e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}) \\ &= \frac{A}{j\omega} e^{-j\omega T/2} 2j \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \\ &= \frac{A}{\omega/2} e^{-j\omega T/2} \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \\ &= \frac{AT}{\omega T/2} e^{-j\omega T/2} \sin(\omega T/2) \\ &= AT \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) e^{-j\omega T/2} \end{aligned} \quad (4)$$

που είναι το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα με αυτό που υπολογίσαμε παραπάνω.

2. Υπολογίστε το μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = e^{at}u(t) + e^{2at}u(-t), \quad \alpha > 0 \quad (5)$$

Υπολογίζεται για το σήμα αυτό ο μετασχ. Fourier μέσω του μετασχ. Laplace; Αν ναι, βρείτε τον. Αν όχι, εξηγήστε.

Λύση:
Είναι

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt + \int_{-\infty}^0 e^{(2a-s)t} dt \\ &= \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2a-s} e^{(2a-s)t} \Big|_{-\infty}^0 \\ &= \frac{1}{a-s} 0 - \frac{1}{a-s} + \frac{1}{2a-s} - \frac{1}{2a-s} 0 \\ &= -\frac{1}{a-s} + \frac{1}{2a-s} \\ &= \frac{a-s-2a+s}{(2a-s)(a-s)} \\ &= \frac{-a}{(s-2a)(s-a)} \end{aligned} \quad (6)$$

αν $a - \Re\{s\} < 0$ και $2a - \Re\{s\} > 0 \Leftrightarrow a < \Re\{s\} < 2a$.

Τα δυο πεδία σύγκλισης προέκυψαν απ' τους γνωστούς περιορισμούς στα ολοκληρώματα, όταν $t = \pm\infty$, ώστε αυτά να συγκλίνουν. Επειδή έχουμε άθροισμα σημάτων, το πεδίο σύγκλισης θα είναι η τομή των επιμέρους πεδίων σύγκλισης.

Ο μετασχηματισμός Fourier δεν μπορεί να υπολογιστεί μέσω του μετασχ. Laplace, γιατί το πεδίο σύγκλισης δεν περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα $\Re\{s\} = \sigma = 0$.

3. Δείξτε ότι ο μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = te^{-\alpha t}u(t), \quad \alpha > 0$$

είναι ο

$$X(s) = \frac{1}{(s+\alpha)^2}, \quad \Re\{s\} > -\alpha$$

$$\text{Δίνεται ότι } \int te^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha t} (-\alpha t - 1)$$

Λύση:

Είναι

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} te^{-at}u(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} te^{-(a+s)t} dt \\
 &= \frac{e^{-(a+s)t}}{(a+s)^2} \left(-(a+s)t - 1 \right) \Big|_0^{+\infty} \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{te^{-(a+s)t}}{a+s} - \frac{e^{-(a+s)t}}{(a+s)^2} \right) + \frac{1}{(a+s)^2} \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-te^{(a+s)t}}{a+s} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-(a+s)t}}{(a+s)^2} + \frac{1}{(a+s)^2} \\
 &= \frac{1}{a+s} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-t}{e^{(a+s)t}} - 0 + \frac{1}{(a+s)^2} \\
 &= \frac{1}{(a+s)^2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-1}{e^{(a+s)t}} + \frac{1}{(a+s)^2} \\
 &= 0 + \frac{1}{(a+s)^2} = \frac{1}{(a+s)^2}, \text{ αν } \Re\{s\} + a > 0 \Leftrightarrow \Re\{s\} > -a. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Εδώ, το πεδίο σύγκλισης προέκυψε από τους γνωστούς περιορισμούς, ώστε τα όρια να φθίνουν στο μηδέν. Επίσης, στο τελευταίο όριο, εφαρμόσαμε τον κανόνα του De L' Hospital για να το λύσουμε.

4. Δείξτε ότι ο μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = tu(t)$$

είναι

$$X(s) = \frac{1}{s^2}, \quad \Re\{s\} > 0.$$

$$\text{Δίνεται ότι } \int te^{-at} dt = \frac{1}{a^2} e^{-at} (-at - 1)$$

Λύση:
Είναι

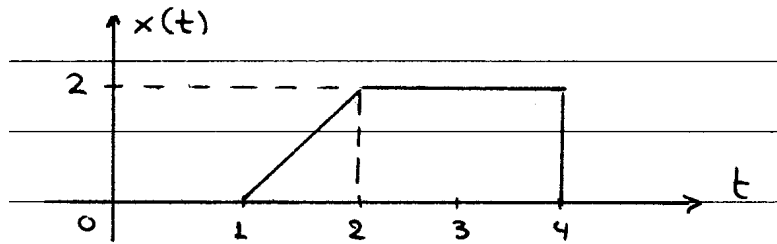
$$\begin{aligned}
 X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} tu(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} te^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{s^2} (-st - 1) \Big|_0^{\infty} = \left(-\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right) \Big|_0^{\infty} \\
 &= -\frac{te^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} - \frac{e^{-st}}{s^2} \Big|_0^{\infty} = -\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{te^{-st}}{s} + \frac{1}{s^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{st}} + \frac{1}{s^2} \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{se^{st}} + \frac{1}{s^2} = 0 + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}, \quad \Re\{s\} > 0. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Εδώ και πάλι χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα του De L' Hospital, ενώ το πεδίο σύγκλισης προκύπτει κατά τα γνωστά (πλέον :-).

