ΗΥ215 - Φροντιστήριο : Εισαγωγη στα Σηματα και Συστήματα

Επιμέλεια: Γιώργος Καφεντζής

10 Μαρτίου 2013

Σε αυτές τις σημειώσεις θα συζητήσουμε ορισμένα βασικά θέματα των σημάτων. Επιπλέον, θα εισάγουμε μερικές βασικές έννοιες και ποιοτικές εξηγήσεις του ''πώς και γιατί'' της θεωρίας συστημάτων, χτίζοντας έτσι ένα στερεό υπόβαθρο κατανόησης της ποσοτικής ανάλυσης που ακολουθεί στα επόμενα κεφάλαια.

1 Σήματα

Ένα **σήμα** δεν είναι τίποτα αλλο από ένα σύνολο από πληροφορίες ή από δεδομένα. Μερικά παραδείγματα περιλαμβάνουν ένα τηλεφωνικό ή τηλεοπτικό σήμα, τις μηνιαίες πωλήσεις μιας εταιρίας, ή τις ημερίσιες τιμές μιας μετοχής του χρηματιστηρίου. Σε όλα αυτά τα παραδειγματα, τα σήματα είναι συναρτησεις μιας ανεξάρτητης μεταβλητής: του χρόνου. Αυτό δεν είναι κανόνας – όταν ένα ηλεκτρικό σήμα διατρέχει το ανθρώπινο σωμα, το σημα ειναι η πυκνότητα του φορτίου, που είναι συνάρτηση του χώρου παρά του χρόνου. Σε αυτό το μάθημα, θα μας απασχολήσουν αποκλειστικά σήματα που είναι συναρτησεις του χρόνου.

2 Συστήματα

Τα σήματα μπορούν να επεξεργαστούν περαιτέρω από **συστήματα**, τα οποία μπορούν να τροποποιήσουν ή να εξάγουν πληροφορία από αυτά. Ένα σύστημα επεξεργάζεται ένα συνολο από σήματα (είσοδοι) και δίνει ένα σύνολο από αλλα σήματα (έξοδοι). Ένα σύστημα μπορεί να αποτελείται από φυσικά στοιχεία, όπως ηλεκτρικά, μηχανικά, ή υδραυλικά συστήματα (υλοποίηση σε υλικό), ή από έναν αλγόριθμο που υπολογίζει την έξοδο από ένα σήμα εισόδου (υλοποίηση σε λογισμικό).

3 Μέγεθος Σήματος

Το μέγεθος μιας οντότητας είναι ένας αριθμός που δείχνει τη δύναμη της οντότητας. Εν γένει, το πλάτος ενός σήματος αλλάζει με την πάροδο του χρόνου. Πώς γίνεται ένα σήμα που υπάρχει μόνο σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, και το πλάτος του μεταβάλλεται, να μετρηθεί με έναν αριθμό που θα μας υποδεικνύει το μέγεθός του ή τη δύναμή του; Ένας τετοιος αριθμός πρέπει να λαμβάνει υπόψη του οχι μόνο το πλάτος αλλά και τη διάρκεια του σήματος. Για παράδειγμα, αν χρειάζεται να επινοήσουμε έναν αριθμό V ως μέτρο του μεγέθους ενός ανθρώπου, πρέπει όχι μόνο να συμπεριλάβουμε το πλάτος (την περιφέρειά του), αλλά και το ύψος του. Απλοποιώντας τα πράγματα, αν υποθέσουμε ότι το σχήμα ενός ανθρώπου ειναι ένας κύλινδρος με μεταβαλλόμενη ακτίνα r (η οποία μεταβάλλεται με το ύψος h), τοτε ένας εύλογος αριθμός που μετρά το μέγεθος ενός ανθρώπου ύψους H είναι ο όγκος του,

$$V = \pi \int_0^H r^2(h)dh \tag{1}$$

3.1 Ενέργεια Σήματος

Σκεφτομενοι με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να θεωρησουμε την περιοχή κάτω από το σήμα $f(t)$ ως μια πιθανή μετρική του μεγέθους του σήματος, επειδη λαμβάνει υπόψη του όχι μόνο το πλάτος αλλά και τη διάρκεια του σήματος. Όμως μια τέτοια μετρική θα ήταν ελαττωματική. Γιατί; Διότι ένα μεγάλης διάρκειας σήμα μπορεί να έχει περιοχές πάνω από τον άξονα και περιοχές κάτω από τον άξονα που αλληλοαναιρούνται, με αποτέλεσμα η μετρική να μας δηλώνει οτι πρόκειται για μικρού μεγέθους σήμα. Αυτή η δυσκολία μπορει να ξεπεραστεί αν ορίσουμε το μέγεθος του σήματος ως την περιοχή κάτω από την καμπύλη $f^2(t)$, η οποία είναι πάντα θετική. Αυτή η μετρική λέγεται **ενέργεια σήματος**, E_f, και ορίζεται ως

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \tag{2}$$

για μιγαδικά σήματα, ενώ για πραγματικά σήματα, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \tag{3}$$

Κάποιος θα μπορούσε να σκεφτεί και άλλες μετρικές, όπως η περιοχή κάτω από την $|f(t)|$. Η μετρική που επιλέξαμε όμως είναι όχι μόνο πιο εύκολη να υπολογιστεί αλλά και έχει περισσότερο νόημα (όπως θα φανεί στη συνέχεια), γιατί είναι ενδεικτική της ενέργειας που μπορεί να εξαχθεί από το σήμα.

3.2 Ισχύς Σήματος

Η ενέργεια ενός σήματος πρέπει να είναι πεπερασμένος αριθμός ώστε να έχει νόημα. Μια αναγκαια συνθήκη για αυτό είναι το πλάτος του σήματος να τείνει στο 0 όταν $|t| \to \infty$. Αλλιώς, το ολοκλήρωμα 3 δε συγκλίνει.

Σε ορισμένες περιπτώσεις, όταν το πλάτος του σήματος δεν τεινει στο 0 όταν $|t| \to \infty$, η ενέργεια του σήματος είναι άπειρη. Τότε, μια μετρική με περισσότερο νόημα όσον αφορά το μέγεθος του σήματος θα ήταν η χρονική μέση τιμή της ενέργειας, αν υπάρχει. Αυτή η μετρική λέγεται **ισχύς σήματος**. Για ένα πραγματικό σήμα $f(t)$, ορίζουμε την ισχύ, P_f, ως

$$P_f = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt \tag{4}$$

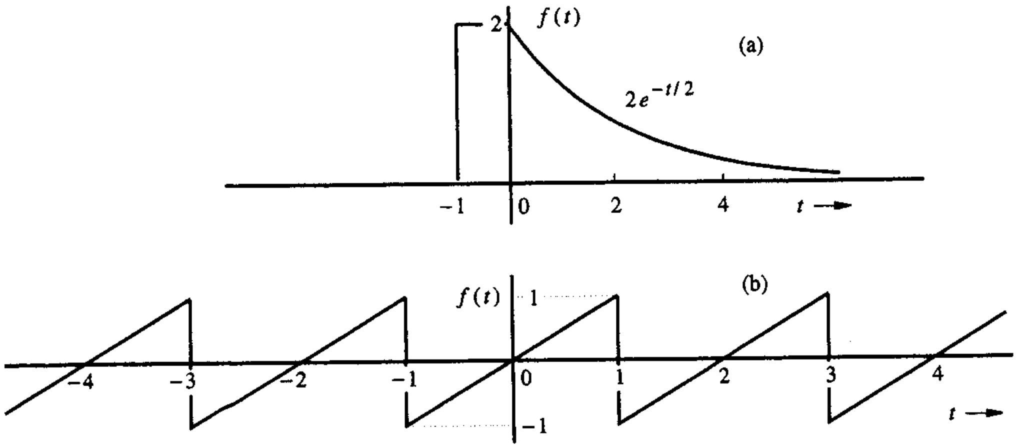
και φυσικά μπορούμε να γενικεύσουμε την παραπάνω σχέση και για μιγαδικά σήματα ως

$$P_f = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt \tag{5}$$

Παρατηρήστε οτι η ισχυς του σήματος P_f είναι η μέση τιμή του πλάτους του σήματος στο τετράγωνο. Η μέση τιμή μιας οντότητας σε ένα μεγάλο διάστημα που πλησιάζει το άπειρο υπάρχει αν η οντότητα είναι είτε περιοδική είτε εχει στατιστική κανονικότητα. Αν μια τέτοια συνθήκη δεν ικανοποιείται, η τιμή αυτή μπορεί να μην υπάρχει. Για παράδειγμα, το σήμα $f(t) = t$ αυξάνει συνεχώς όσο $t \to \infty$, και ούτε η ενέργεια ούτε η ισχύς ορίζεται για αυτό το σήμα.

Προσέξτε, οι μετρικές της ενέργειας και της ισχυος που ορίσαμε δεν έχουν μονάδα μέτρησης (όπως ίσως θα περιμένατε), γιατί δεν τις ορίσαμε με βαση την έννοια που γνωρίζετε από τη Φυσική. Οι μονάδες ενέργειας και ισχύος, όπως ορίστηκαν εδω, εξαρτώνται από τη φύση του σήματος $f(t)$. Αν το $f(t)$ είναι ένα σήμα τάσης, προφανώς η ενέργεια έχει μονάδες μέτρησης $V^2 s$ (Volts στο τετράγωνο επί seconds), και η ισχύς του έχει μονάδες μέτρησης V^2 (Volt στο τετράγωνο). Αν το σήμα $f(t)$ είναι σήμα έντασης, οι μονάδες αυτές θα είναι $A^2 s$ (Ampere στο τετράγωνο επί seconds) και A^2 (Ampere στο τετράγωνο), αντίστοιχα. Στα πλαίσια του μαθήματος δε θα μας απασχολήσουν τόσο οι μονάδες μέτρησης, μια και η ενέργεια και η ισχυς ενός σήματος θα έχουν την πιο... αφηρημένη :-) έννοια που ορίσαμε παραπάνω.

Παράδειγμα:
Βρείτε τις καταλληλες μετρικές μεγέθους των σημάτων που φαινονται στο Σχήμα 1. Στο σχήμα 1(α), το



Σχήμα 1: Παράδειγμα Σημάτων Ενέργειας - Ισχύος

πλάτος του σήματος τεινει στο μηδέν, όσο $|t| \to \infty$. Έτσι, μια κατάλληλη μετρική του μεγέθους του είναι η ενέργειά του.

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \int_{-1}^{0} 2^2 dt + \int_{0}^{\infty} 4e^{-t}dt = 4 + 4 = 8 \tag{6}$$

Στο σχήμα 1)(β), το πλάτος του σήματος ΔΕΝ τεινει στο μηδέν, όσο το $|t| \to \infty$. Όμως είναι περιοδικό, και έτσι υπάρχει η ισχύς του. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση 4 για να βρούμε την ισχύ του, αλλά μπορούμε να απλοποιήσουμε τη διαδικασια για περιοδικά σήματα, απλά παρατηρώντας ότι ένα περιοδικό σήμα επαναλαμβάνεται περιοδικά (κάθε 2 δευτερολεπτα, εν προκειμένω). Έτσι, το να βρούμε τη μέση τιμή του $f^2(t)$ σε ενα άπειρο διάστημα είναι όμοιο με το να βρούμε τη μέση τιμή σε μια μόνο περίοδο. Έτσι,

$$P_f = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f^2(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{1}{3} \tag{7}$$

που είναι και το ζητούμενο.

Παράδειγμα:
Βρείτε την ισχύ των παρακάτω σημάτων:

1. $f(t) = C\cos(\omega_0 t + \theta)$
2. $f(t) = C_1\cos(\omega_1 t + \theta_1) + C_2\cos(\omega_2 t + \theta_2),\ \omega_1 \neq \omega_2$
3. $f(t) = De^{j\omega_0 t}$

Θα είναι

1. Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Η πιο βολική μετρική για αυτό το σήμα είναι η ισχύς του. Επειδή το σήμα είναι περιοδικό, μπορούμε να υπολογίσουμε την ισχύ του μετρώντας την ενέργειά

του σε μια περίοδο T_0. Όμως, θα χρησιμοποιήσουμε εδω τον ορισμό, για να δείτε πως δουλευει. Είναι

$$\begin{aligned} P_f &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} C^2\cos^2(\omega_0 t+\theta)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{C^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2}[1+\cos(2\omega_0 t+2\theta)]dt \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{C^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2}dt + \lim_{T\to\infty}\frac{C^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos(2\omega_0 t+2\theta)dt \end{aligned} \tag{8}$$

Ο πρώτος όρος ειναι ίσος με $C^2/2$. Επίσης, ο δεύτερος όρος είναι μηδέν, γιατί το ολοκλήρωμα αναπαριστά ένα εμβαδό κάτω από το ημίτονο σε πολύ ένα μεγάλο διάστημα T, με $T\to\infty$. Αυτό το εμβαδό είναι το πολύ ίσο με το εμβαδό της μισής περιόδου, λόγω των ακυρώσεων μεταξύ των θετικών και αρνητικών περιοχών του ημιτόνου. Ο δεύτερος ορος είναι αυτό το εμβαδό πολλαπλασιασμένο με $C^2/2T$, με $T\to\infty$. Είναι ξεκάθαρο ότι αυτός ο ορος είναι μηδέν, άρα

$$P_f = \frac{C^2}{2} \tag{9}$$

Αυτό μας δείχνει ότι ένα ημίτονο με πλάτος C έχει ισχύ $C^2/2$, άσχετα με την τιμή της συχνότητας ω_0 (φυσικά πρέπει $\omega_0 \neq 0$) και της φάσης θ. Σε περίπτωση που $\omega_0 = 0$, δείξτε εσεις – εξάσκηση! :-) – ότι η ισχύς είναι ίση με C^2.

2. Θα έχουμε

$$\begin{aligned} P_f &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[C_1\cos(\omega_1 t+\theta_1)+C_2\cos(\omega_2 t+\theta_2)]^2dt \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}C_1^2\cos^2(\omega_1 t+\theta_1)dt + \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}C_2^2\cos^2(\omega_2 t+\theta_2)dt \\ &+ \lim_{T\to\infty}\frac{2C_1C_2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos(\omega_1 t+\theta_1)\cos(\omega_2 t+\theta_2)dt \end{aligned} \tag{10}$$

Τα δυο πρώτα ολοκληρώματα είναι οι ισχείς των δυο συνημιτόνων, άρα είναι ίσα με $C_1^2/2$ και $C_2^2/2$, μια και το δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα. Όμοια με το πρώτο ερώτημα, βλέπουμε οτι το τριτο ολοκλήρωμα είναι μηδέν, άρα[1]

$$P_f = \frac{C_1^2}{2}+\frac{C_2^2}{2} \tag{11}$$

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να γενικευτεί σε ένα άθροισμα ημιτόνων με <u>διακριτές</u> συχνότητες

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\cos(\omega_n t+\theta_n) \tag{12}$$

και τοτε η ισχύς θα είναι

$$P_f = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}C_n^2 \tag{13}$$

3. Σε αυτήν την περίπτωση, το σημα ειναι μιγαδικό, και άρα θα έχουμε

$$P_f = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|De^{j\omega_0 t}|^2dt \tag{14}$$

Όμως ισχυει ότι $|e^{j\omega_0 t}| = 1$, και έτσι $|De^{j\omega_0 t}|^2 = |D|^2$ και τέλος