5. Δείξτε ότι ο μετασχ. Laplace του σήματος 1 είναι ο

$$X(s) = \frac{2}{s^2} (e^{-s} - e^{-2s}) - \frac{2}{s} e^{-4s}$$

$$\text{Δίνεται ότι } \int te^{-at} dt = \frac{1}{a^2} e^{-at} (-at - 1)$$



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 5.5

Λύση:

1ος τρόπος:

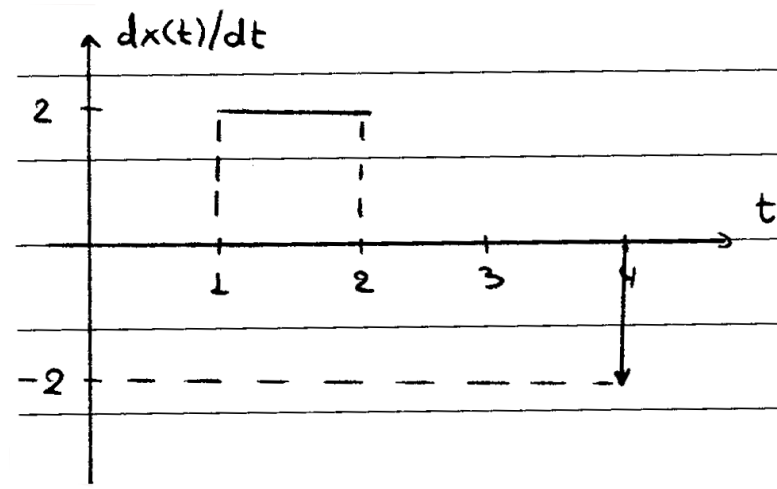
Είναι

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \int_1^2 (2t-2)e^{-st} dt + \int_2^4 2e^{-st} dt = \int_1^2 2te^{-st} dt - \int_1^2 2e^{-st} dt + \int_2^4 2e^{-st} dt \\
 &= 2 \frac{e^{-st}}{s^2} (-st-1) \Big|_1^2 + 2 \frac{e^{-st}}{s} \Big|_1^2 - 2 \frac{e^{-st}}{s} \Big|_2^4 \\
 &= -2 \frac{e^{-2s}}{s^2} + 2 \frac{e^{-s}}{s^2} - 2 \frac{e^{-4s}}{s} \\
 &= \frac{2}{s^2} (e^{-s} - e^{-2s}) - \frac{2}{s} e^{-4s}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Το πεδίο σύγκλισης είναι όλο το s -επίπεδο, αφού το $x(t)$ είναι πεπερασμένο.

2ος τρόπος:

Είναι



Σχήμα 2: Παράγωγος Άσκησης 5.5

$$\begin{aligned}
 \frac{dx(t)}{dt} &= 2 \operatorname{rect}\left(\frac{t-\frac{3}{2}}{1}\right) - 2\delta(t-4) \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \frac{2}{s} e^{-\frac{3}{2}s} (e^{\frac{s}{2}} - e^{-\frac{s}{2}}) - 2e^{-4s} \\
 &= \frac{2}{s} e^{-s} - \frac{2}{s} e^{-2s} - 2e^{-4s}
 \end{aligned} \tag{10}$$

Ισχύει ότι

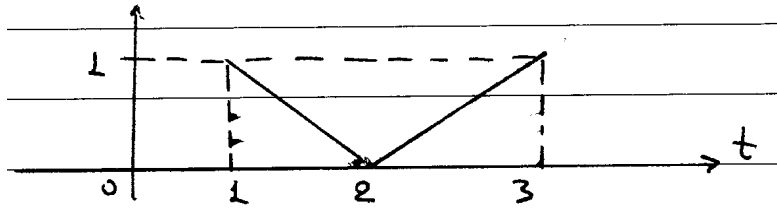
$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0^-) = sX(s)$$

Άρα

$$\frac{2}{s}(e^{-s} - e^{-2s}) - 2e^{-4s} = sX(s) - x(0^-) \Leftrightarrow X(s) = \frac{2}{s^2}(e^{-s} - e^{-2s}) - \frac{2}{s}e^{-4s} \quad (11)$$

Ο δεύτερος τρόπος λύσης είναι πιο εύκολος, με την προϋπόθεση ότι θα παραγωγιστεί σωστά το σχήμα και θα εφαρμόσετε σωστά την ιδιότητα.

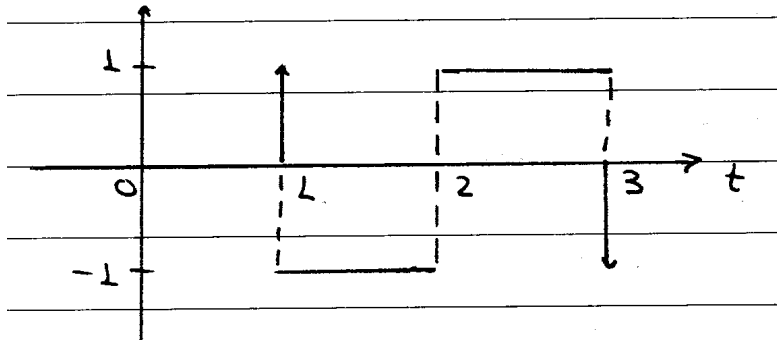
6. Να υπολογιστεί ο μετασχ. Laplace του σήματος που φαίνεται στο σχήμα 3.



Σχήμα 3: Σχήμα Άσκησης 5.6

Λύση:

Παραγωγίζοντας, έχουμε το σήμα του σχήματος 4. Είναι



Σχήμα 4: Παράγωγος σήματος Άσκησης 5.6

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0^-) &= \mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \mathcal{L}\left\{\delta(t-1) - \text{rect}\left(\frac{t-\frac{3}{2}}{1}\right)\right\} + \text{rect}\left(\frac{t-\frac{5}{2}}{1}\right) - \delta(t-3) \\ &= e^{-s} - \frac{1}{s}(1 - e^{-s}) + \frac{1}{s}(1 - e^{-s})e^{-2s} - e^{-3s} \Leftrightarrow \\ sX(s) &= e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s}e^{-2s} + \frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s}e^{-3s} - e^{-3s} \\ &= e^{-s}\left(1 - \frac{1}{s}\right) + e^{-2s}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s}\right) - e^{-3s}\left(\frac{1}{s} + 1\right) \Leftrightarrow \\ X(s) &= \frac{e^{-s}(s-1)}{s^2} + 2\frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}(s+1)}{s^2} \end{aligned} \quad (12)$$

Το σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας, άρα το πεδίο σύγκλισης είναι όλο το s -επίπεδο.

7. Έστω

$$\mathbf{X}(s) = \frac{3s + 5}{s^2 + 3s + 2}$$

με **ROC** : $-2 < \Re\{s\} < -1$. Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Laplace, $x(t)$.

Λύση:

Προφανώς δε θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό για να βρούμε τον αντιστρ. μετασχ. Laplace, αλλά θα χρησιμοποιήσουμε ήδη γνωστά μας ζεύγη μετασχηματισμών, σπάζοντας το μεγάλο κλάσμα σε μικρότερα. Ισχύει ότι η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερη απ' την αντίστοιχη του παρονομαστή, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα.

Είναι:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{3s + 5}{s^2 + 3s + 2} = \frac{3s + 5}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{A_1}{s + 1} + \frac{A_2}{s + 2} \\ A_1 &= X(s)(s + 1) \Big|_{\sigma=-1} = \frac{3s + 5}{s + 2} \Big|_{\sigma=-1} = 2 \\ A_2 &= X(s)(s + 2) \Big|_{\sigma=-2} = \frac{3s + 5}{s + 1} \Big|_{\sigma=-2} = 1 \end{aligned}$$

Άρα θα είναι

$$X(s) = 2 \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{s + 2}$$

Το πεδίο σύγκλισης δίδεται ότι είναι

$$\text{ROC} : -2 < \Re\{s\} < -1 \Leftrightarrow \Re\{s\} > -2 \cap \Re\{s\} < -1$$

Άρα, γνωρίζοντας ότι το $X(s)$ είναι άθροισμα δυο σημάτων της παραπάνω μορφής, με πεδία σύγκλισης τα δυο παραπάνω, θέλουμε να βρούμε τα δυο σήματα στο χρόνο. Από τους πίνακες των ζευγών μετασχηματισμών, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} e^{-2t}u(t) &\leftrightarrow \frac{1}{s + 2}, \quad \Re\{s\} > -2 \\ -e^{-t}u(-t) &\leftrightarrow \frac{1}{s + 1}, \quad \Re\{s\} < -1 \end{aligned}$$

Άρα τελικά

$$x(t) = e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(-t) \tag{13}$$

είναι το σήμα που ψάχνουμε.

8. Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχ. Laplace του σήματος

$$\mathbf{X}(s) = \frac{-3}{(s + 2)(s - 1)}$$

όταν:

(α') **ROC** : $-2 < \Re\{s\} < 1$

(β') **ROC** : $\Re\{s\} > 1$

(γ') ROC : $\Re\{s\} < -2$

Σε κάθε περίπτωση, σχεδιάστε την περιοχή σύγκλισης.

Λύση:
Είναι

$$X(s) = \frac{-3}{(s+2)(s-1)} = \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{s-1}$$

με

$$A_1 = X(s)(s+2) \Big|_{s=-2} = \frac{-3}{s-1} \Big|_{s=-2} = 1$$

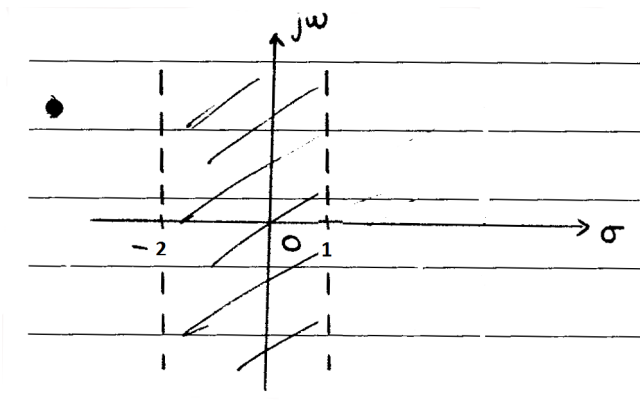
$$A_2 = X(s)(s-1) \Big|_{s=1} = \frac{-3}{s+2} \Big|_{s=1} = -1$$

Ανάλογα με τα πεδία σύγκλισης που δίνονται, θα καθορισθεί και το σήμα στο χρόνο που θα προκύψει.