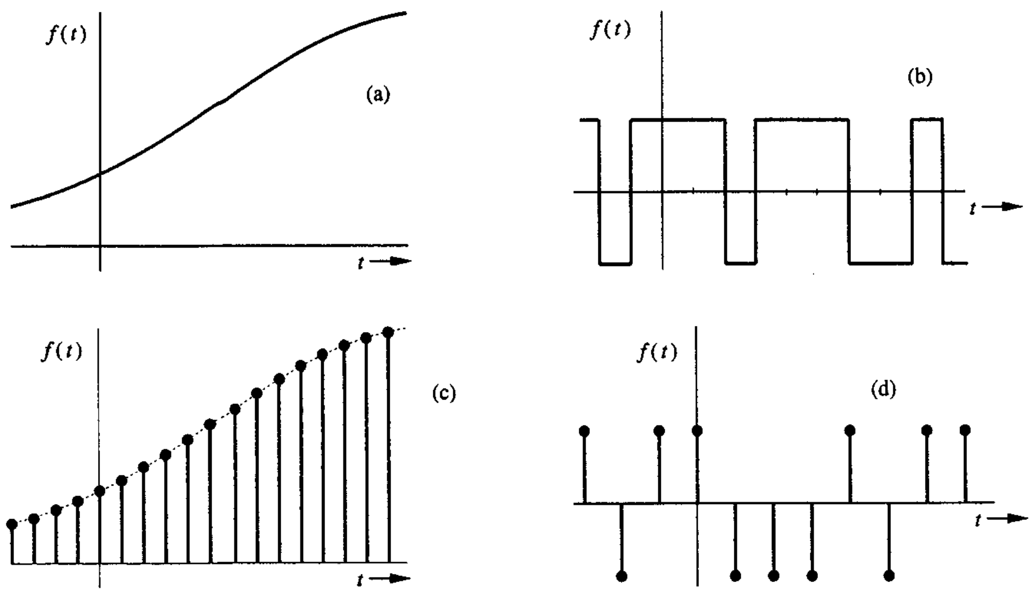
$$P_f = |D|^2 \tag{15}$$

[1] Αυτό ισχύει μόνον αν $\omega_1 \neq \omega_2$. Τι συμβαίνει όταν $\omega_1 = \omega_2$; :-)

4 Ταξινόμηση Σημάτων

Υπάρχουν πολλές κατηγορίες σημάτων. Εδω θα θεωρήσουμε μόνο τις παρακάτω κατηγορίες, που μας ενδιαφέρουν άμεσα:

1. Συνεχούς χρόνου και διακριτού χρόνου σήματα
2. Αναλογικά και ψηφιακά σήματα
3. Περιοδικά και απεριοδικά σήματα
4. Σήματα ισχύος και ενέργειας
5. Ντετερμινιστικά και Στοχαστικά σήματα



Σχήμα 2: Παρδειγματα σημάτων: a) αναλογικό, συνεχούς χρόνου, b) ψηφιακό, συνεχούς χρόνου, c) αναλογικό, διακριτού χρόνου, d) ψηφιακό, διακριτού χρόνου

4.1 Συνεχούς χρόνου και διακριτού χρόνου σήματα

Ένα σήμα που ορίζεται για κάθε τιμή του t είναι ένα σήμα συνεχούς χρόνου, και ένα σήμα που ορίζεται μόνο για διακριτές τιμές του t είναι ένα σήμα διακριτού χρόνου. Το τηλεφωνικό σήμα, το σήμα μιας βιντεοκάμερας, καθώς και το τηλεοπτικό σήμα[2] είναι σήματα συνεχούς χρόνου. Το ετήσιο ΑΕΠ σε μια εικοσαετία, οι μηνιαίες πωλήσεις μιας επιχείρησης, και οι ημερήσιες διακυμάνσεις των μετοχών είναι σήματα διακριτού χρόνου.

4.2 Αναλογικά και ψηφιακά σήματα

Η έννοια του αναλογικού σήματος συχνά μπερδεύεται με αυτήν του συνεχούς χρόνου. Ένα σήμα του οποίου το πλάτος μπορεί να πάρει οποιαδηποτε τιμή σε ένα συνεχές διάστημα είναι ένα *αναλογικό* σήμα. Αυτό σημαίνει οτι το πλάτος ενός αναλογικού σήματος μπορεί να πάρει άπειρες τιμές. Ένα *ψηφιακό* σήμα,

[2]Πριν τη Digea :-)

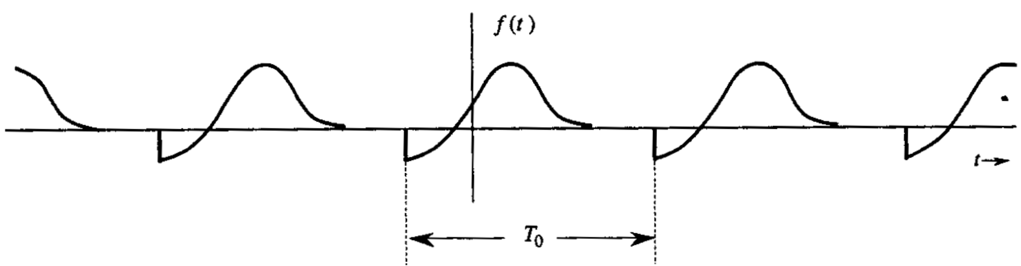
απ΄ την άλλη, είναι εκείνο του οποίο το πλάτος μπορεί να πάρει τιμές από ένα πεπερασμένο συνολο τιμών. Ένα ψηφιακό σήμα του οποίου το πλάτος μπορεί να πάρει από M τιμές, ονομάζεται M-αδικό σήμα. Το δυαδικό σήμα ($M = 2$) είναι μια υποπερίπτωση του M-αδικού σήματος. Οι όροι σήμα *συνεχούς χρόνου* και *διακριτού χρόνου* διακρίνουν τη φύση του σήματος κατά μήκος του οριζόντιου αξονα (χρόνος). Οι όροι *αναλογικό* και *ψηφιακό* σήμα διακρίνουν τη φύση του σήματος κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα (πλάτος). Έτσι, είναι ξεκάθαρο ότι ένα αναλογικό σήμα δεν είναι απαραίτητα διακριτού χρόνου, και ένα ψηφιακό σήμα δεν είναι απαραίτητα διακριτού χρόνου. Το σχήμα 2 δείχνει μερικά ενδεικτικά σήματα διαφόρων κατηγοριών. Στα πλαίσια του μαθήματος θα μας απασχολήσουν κατά κανόνα σήματα συνεχούς χρόνου.

4.3 Περιοδικά και απεριοδικά σήματα

Ένα σημα $x(t)$ λέγεται *περιοδικό* αν για μια σταθερά T_0 ισχύει

$$x(t) = x(t + T_0), \ \ \forall t \tag{16}$$

Η *μικρότερη* τιμή του T_0 που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση ονομάζεται *περίοδος* του σήματος. Ένα σήμα είναι απεριοδικό όταν δεν είναι περιοδικό. Εξ΄ ορισμού, ενα περιοδικό σήμα παραμένει αμετάβλητο όταν μετακινηθεί στο χρόνο κατά T_0. Γι΄ αυτό, ενα περιοδικό σήμα πρέπει να ξεκινάει από το $-\infty$. Έτσι, εξ΄ ορισμού ένα περιοδικό σήμα πρέπει να ξεκινάει από το $t = -\infty$ και να συνεχίζεται για πάντα. Προφανώς, τέτοια σήματα δεν υπάρχουν στη φύση ούτε μπορούν να δημιουργηθούν τεχνητά. Ένα περιοδικό σημα φαίνεται στο σχήμα 3.



Σχήμα 3: Περιοδικό σήμα με περίοδο T_0

4.4 Σήματα Ισχυος και Ενέργειας

Ένα σήμα με πεπερασμένη ενέργεια λέγεται *σήμα ενέργειας*, ενώ ένα σημα με πεπερασμένη και μη μηδενική ισχύ λέγεται *σήμα ισχύος*. Παρατηρήστε οτι ένα σήμα δεν μπορει να είναι και σήμα ενέργειας και σήμα ισχύος ταυτόχρονα. Ένα σήμα ενέργειας έχει μηδενική ισχύ και ένα σήμα ισχύος έχει άπειρη ενέργεια (προκύπτει απ΄ τους ορισμούς που έχουμε δώσει). Όμως, υπάρχουν και σήματα που δεν είναι ούτε σήματα ενέργειας ούτε σήματα ισχύος. Το σήμα $x(t) = t$ είναι ένα τέτοιο σήμα. Φυσικά, στην πράξη δεν υπάρχουν σήματα ισχύος, όλα τα σήματα που μπορούμε να δημιουργησουμε είναι σήματα ενέργειας.

4.5 Ντετερμινιστικά και Στοχαστικά σήματα

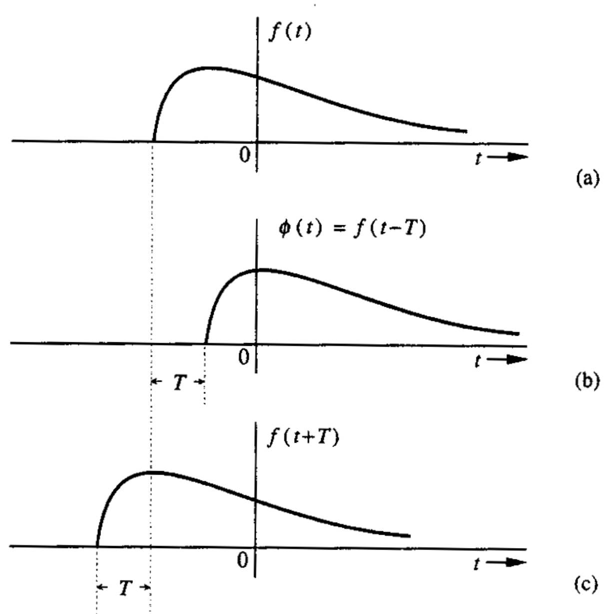
Ένα σήμα του οποίου η φυσική περιγραφή είναι πλήρως γνωστη, είτε σε μαθηματική μορφή είτε σε γραφική μορφή, λέγεται *ντετερμινιστικό* σήμα. Ένα σημα που δεν μπορεί να προβλεφθεί ακριβώς αλλά είναι γνωστο μόνο μέσω πιθανοτικής περιγραφής, όπως η μέση τιμή, η διασπορά, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κλπ, λέγεται *στοχαστικό* ή *τυχαίο* σήμα.

5 Πραξεις σημάτων πάνω στην ανεξάρτητη μεταβλητη

Εδώ θα συζητήσουμε τρεις χρήσιμες πράξεις πάνω στην ανεξάρτητη μεταβλητή των σημάτων συνεχούς χρόνου: ολίσθηση, κλιμάκωση, και αντιστροφή.

5.1 Χρονική Ολίσθηση

Θεωρήστε το σήμα $f(t)$ του σχήματος 4 και το ιδιο σήμα καθυστερημένο κατα T δευτερόλεπτα, το οποίο συμβολίζουμε με $\phi(t)$. Ό,τι συμβαίνει στο σήμα $f(t)$, συμβαίνει και στο σήμα $\phi(t)$ με καθυστέρηση



Σχήμα 4: Χρονική ολίσθηση ενός σήματος

T δευτερόλεπτα. Άρα

$$\phi(t+T) = f(t) \tag{17}$$

και

$$\phi(t) = f(t-T) \tag{18}$$

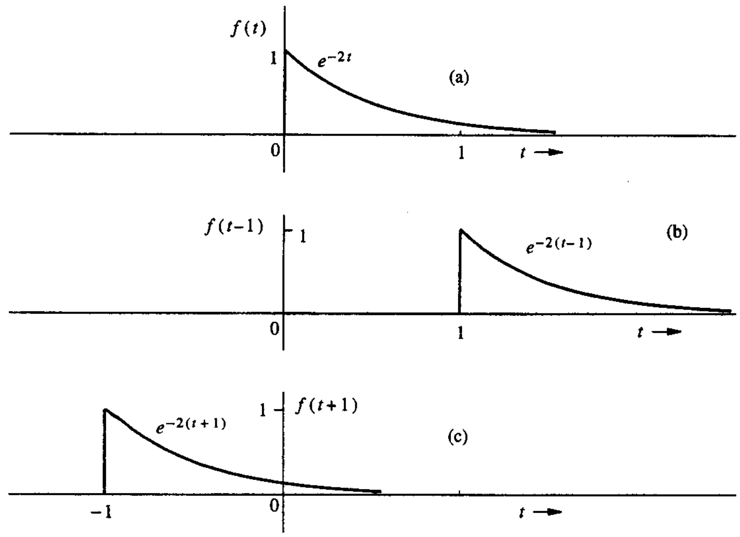
Έτσι, για να ολισθήσουμε χρονικά ένα σήμα κατά T, *αντικαθιστούμε το t με το $t-T$*. Έτσι, το $f(t-T)$ αντιπροσωπεύει το $f(t)$, έχοντας υποστει ολίσθηση κατά T δευτερόλεπτα. Αν το T είναι θετικό, η ολίσθηση είναι προς τα δεξιά (καθυστέρηση), αλλιώς η ολίσθηση είναι προς τα αριστερά (προήγηση). Έτσι, το $f(t-2)$ είναι το $f(t)$ καθυστερημένο κατα 2 δευτερόλεπτα, και το $f(t+2)$ είναι το $f(t)$ που προηγείται 2 δευτερόλεπτα. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Παράδειγμα:

Μια εκθετική συνάρτηση $f(t) = e^{-2t}$ που φαίνεται στο σχήμα 5 καθυστερεί κατά 1 δευτερόλεπτο. Σχεδιάστε και περιγράψτε μαθηματικά την ολισθημένη συνάρτηση. Επαναλάβατε αν η $f(t)$ προηγείται κατά 1 δευτερόλεπτο.

Η συνάρτηση του σχήματος μπορεί να παρασταθεί μαθηματικά ως

$$f(t) = \begin{cases} e^{-2t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{19}$$



Σχήμα 5: Παράδειγμα χρονικής ολίσθησης ενός σήματος: a) σήμα $f(t)$, b) $f(t)$ καθυστερημένο κατα 1 δευτερόλεπτο, c) $f(t)$ προηγούμενο κατά 1 δευτερόλεπτο

Έστω ότι $f_d(t) = f(t-1)$ είναι η καθυστερημένη συνάρτηση (μετατοπισμένη προς τα δεξιά) κατα 1 δευτερόλεπτο, όπως στο σχήμα 5. Η μαθηματική της περιγραφή προκύπτει αντικαθιστωντας όπου t το $t-1$. Άρα

$$f(t) = \begin{cases} e^{-2(t-1)}, & t-1 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 1 \\ 0, & t-1 < 0 \Leftrightarrow t < 1 \end{cases} \tag{20}$$

Έστω ότι $f_a(t) = f(t+1)$ είναι η συνάρτηση που προηγείται (μετατόπιση προς τα αριστερά) κατά 1 δευτερόλεπτο, όπως στο σχήμα 5. Η μαθηματική της περιγραφή προκύπτει αντικαθιστώντας το t με το $t+1$. Άρα

$$f(t) = \begin{cases} e^{-2(t+1)}, & t+1 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq -1 \\ 0, & t+1 < 0 \Leftrightarrow t < -1 \end{cases} \tag{21}$$

5.2 Χρονική Κλιμάκωση

Η συμπίεση ή η διαστολή ενός σήματος στο χρόνο είναι γνωστή ως χρονική κλιμάκωση. Θεωρήστε το σήμα $f(t)$ του σχήματος 6. Το σημα $\phi(t)$ είναι το $f(t)$ συμπιεσμένο στο χρόνο με παράγοντα 2. Έτσι, ό,τι συμβαίνει στο σήμα $f(t)$ σε κάποιο χρόνο t, επίσης συμβαίνει στο $\phi(t)$ αλλά σε χρόνο $t/2$, έτσι ώστε