(α') Άρα

$$X(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-1} \xrightarrow[-L^{-1}]{-2 < \Re\{s\} < 1 = \{-2 < \Re\{s\}\} \cap \{\Re\{s\} < 1\}} x(t) = e^{-2t}u(t) + e^t u(-t) \quad (14)$$

Το πεδίο σύγκλισης φαίνεται στο σχήμα 5.



Σχήμα 5: 1ο Πεδίο Σύγκλισης Άσκησης 5.8

(β') Άρα

$$X(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-1} \xrightarrow[-L^{-1}]{\Re\{s\} > 1 = \{\Re\{s\} > -2\} \cap \{\Re\{s\} > 1\}} x(t) = e^{-2t}u(t) - e^t u(t) \quad (15)$$

Το πεδίο σύγκλισης φαίνεται στο σχήμα 6.

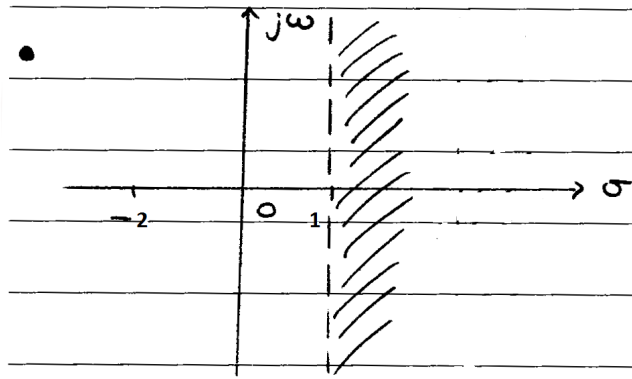
(γ') Άρα

$$X(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-1} \xrightarrow[-L^{-1}]{\Re\{s\} < -2 = \{\Re\{s\} < -2\} \cap \{\Re\{s\} < 1\}} x(t) = -e^{-2t}u(-t) + e^t u(-t) \quad (16)$$

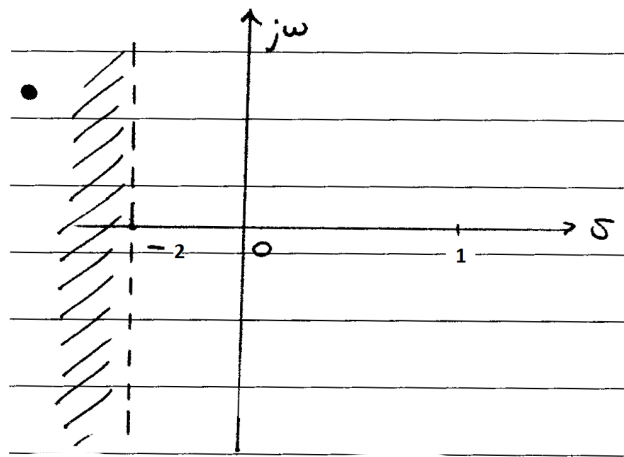
Το πεδίο σύγκλισης φαίνεται στο σχήμα 7.

9. Ο μετασχ. Laplace δίνεται από τη σχέση

$$X(s) = \frac{s+2}{s^2 - 2s - 3}$$



Σχήμα 6: 2ο Πεδίο Σύγκλισης Άσκησης 5.8



Σχήμα 7: 3ο Πεδίο Σύγκλισης Άσκησης 5.8

- (α') Για όλα τα δυνατά πεδία σύγκλισης, βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Laplace, $x(t)$.
- (β') Σε ποιά περίπτωση υπολογίζεται ο μετασχ. Fourier; Υπολογίστε τον.

Λύση:
Είναι

- (α') Οι πόλοι του παρονομαστή είναι οι $s_1 = 3, s_2 = -1$, όπως εύκολα διαπιστώνουμε. Άρα

$$X(s) = \frac{s+2}{(s-3)(s+1)} = \frac{A_1}{s-3} + \frac{A_2}{s+1}$$

Τα A_1, A_2 δίνονται από τις σχέσεις

$$A_1 = X(s)(s-3) \Big|_{s=3} = \frac{s+2}{s+1} \Big|_{s=3} = \frac{5}{4}$$

$$A_2 = X(s)(s+1) \Big|_{s=-1} = \frac{s+2}{s-3} \Big|_{s=-1} = -\frac{1}{4}$$

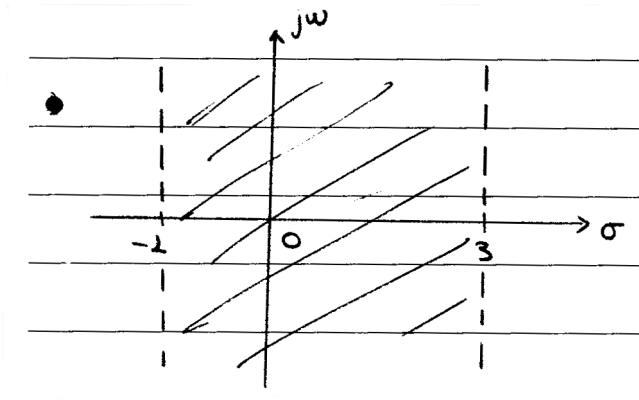
Άρα έχουμε

$$X(s) = -\frac{1}{4} \frac{1}{s+1} + \frac{5}{4} \frac{1}{s-3}$$

με πιθανά πεδία σύγκλισης τα

$$ROC = \begin{cases} \Re\{s\} < -1, \\ \Re\{s\} > 3, \\ -1 < \Re\{s\} < 3 \end{cases}$$