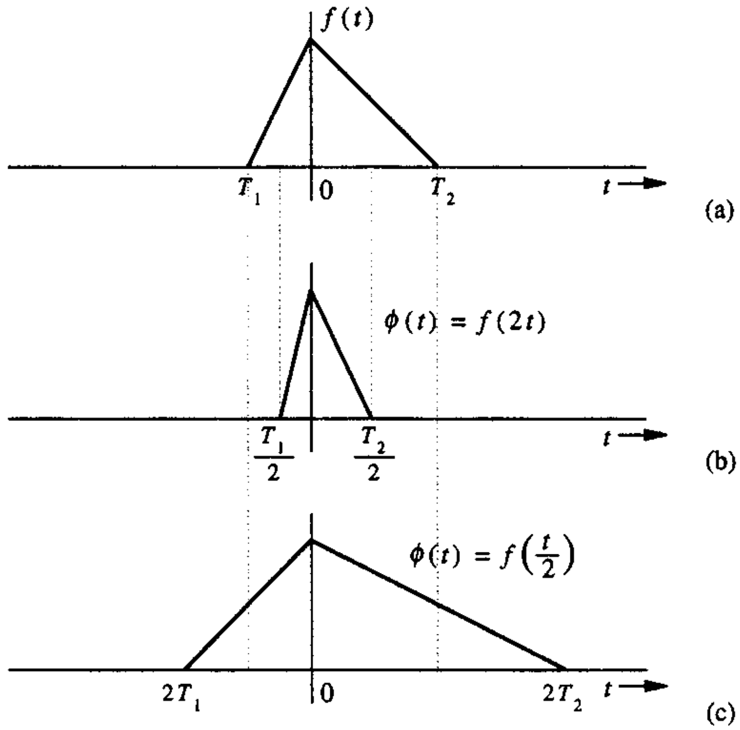
$$\phi(t/2) = f(T) \tag{22}$$

και

$$\phi(t) = f(2t) \tag{23}$$

Παρατηρήστε οτι επειδή $f(t) = 0$ στο $t = T_1$ και T_2, πρέπει να έχουμε επίσης $\phi(t) = 0$ στο $t = T_1/2$ και $T_2/2$, όπως στο σχήμα 6(b). Αν το $f(t)$ ήταν γραμμένο σε μια μαγνητοταινία, την οποία παίζαμε σε διπλάσια ταχύτητα, τότε θα είχαμε το $f(2t)$. Εν γένει, αν το $f(t)$ είναι συμπιεσμένο στο χρόνο κατά ένα παράγοντα $a > 1$, το αποτέλεσμα θα ειναι ένα $\phi(t)$ τέτοιο ώστε

$$\phi(t) = f(at) \tag{24}$$



Σχήμα 6: Χρονική κλιμάκωση ενός σήματος

Με παρόμοιο συλλογισμό, μπορούμε να δείξουμε ότι το $f(t)$ αν επεκταθεί στο χρόνο κατά έναν παράγοντα $a >$ δίνεται ως

$$\phi(t) = f(\frac{t}{a}) \tag{25}$$

Το σχήμα 6(c) δείχνει το $f(t)$ διασταλμένο κατά ένα παράγοντα 2. Παρατηρήστε ότι κατα τη χρονική κλιμάκωση, η αρχή των αξόνων $t = 0$ είναι το σημειο αναφοράς, που παραμένει αμετάβλητο, γιατί στο $t = 0$ ισχύει $f(t) = f(at) = f(0)$.

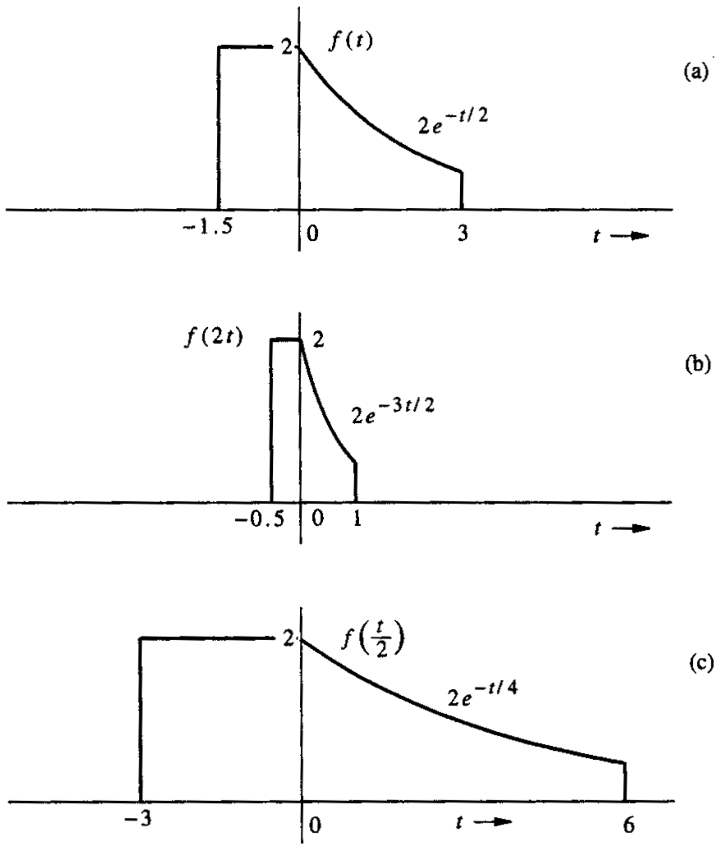
Συνοψίζοντας, *για να κάνουμε χρονική κλιμάκωση ενός σήματος κατά ενα παράγοντα a, αντικαθιστούμε το t με το at.* Αν $a > 1$, η κλιμάκωση μετατρέπεται σε χρονική συμπίεση, ενώ αν $a < 1$, η κλιμάκωση γίνεται χρονική διαστολή.

Παράδειγμα:
Το σχήμα 7(a) δείχνει ένα σήμα $f(t)$. Σχεδιάστε και περιγράψτε μαθηματικά το συμπιεσμένο κατα παράγοντα 3 σήμα. Επαναλάβατε για το διεσταλμένο κατά παράγοντα 2 σήμα.
Το σήμα $f(t)$ μπορεί να περιγραφεί ως

$$f(t) = \begin{cases} 2, & -1.5 \leq t < 0 \\ 2e^{-t/2}, & 0 \leq t < 3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{26}$$

Το σχήμα 7(b) δείχνει το σήμα $f_c(t)$, που είναι συμπιεσμένο κατα παράγοντα 3. Κατά συνέπεια, μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά ως $f(3t)$, που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε το t με το $3t$, έτσι:

$$f_c(t) = \begin{cases} 2, & -1.5 \leq 3t < 0 \Leftrightarrow -0.5 \leq t < 0 \\ 2e^{-3t/2}, & 0 \leq 3t < 3 \Leftrightarrow 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{27}$$



Σχήμα 7: Παράδειγμα χρονικής κλιμάκωσης ενός σήματος

Παρατηρήστε ότι τις χρονικές στιγμές $t = -1.5$ και $t = 3$ στο $f(t)$ ανταποκρίνονται στις χρονικές στιγμές $t = -0.5$ και $t = 1$ στο συμπιεσμένο σήμα $f(3t)$.

Το σχήμα 7(c) δείχνει το σήμα $f_e(t)$, που ειναι το $f(t)$ με χρονική διαστολή κατά παραγοντα 2. Κατα συνέπεια, μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά ως $f(t/2)$, που προκύπτει αντικαθιστωντας το t με το $t/2$. Έτσι:

$$f_e(t) = f(t/2) = \begin{cases} 2, & -1.5 \leq t/2 < 0 \Leftrightarrow -3 \leq t < 0 \\ 2e^{-t/4}, & 0 \leq t/2 < 3 \Leftrightarrow 0 \leq t < 6 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{28}$$

Παρατηρήστε ότι τις χρονικές στιγμές $t = -1.5$ και $t = 3$ στο $f(t)$ ανταποκρίνονται στις χρονικές στιγμές $t = -3$ και $t = 6$ στο συμπιεσμένο σήμα $f(t/2)$.

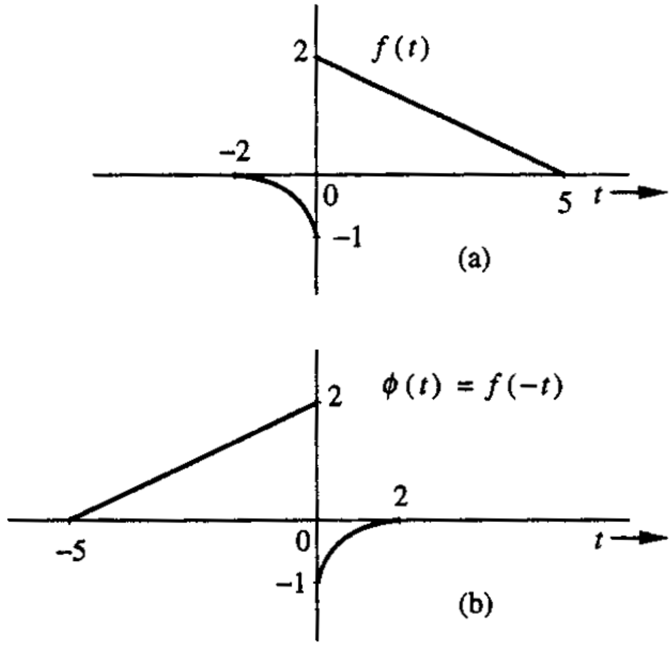
5.3 Χρονική Αντιστροφή

Θεωρήστε το σημα $f(t)$ του σχήματος 8(a). Για να αντιστρέψουμε χρονικά το $f(t)$, περιστρέφουμε κατά 180 μοίρες γύρω από τον κατακόρυφο άξονα. Αυτή η αντιστροφή μας δίνει το $\phi(t)$ του σχήματος 8(b). Παρατηρήστε ότι ό,τι συμβαίνει στο σχημα 8(a) σε ένα χρονικό σημείο t συμβαινει στο σχημα 8(b) στο χρονικό σημείο $-t$. Έτσι

$$\phi(-t) = f(t) \tag{29}$$

και

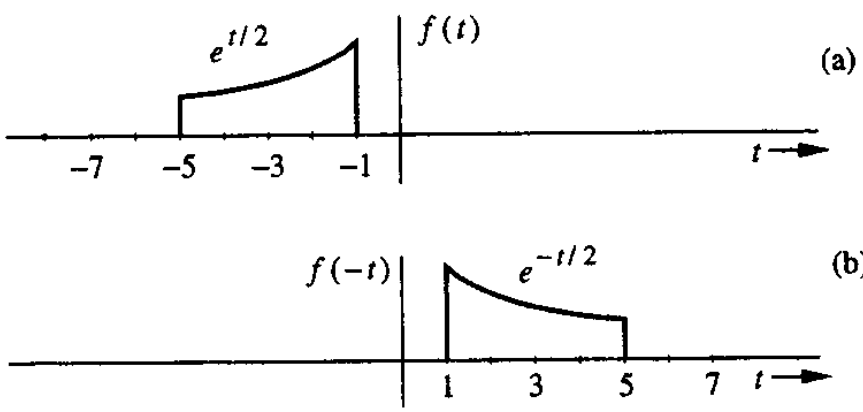
$$\phi(t) = f(-t) \tag{30}$$



Σχήμα 8: Χρονικής αντιστροφής ενός σήματος

Άρα, *για να αντιστρεψουμε χρονικά ένα σήμα, αντικαθιστούμε το t με το $-t$.* Έτσι, η αντιστροφή χρόνου του $f(t)$ μας δίνει το $f(-t)$.

Παράδειγμα:
Για το σήμα του σχήματος 9(a), σχεδιάστε το $f(-t)$, που είναι το ανεστραμμένο $f(t)$.



Σχήμα 9: Παράδειγμα χρονικής αντιστροφής ενός σήματος

Τις χρονικές στιγμές -1 και -5 του $f(t)$ αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές 1 και 5 στο $f(-t)$. Επειδή $f(t) = e^{t/2}$, έχουμε $f(-t) = e^{-t/2}$. Το σήμα $f(-t)$ φαίνεται στο σχήμα 9(b). Μπορούμε να περιγράψουμε τα σήματα ως μαθηματικά ως

$$f(t) = \begin{cases} e^{t/2}, & -1 \geq t > -5 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{31}$$

και η αντεστραμμένη έκδοση του $f(t)$, δηλ. το $f(-t)$ προκύπτει αν αντικαταστήσουμε το t με το $-t$ στο $f(t)$ ως

$$f(-t) = \begin{cases} e^{-t/2}, & -1 \geq t > -5 \Leftrightarrow 1 \leq t < 5 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{32}$$

6 Είδη Συστημάτων

Τα συστήματα διακρίνονται σε ορισμένες κατηγορίες, τις οποίες και θα συζητήσουμε εδώ. Οι κατηγορίες αυτές είναι οι εξής:

1. **Συστήματα με μνήμη**: τα συστήματα με μνήμη είναι αυτά για τα οποία η έξοδός τους απαιτεί προηγούμενες τιμές της εισόδου για να υπολογιστεί. Για παράδειγμα, το σύστημα $y(t) = 2x(t)$ είναι ένα σύστημα χωρίς μνήμη, ενώ το σύστημα $y(t) = e^{x(t-1)}$ είναι ένα σύστημα με μνήμη.

2. **Αιτιατά συστήματα**: τα αιτιατά συστήματα είναι αυτά για τα οποία ο υπολογισμός της εξόδου ΔΕΝ απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου. Για παράδειγμα, το σύστημα $y(t) = 2x(t-1) + \sin(x(t))$ είναι αιτιατό, ενώ το σύστημα $y(t) = x(t-2)^2 + 4x(t+4)$ είναι μη αιτιατό, επειδή για τον υπολογισμό του $y(t)$ απαιτείται μελλοντική τιμή της εισόδου, η $x(t+4)$. Εναλλακτικά, μπορείτε να ελέγχετε την $h(t)$, αν σας δίνεται. Αν ισχύει ότι $h(t) = 0,\ t < 0$, τότε το σύστημα είναι αιτιατιό. Μια και είπαμε ότι ένα σύστημα δεν είναι τίποτα άλλα από ένα σήμα κι αυτό, θα δείτε λίγο παρακάτω ότι ένα αιτιατό σήμα $x(t)$ ικανοποιεί τη σχέση $x(t) = 0,\ t < 0$.

3. **Γραμμικά συστήματα**: τα γραμμικά συστήματα είναι αυτά για τα οποία ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) \rightarrow y(t) &= T\{Ax_1(t) + Bx_2(t)\} \\ &= AT\{x_1(t)\} + BT\{x_2(t)\} = y_1(t) + y_2(t) \end{aligned} \tag{33}$$

   Με λόγια, γραμμικά είναι τα συστήματα στα οποία αν εφαρμόσουμε ως είσοδο ένα άθροισμα σημάτων, θα πάρουμε ως έξοδο το άθροισμα των εξόδων που θα παίρναμε αν είχαμε δώσει ως είσοδο ένα-ένα τα σήματα, κι όχι όλα μαζί ως άθροισμα. Για παράδειγμα, το σύστημα $y(t) = 2x(t+1) - 3x(t-4)$ είναι γραμμικό, ενώ το σύστημα $y(t) = \sqrt{x(t)}$ δεν είναι γραμμικό, όπως επίσης και το $y(t) = x^2(t)$ δεν είναι γραμμικό. Η ιδιότητα της γραμμικότητας είναι πολύ σημαντική.

4. **Χρονικά Αμετάβλητα συστήματα**: τα συστήματα που είναι χρονικά αμετάβλητα είναι αυτά για τα οποία ισχύει ότι η έξοδός τους ΔΕΝ εξαρτάται ρητά από το χρόνο t. Για παράδειγμα, το σύστημα $y(t) = 3x(t+2) - 2\cos(x(t-2))$ είναι χρονικά αμετάβλητο, ενώ το σύστημα $y(t) = tx(t)$ είναι χρονικά μεταβλητό.

5. **Ευσταθή συστήματα**: τα συστήματα που είναι ευσταθή είναι αυτά για τα οποία ισχύει:

$$|x(t)| < M_x \Rightarrow |y(t)| < M_y,\ \ M_x, M_y < +\infty \tag{34}$$

   Με λόγια, αν η είσοδος είναι φραγμένη κατ΄ απόλυτη τιμή, τότε και η έξοδος είναι φραγμένη κατ΄ απόλυτη τιμή. Για παράδειγμα, το σύστημα $y(t) = x(t-1) + t$ δεν είναι ευσταθές, όπως επίσης και το σύστημα $y(t) = t/x(t+2)$, ενώ το σύστημα $y(t) = \sin(x(t))$ είναι ευσταθές. Ο συγκεκριμένος ορισμός της ευστάθειας λέγεται και BIBO stablility - Bounded Input Bounded Output stability, που δηλώνει ακριβώς ό,τι είπαμε: όταν η είσοδος είναι απολύτως φραγμένη, τότε και η έξοδος είναι απολύτως φραγμένη (κι όχι απαραίτητα από τον ίδιο αριθμό-φράγμα, όπως φαίνεται παραπάνω).

Από όλες αυτές τις κατηγορίες σημάτων, τα πιο σημαντικά είναι αυτά που είναι γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα, και σε αυτά θα αναφερόμαστε από εδώ και πέρα όταν μιλάμε για συστήματα. Η ευστάθεια είναι συνήθως μια επιθυμητή ιδιότητα αλλά δε θα τη θεωρήσουμε δεδομένη στη μελέτη μας.