- Για την περίπτωση $\Re\{s\} < -1$, χρειαζόμαστε η τομή των πεδίων σύγκλισης των δυο σημάτων να μας δίνει το ημιεπίπεδο $\sigma < -1$. Αυτό γίνεται μόνον αν $\{\Re\{s\} < 3\} \cap \{\Re\{s\} < -1\}$ (σχήμα 8). Γι' αυτά τα δυο πεδία σύγκλισης, θα έχουμε



Σχήμα 8: 1ο Πεδίο Σύγκλισης Άσκησης 5.9

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}e^{-t}u(-t) &\xrightarrow[\mathcal{L}]{\Re\{s\} < -1} \frac{1}{4} \frac{1}{s+1} \\ -\frac{5}{4}e^{3t}u(-t) &\xrightarrow[\mathcal{L}]{\Re\{s\} < 3} \frac{5}{4} \frac{1}{s-3} \end{aligned}$$

Άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι το

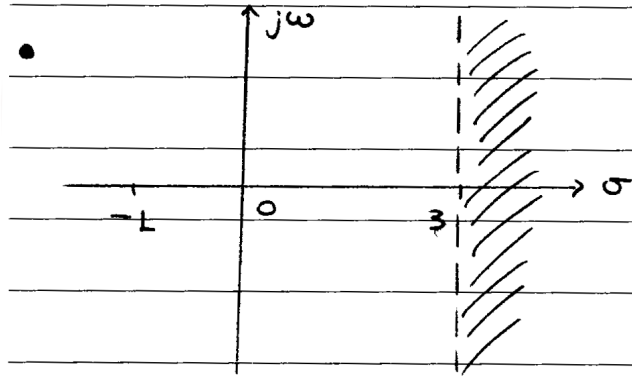
$$x(t) = \frac{1}{4}e^{-t}u(-t) - \frac{5}{4}e^{3t}u(-t) \quad (17)$$

- Για την περίπτωση $\Re\{s\} > 3$, χρειαζόμαστε η τομή των πεδίων σύγκλισης των δυο σημάτων να μας δίνει το ημιεπίπεδο $\sigma > 3$. Αυτό γίνεται μόνον αν $\{\Re\{s\} > 3\} \cap \{\Re\{s\} > -1\}$ (σχήμα 9). Γι' αυτά τα δυο πεδία σύγκλισης, θα έχουμε

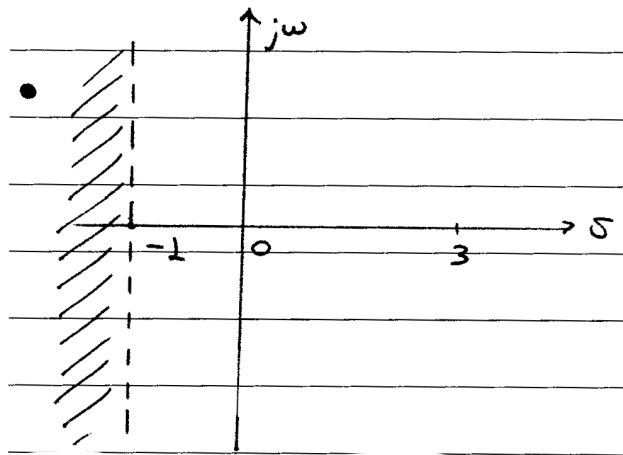
$$\begin{aligned} \frac{1}{4}e^{-t}u(t) &\xrightarrow[\mathcal{L}]{\Re\{s\} > -1} \frac{1}{4} \frac{1}{s+1} \\ \frac{5}{4}e^{3t}u(t) &\xrightarrow[\mathcal{L}]{\Re\{s\} > 3} \frac{5}{4} \frac{1}{s-3} \end{aligned}$$

Άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι το

$$x(t) = -\frac{1}{4}e^{-t}u(t) + \frac{5}{4}e^{3t}u(t) \quad (18)$$



Σχήμα 9: 2ο Πεδίο Σύγκλισης Άσκησης 5.8



Σχήμα 10: 3ο Πεδίο Σύγκλισης Άσκησης 5.8

- Για την περίπτωση $-1 < \Re\{s\} < 3$, χρειαζόμαστε η τομή των πεδίων σύγκλισης των δυο σημάτων να μας δίνει το ημιεπίπεδο $-1 < \sigma < 3$. Αυτό γίνεται μόνον αν $\{\Re\{s\} < 3\} \cap \{\Re\{s\} > -1\}$ (σχημα 10). Γι' αυτά τα δυο πεδία σύγκλισης, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}e^{-t}u(t) &\xrightarrow[\mathcal{L}]{\Re\{s\} > -1} \frac{1}{4s+1} \\ -\frac{5}{4}e^{3t}u(-t) &\xrightarrow[\mathcal{L}]{\Re\{s\} < 3} \frac{5}{4s-3} \end{aligned}$$

Άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι το

$$x(t) = -\frac{1}{4}e^{-t}u(t) - \frac{5}{4}e^{3t}u(-t) \quad (19)$$

- (β') Ο μετασχηματισμός Fourier υπολογίζεται μόνο στην περίπτωση $ROC = -1 < \Re\{s\} < 3$, γιατί μόνο σε αυτό το πεδίο περιλαμβάνεται ο άξονας των φανταστικών, $\sigma = 0$. Άρα για $\sigma = 0$, θα έχουμε

$$X(s)\Big|_{\sigma=0} = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega - 3)} \quad (20)$$

10. Υπολογίστε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 7\frac{dy(t)}{dt} + 12y(t) = x(t)$$

με αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$, $\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = -2$ και $x(t) = u(t)$.

Λύση:

Παίρνουμε το μετασχ. Laplace των δυο μερών της εξίσωσης:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} + 7\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + 12\mathcal{L}\{y(t)\} &= \mathcal{L}\{x(t)\} \\ s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0) + 7sY(s) - 7y(0^-) + 12Y(s) &= X(s) \\ s^2Y(s) - (-2) + 7sY(s) + 12Y(s) &= X(s) \\ Y(s)(s^2 + 7s + 12) &= X(s) - 2 \\ Y(s) &= \frac{1 - 2s}{s(s^2 + 7s + 12)} \\ Y(s) &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{s+3} \end{aligned} \tag{21}$$

Θα είναι

$$\begin{aligned} A &= Y(s)s \Big|_{s=0} = \frac{1}{12} \\ B &= Y(s)(s+4) \Big|_{s=-4} = -9 \\ C &= Y(s)(s+3) \Big|_{s=-3} = 7 \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{12} \frac{1}{s} - 9 \frac{1}{s+4} + 7 \frac{1}{s+3} \rightarrow \\ y(t) &= \frac{1}{12} u(t) - 9e^{-4t} u(t) + 7e^{-3t} u(t) \\ &= \left(\frac{1}{12} - 9e^{-4t} + 7e^{-3t} \right) u(t) \end{aligned} \tag{22}$$

Παρατήρηση:

Χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = s^n X(s) - s^{n-1}x(0^-) - \dots - x^{(n-1)}(0^-)$$

11. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχ. Laplace της

$$X(s) = \frac{3s + 2}{s^2 + 2s + 10}$$

Λύση:

Είναι

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{3s + 2}{s^2 + 2s + 10} = \frac{3s + 2}{(s - (-1 + 3j))(s - (-1 - 3j))} \\ &= \frac{A}{s - (-1 + 3j)} + \frac{A^*}{s - (-1 - 3j)} \end{aligned}$$

Τα A, A^* δίνονται από

$$A = X(s)(s - (-1 + 3j)) \Big|_{s=-1+3j} = \frac{3s+2}{s - (-1 - 3j)} \Big|_{s=-1+3j} = \frac{3}{2} + j\frac{1}{6}$$

$$A^* = \frac{3}{2} - j\frac{1}{6}$$

Οπότε

$$X(s) = \left(\frac{3}{2} + j\frac{1}{6}\right) \frac{1}{s - (-1 + 3j)} + \left(\frac{3}{2} - j\frac{1}{6}\right) \frac{1}{s - (-1 - 3j)}$$

Οι πιθανοί πόλοι είναι οι $s_0 = -1 - 3j, s_1 = s_0^* = -1 + 3j$, οι οποίοι βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία, $\sigma = -1$. Άρα τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι τα $\Re\{\sigma\} > -1, \Re\{\sigma\} < -1$. Ανάλογα με αυτά τα πεδία σύγκλισης, θα έχουμε και τα αντίστοιχα $x(t)$. Βρείτε τα! :-)

12. Για ένα σήμα και το μετασχηματισμό Laplace του γνωρίζετε ότι:

- (α) το σήμα στο χρόνο είναι πραγματικό και άρτιο
- (β) έχει 4 πόλους και κανένα μηδενικό στο μιγαδικό επίπεδο
- (γ) ένας πόλος βρίσκεται στο $s = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$
- (δ) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 4$

Βρείτε το $X(s)$.

Λύση:

Προφανώς το $X(s)$ θα είναι της μορφής:

$$X(s) = \frac{A}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)}$$

Δίδεται όμως ότι το σήμα είναι πραγματικό και άρτιο, άρα θα είναι

$$x(t) = x^*(t) \leftrightarrow X(s) = X^*(s^*) \text{ και } x(t) = x(-t) \leftrightarrow X(s) = X(-s)$$

Άρα αν έχει έναν πόλο στη θέση s_k , θα έχει επίσης έναν πόλο στη θέση $-s_k$ (από τη σχέση του άρτιου σήματος). Όμοια, αν έχει έναν πόλο στη θέση $-s_k$ θα έχει επίσης έναν πόλο στη θέση $-s_k^*$ (από τη σχέση του πραγματικού σήματος). Γνωρίζουμε ότι έχει έναν πόλο s_1 , άρα θα έχει κι έναν $-s_1$, κι έναν $-s_1^*$ και έναν s_1^* . Οπότε το σήμα θα γράφεται:

$$X(s) = \frac{A}{(s - s_1)(s - s_1^*)(s + s_1)(s + s_1^*)}$$

Μένει να βρούμε το A .