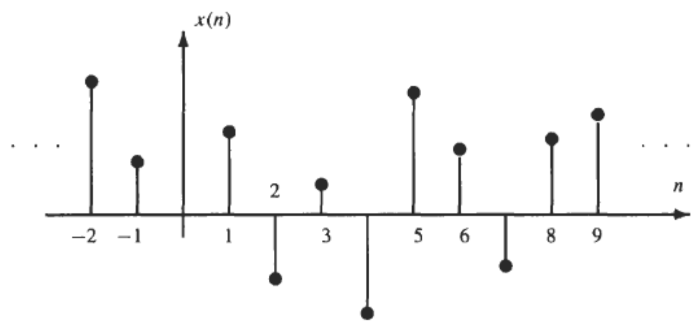
7 Σήματα και Συστήματα Διακριτού Χρόνου

7.1 Εισαγωγή

Σε αυτήν την παραγραφο, ξεκινάμε τη μελέτη μας σχετικέ με την επεξεργασία σημάτων διακριτού χρόνου αναπτύσσοντας πρώτα τις ιδέες του *σήματος διακριτού χρόνου* και του *συστήματος διακριτού χρόνου*. Θα επικεντρωθούμε σε προβλήματα που σχετίζονται με την αναπαράσταση σημάτων, πράξεις με σήματα, ιδιότητες σημάτων, ιδιότητες συστημάτων και ταξινόμηση αυτών.

7.2 Σήματα Διακριτού Χρόνου

Ένα *σήμα διακριτού χρόνου-discrete-time signal* είναι μια διατεταγμένη ακολουθία πραγματικών ή μιγαδικών τιμών. Έτσι, ένα σήμα διακριτού χρόνου είναι μια συνάρτηση της ακέραιας μεταβλητής n, που συμβολίζεται ως $x[n]$. Το σήμα διακριτού χρόνου δεν ορίζεται για μη ακέραιες τιμές του n. Έτσι, ένα πραγματικό σήμα $x[n]$ αναπαρίσταται γραφικά οπως στο σχημα 10. Τα σήματα διακριτού χρόνου συχνά



Σχήμα 10: Σήμα Διακριτού Χρόνου

προέρχονται από δειγματοληψία ενός σήματος συνεχούς χρόνου, όπως η φωνή. Για παράδειγμα, ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x_a(t)$ δειγματοληπτείται με ρυθμό $f_s = \frac{1}{T_s}$ δείγματα ανά δευτερολεπτο, και παράγει ένα δειγματοληπτημένο σήμα $x[n]$, που σχετίζεται με το $x_a(t)$ ως

$$x[n] = x_a(nT_s) \tag{35}$$

Όμως, υπάρχουν και σήματα που δεν προήλθαν κατ' αυτόν τον τρόπο. Κάποια σήματα θεωρούμε ότι υφίστανται εξ' αρχής στο διακριτό χρόνο, όπως για παράδειγμα οι ημερίσιες τιμές των μετοχών, τα ετήσια στατιστικά πληθυσμών, το πλήθος των δρομολογίων ενός λεωφορείου ανά ημέρα, κλπ.

7.2.1 Ενέργεια Σήματος

Σκεφτομενοι με τον ίδιο τρόπο όπως και στο συνεχη χρόνο

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \tag{36}$$

για μιγαδικά σήματα, ενώ για πραγματικά σήματα, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] \tag{37}$$

7.2.2 Ισχύς Σήματος

Για ένα πραγματικό σήμα $x[n]$, ορίζουμε την ισχύ, P_x, ως

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 \tag{38}$$

7.2.3 Μιγαδικές Ακολουθίες

Εν γένει, ένα σήμα διακριτού χρόνου μπορει να ειναι μιγαδικό, και μάλιστα υπάρχουν πολλές σημαντικές εφαρμογές, όπως οι ψηφιακές επικοινωνίες, όπου τα μιγαδικά σήματα έρχονται στο προσκήνιο πολύ εύκολα. Ένα μιγαδικό σήμα μπορει να εκφραστεί είτε ως άθροισμα του πραγματικού και του φανταστικού του μέρους

$$z[n] = a[n] + jb[n] = \Re\{z[n]\} + j\Im\{z[n]\} \tag{39}$$

είτε σε πολική μορφή, με όρους πλάτους και φάσης ως

$$z[n] = |z[n]|e^{j\angle z[n]} = |z[n]|e^{jarg\{z[n]\}} \tag{40}$$

Το πλάτος δίνεται από την έκφραση

$$|z[n]|^2 = \Re^2\{z[n]\} + \Im^2\{z[n]\} \tag{41}$$

ενώ η φάση από τη σχέση

$$\angle z[n] = arg\{z[n]\} = \arctan\frac{\Im\{z[n]\}}{\Re\{z[n]\}} \tag{42}$$

Αν η $z[n]$ είναι μιγαδική ακολουθία, η συζυγής της είναι η $z^*[n]$, και μπορει να υπολογιστεί απλά αλλάζοντας το πρόσημο του φανταστικού μέρους της $z[n]$:

$$z^*[n] = \Re\{z[n]\} - j\Im\{z[n]\} = |z[n]|e^{-jarg\{z[n]\}} \tag{43}$$

7.2.4 Μερικές Βασικές Ακολουθίες

Αν και τα περισσότερα σήματα που θα συναντήσουμε στην πράξη είναι πολύπλοκες συναρτήσεις του χρόνου, υπάρχουν τρια απλά αλλά πολύ σημαντικά σήματα διακριτού χρόνου που χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στην περιγραφη και αναπαράσταση πιο περιπλοκων σημάτων.

Αυτά τα σήματα είναι η μοναδιαία συνάρτηση, η βηματική συνάρτηση, και η εκθετική συνάρτηση. Η μοναδιαία συνάρτηση, που συμβολίζεται με $\delta[n]$, ορίζεται ως

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{44}$$

και παιζει τον ίδιο ρολο στην επεξεργασία σήματος διακριτού χρόνου με τη συνάρτηση Δέλτα $\delta(t)$ που έχουμε δει στην επεξεργασία σήματος συνεχούς χρόνου. Η βηματική συνάρτηση, που συμβολίζεται με $u[n]$, ορίζεται ως

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{45}$$

και σχετίζεται με τη μοναδιαία συνάρτηση ως

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] \tag{46}$$

Όμοια, η μοναδιαια συνάρτηση μπορει να γραφεί ως η διαφορά δυο βηματικών:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \tag{47}$$

Τέλος, η εκθετική συνάρτηση ορίζεται ως

$$x[n] = a^n \tag{48}$$

όπου a ένας πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός. Ιδιαίτερου ενδιαφέροντος είναι τα εκθετικά σήματα της μορφης

$$e^{j\omega_0 n} = \cos(n\omega_0) + j\sin(n\omega_0) \tag{49}$$

με ω_0 πραγματικό αριθμό. Όπως θα δούμε σύντομα, οι εκθετικές συναρτήσεις είναι πολύ χρήσιμες στην Ανάλυση Fourier των σημάτων.

7.2.5 Περιοδικές Ακολουθίες

Ένα σήμα διακριτού χρόνου μπορει να είναι ειτε περιοδικό είτε απεριοδικό. Ένα σήμα θεωρείται περιοδικό αν, για κάποιο θετικό ακέραιο N, ισχύει οτι

$$x[n] = x[n+N] \tag{50}$$

για κάθε n. Η *θεμελιώδης περιοδος* που συμβολίζεται ως N, ειναι η μικρότερος θετικός ακέραιος που ικανοποιει τη σχέση 50. Αν η σχέση αυτή δεν ικανοποειίται για κανένα ακέραιο N, το σήμα λέγεται απεριοδικό.