Δίνεται ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 4$$

Όμως ξέρουμε ότι

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-0t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 4 \Leftrightarrow$$

$$4 = \frac{A}{(0 - s_1)(0 - s_1^*)(0 + s_1)(0 + s_1^*)} = \frac{A}{|s_1|^2|s_1|^2} = \frac{A}{\frac{1}{4}} = \frac{A}{\frac{1}{16}} \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

Άρα το σήμα που ψάχνουμε είναι το

$$X(s) = \frac{\frac{1}{4}}{(s - \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}})(s + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}})(s - \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}})(s + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}})} \quad (23)$$

13. Σας δίνονται τα παρακάτω στοιχεία για ένα πραγματικό σήμα $x(t)$ και το μετασχ. Laplace του.

- (α) Το $X(s)$ έχει ακριβώς δυο πόλους
- (β) Το $X(s)$ δεν έχει κανένα μηδενικό
- (γ) Το $X(s)$ έχει πόλο στο $s = -1 + j$
- (δ) Το $e^{2t}x(t)$ δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμο
- (ε) $X(0) = 8$

Βρείτε το $X(s)$ και την περιοχή σύγκλισης.

Λύση:

Λύστε το! :-)

Hint: Βρείτε πρώτα τη μαθηματική μορφή του $X(s)$. Βρείτε τα πιθανά πεδία σύγκλισης. Τέλος, το (δ') στοιχείο αξιοποιήστε το για να βρείτε το πεδίο σύγκλισης. Ερμηνεύστε σωστά τι σημαίνει το $e^{2t}x(t)$ δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμο.

14. Αποδείξτε ότι ένα αντι-αιτιατό σήμα είναι ευσταθές αν και μόνο αν όλοι οι πόλοι του βρίσκονται στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Γενικεύστε για ένα μη-αιτιατό σύστημα, αποδεικνύοντας ότι το πεδίο σύγκλισής του πρέπει να περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα.

Λύση:

Για ένα αντι-αιτιατό σύστημα θα έχουμε

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \longleftrightarrow h(t) = - \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(-t) \quad (24)$$

όπου s_k οι πόλοι του μετασχηματισμού Laplace, θα είναι

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N |A_k| |e^{s_k t} u(-t)| dt \\ &= \sum_{k=1}^N |A_k| \int_{-\infty}^0 |e^{\sigma_k t}| |e^{j\omega t}| dt \\ &= \sum_{k=1}^N |A_k| \int_{-\infty}^0 |e^{\sigma_k t}| dt \end{aligned} \quad (25)$$

το οποίο και σημαίνει ότι το σύστημα είναι ευσταθές μόνο αν $\sigma_k > 0$. Άρα όλοι οι πόλοι του αντι-αιτιατού συστήματος πρέπει να βρίσκονται στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Γενικεύοντας για ένα οποιοδήποτε σήμα, θα έχουμε

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} + \sum_{k=1}^L \frac{B_k}{s - \lambda_k} \longleftrightarrow h(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t) - \sum_{k=1}^L B_k e^{\lambda_k t} u(-t) \quad (26)$$

όπου s_k, λ_k οι πόλοι του μετασχηματισμού Laplace, θα είναι

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^N |A_k| |e^{s_k t} u(t)| + \sum_{k=1}^L |B_k| |e^{\lambda_k t} u(-t)| \right) dt \\ &< \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N |A_k| |e^{s_k t} u(t)| dt + \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^L |B_k| |e^{\lambda_k t} u(-t)| dt \\ &= \sum_{k=1}^N |A_k| \int_0^{\infty} |e^{\sigma_k t}| |e^{j\omega t}| dt + \sum_{k=1}^L |B_k| \int_{-\infty}^0 |e^{\zeta_k t}| |e^{j\omega t}| dt \\ &= \sum_{k=1}^N |A_k| \int_0^{\infty} |e^{\sigma_k t}| dt + \sum_{k=1}^L |B_k| \int_{-\infty}^0 |e^{\zeta_k t}| dt \end{aligned} \quad (27)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα συγκλίνει όταν $\Re\{s_k\} = \sigma_k < 0$ και το δεύτερο όταν $\Re\{\lambda_k\} = \zeta_k > 0$. Αυτό σημαίνει ότι όλοι οι πόλοι s_k του αιτιατού τμήματος του σήματος βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο, ενώ όλοι οι πόλοι λ_k του αντι-αιτιατού τμήματος του σήματος βρίσκονται στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Έστω s_r ο δεξιότερος πόλος του συνόλου των πόλων s_k και λ_l ο αριστερότερος πόλος του συνόλου των πόλων λ_k . Το πεδίο σύγκλισης θα είναι $\sigma_r < \Re\{s\} < \zeta_l$, και αφού $\sigma_r < 0$ και $\zeta_l > 0$, το πεδίο σύγκλισης περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα.

Άρα

Κριτήριο ευστάθειας (και άρα ύπαρξης του μετασχ. Fourier) για τα ΓΧΑ συστήματα είναι η περίληψη του φανταστικού άξονα μέσα στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace που το περιγράφει.

15. Δίνεται η παρακάτω γραμμική διαφορική εξίσωση 2ης τάξης:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = x(t)$$

με αρχικές συνθήκες

$$y(0^-) = 2, \quad \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0^-} = 1$$

και

$$x(t) = e^{-t} u(t)$$

Βρείτε το $y(t)$.

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &\longleftrightarrow sX(s) - x(0^-) \\ \frac{d^2 x(t)}{dt^2} &\longleftrightarrow s^2 X(s) - sx(0^-) - x'(0^-) \end{aligned}$$

Είναι

$$\begin{aligned} \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) &= x(t) \longleftrightarrow \\ s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 5sY(s) - 5y(0^-) + 6Y(s) &= X(s) \\ s^2Y(s) - 2s - 1 + 5sY(s) - 10 + 6Y(s) &= X(s) \\ Y(s)(s^2 + 5s + 6) &= X(s) + 2s + 11 \\ Y(s) &= \frac{\frac{1}{s+1} + 2s + 11}{s^2 + 5s + 6} \\ Y(s) &= \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+1)(s+2)(s+3)} \end{aligned}$$

Αναλύουμε σε μερικά κλάσματα (μπορούμε κατευθείαν, γιατί η τάξη του αριθμητή είναι μικρότερη αυτής του παρονομαστή):

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

με

$$\begin{aligned} A &= (s+1)Y(s) \Big|_{s=-1} = \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+2)(s+3)} \Big|_{s=-1} = \frac{1}{2} \\ B &= (s+2)Y(s) \Big|_{s=-2} = \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+1)(s+3)} \Big|_{s=-2} = 6 \\ C &= (s+3)Y(s) \Big|_{s=-3} = \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=-3} = -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

Άρα τελικά,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} + 6 \frac{1}{s+2} - \frac{9}{2} \frac{1}{s+3} \longleftrightarrow \\ y(t) &= \frac{1}{2} e^{-t} u(t) + 6e^{-2t} u(t) - \frac{9}{2} e^{-3t} u(t) \end{aligned} \quad (28)$$

που είναι και το ζητούμενο.

16. Έστω το σήμα

$$x(t) = e^{-2t} u(t) + e^{-t} \cos(3t) u(t)$$

- (α) Να βρεθεί ο μετασχ. Laplace
- (β) Να βρεθεί η αρχική συνθήκη $x(0^+)$ μέσω του μετασχ. Laplace
- (γ) Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ μέσω του μετασχ. Laplace
- (δ) Επιβεβαιώστε τα αποτελέσματα των παραπάνω δυο ερωτημάτων υπολογίζοντας αναλυτικά τα όρια

Λύση:

(α)

$$X(s) = \mathcal{L}\{e^{-2t} u(t)\} + \mathcal{L}\{e^{-t} \cos(3t) u(t)\} = \frac{1}{s+2} + \frac{s+1}{(s+1)^2 + 9}, \quad \Re\{s\} > -1$$

και κάνοντας λίγες πράξεις, έχουμε

$$X(s) = \frac{2s^2 + 5s + 12}{s^3 + 5s^2 + 14s + 20}$$

(β')

$$\begin{aligned}x(0^+) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{2s^2 + 5s + 12}{s^3 + 5s^2 + 14s + 20} \\&= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2s^3 + 5s^2 + 12s}{s^3 + 5s^2 + 14s + 20} \\(\text{De L' Hospital}) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{6s^2 + 10s + 12}{3s^2 + 10s + 14} \\(\text{De L' Hospital}) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{12s + 10}{6s + 10} \\(\text{De L' Hospital}) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{12}{6} = 2 \iff \\x(0^+) &= 2\end{aligned}\tag{29}$$

(γ')

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s^3 + 5s^2 + 12s}{s^3 + 5s^2 + 14s + 20} = 0 \iff \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

(δ') Δικό σας. :-)

17. Έστω το αιτιατό σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = -4x(t) + 5\frac{dx(t)}{dt}$$

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(s)$, και την κρουστική απόκριση, $h(t)$, του συστήματος.

Λύση:

Θα έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) &= -4x(t) + 5\frac{dx(t)}{dt} \iff \\Y(s)(s^2 - s - 2) &= X(s)(5s - 4) \\H(s) &= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{5s - 4}{(s - 2)(s + 1)} \\&= \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s - 2}\end{aligned}$$

με

$$A = H(s)(s + 1)|_{s=-1} = \frac{5s - 4}{s - 2}|_{s=-1} = 3$$

και

$$B = H(s)(s - 2)|_{s=2} = \frac{5s - 4}{s + 1}|_{s=2} = 2$$

Οπότε

$$H(s) = \frac{3}{s + 1} + \frac{2}{s - 2} \iff h(t) = 3e^{-t}u(t) + 2e^{2t}u(t)\tag{30}$$

αφού το σύστημα είναι αιτιατό.