Αν $x_1[n]$ είναι ένα περιοδικό σημα με περίοδο N_1 και $x_2[n]$ ένα περιοδικό σήμα με περίοδο N_2, τότε το άθροισμα

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] \tag{51}$$

θα είναι πάντα περιοδικό και η περιοδός του θα είναι η

$$N = \frac{N_1 N_2}{GCD\{N_1, N_2\}} \tag{52}$$

όπου GCD$\{N_1, N_2\}$ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των N_1, N_2. Το ίδιο ισχύει και για το γινόμενο, δηλ. το σημα

$$x[n] = x_1[n]x_2[n] \tag{53}$$

θα είναι περιοδικό με περίοδο N που δίνεται από τη σχέση 52, αν και η θεμελιώδης περιοδος μπορεί να είναι μικρότερη.

Δεδομένης μιας ακολουθίας $x[n]$, ένα περιοδικό σήμα μπορει πάντα να δημιουργηθεί ‘‘αντιγράφοντασ’’ το $x[n]$ ως

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-kN] \tag{54}$$

όπου N ένας θετικός ακέραιος. Σε αυτήν την περιπτωση, το $y[n]$ είναι περιοδικό με περιοδο N.

7.2.6 Συμμετρικές Ακολουθίες

Ένα σήμα διακριτού χρόνου συχνά έχει μερικές μορφές συμμετριας που μπορούμε να εκμεταλλευτούμε. Δυο ειδών συμμετρίες μας είναι ενδιαφερουσες. Ένα πραγματικό σήμα λέγεται ότι είναι *άρτιο* αν, για κάθε n, ισχύει ότι

$$x[n] = x[-n] \tag{55}$$

ενώ ένα σήμα λέγεται ότι είναι *περιττό* αν, για κάθε n, ισχύει ότι

$$x[n] = -x[-n] \tag{56}$$

Κάθε σήμα $x[n]$ μπορει να γραφει ως το άθροισμα του άρτιου μέρους του, $x_e[n]$, και του περιττού μέρους του, $x_o[n]$, ως

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n] \tag{57}$$

με

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]) \tag{58}$$

και

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n]) \tag{59}$$

Για μιγαδικά σήματα, οι συμμετρίες είναι ελαφρά διαφορετικές. Ένα μιγαδικό σημα λέγεται ότι είναι *συζυγές συμμετρικό* (ή αλλιώς *ερμητιανό*) αν, για κάθε n, ισχύει ότι

$$x[n] = x^*[-n] \tag{60}$$

και λέγεται *συζυγές αντισυμμετρικό* αν, για κάθε n, ισχύει

$$x[n] = -x^*[-n] \tag{61}$$

7.2.7 Πράξεις ανεξάρτητης μεταβλητής πάνω σε σήματα

Συχνά, θέλουμε να τροποποιήσουμε τα σήματα μέσω του δεικτη τους, n. Δηλ. θέλουμε να κάνουμε ένα μετασχηματισμό της μορφης

$$y[n] = x[f[n]] \tag{62}$$

με $f[n]$ μια συνάρτηση του n. Οι πιο συχνοί μετασχηματισμοί περιλαμβάνουν την *ολίσθηση-μετακίνηση*, την *αναστροφή*, την *χρονική κλιμάκωση*, οι οποίες ορίζονται ως

- *Ολίσθηση:* Η ολίσθηση οριζεται ως ο μετασχηματισμός $f[n] = n - n_0$. Αν $y[n] = x[n - n_0]$, το $x[n]$ μετατοπίζεται προς τα δεξιά κατά n_0 δείγματα, αν το n_0 είναι θετικός (αναφερεται ως καθυστέρηση), ενώ μετατοπίζεται προς τα αριστερά κατά n_0 δειγματα, αν το n_0 είναι αρνητικό (αναφέρεται ως προήγηση-προπόρευση).

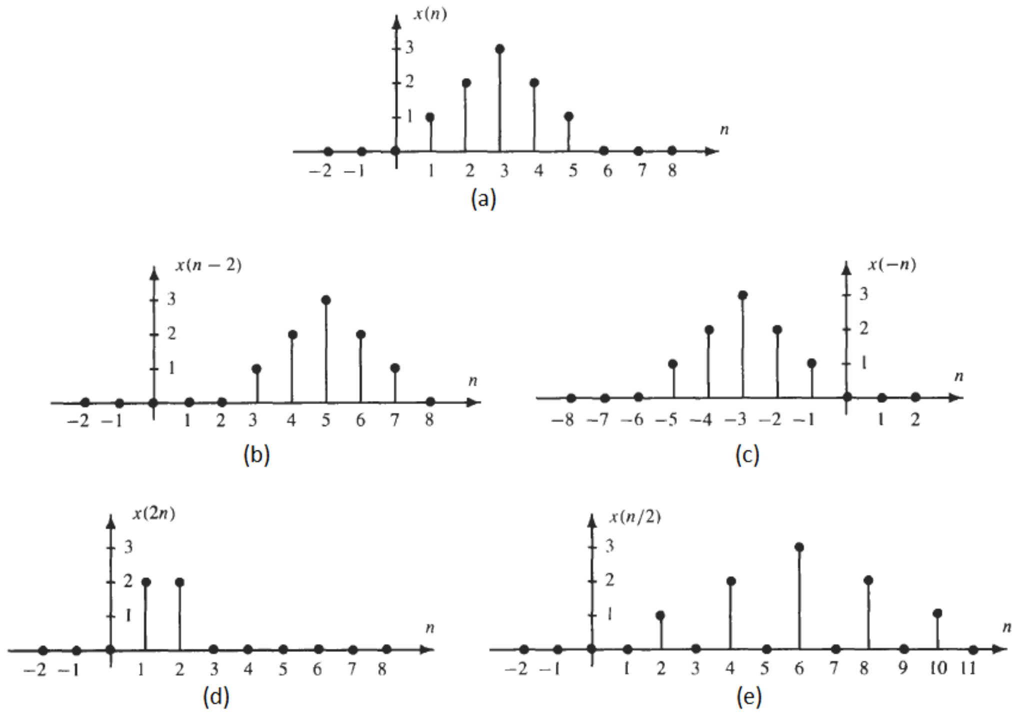
- *Αναστροφή:* Αυτός ο μετασχηματισμός δίνεται από τη σχέση $f[n] = -n$, και απλά ειναι η αναστροφή του σηματος στο χρόνο, ως προς n.

- *Κλιμάκωση στο χρόνο:* Αυτός ο μετασχηματισμός ορίζεται ως $f[n] = Mn$ ή $f[n] = n/N$, όπου M, N είναι θετικοί ακέραιοι. Στην πρώτη περιπτωση, η ακολουθία $x[Mn]$ σχηματίζεται παίρνοντας κάθε M-οστο δείγμα από τη $x[n]$ (αυτή η πράξη λέγεται *υποδειγματοληψία-downsampling*). Με $f[n] = n/N$, η ακολουθία $y[n] = x[f[n]]$ ορίζεται ως

$$y[n] = \begin{cases} x[n/N], & n = 0, \pm N, \pm 2N, \cdots \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{63}$$

  (η πράξη αυτή ειναι γνωστη ως *υπερδειγματοληψία-upsampling*).

Παραδείγματα ολίσθησης, αναστροφής, και κλιμάκωσης στο χρόνο φαίνονται στο σχήμα 11. Προσέξτε, οι πράξεις αυτές εξαρτώνται από τη σειρά που θα τις εφαρμόσετε (ειναι δηλαδή order-dependent).



Σχήμα 11: (α)Σήμα Διακριτού Χρονου (β) Καθυστέρηση κατά $n_0 = 2$ (γ) Αναστροφή (δ) Υποδειγματοληψία κατά 2 (ε) Υπερδειγματοληψία κατά 2

7.2.8 Πράξεις με σήματα

Πρέπει να σας ειναι προφανές ότι οι συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού μεταξύ σημάτων, και ο πολλαπλασιασμός σηματος με σταθερα, δε χρειάζονται ιδιαίτερες εξηγήσεις, οπότε δε θα επεκταθούμε. :-)

7.3 Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Ένα συστημα διακριτού χρόνου είναι, θεωρητικά, ένας μαθηματικός τελεστης ή μια αντιστοίχιση που μετασχηματίζει ένα σήμα (την είσοδο) σε ένα άλλο σήμα (την έξοδο), μέσω ενός καθορισμένου συνόλου από πράξεις. Η σημειογραφεία $T[]$ χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει εν γένει ένα σύστημα. Οι ιδιότητες εισόδου-εξόδου ενός συστήματος μπορούν να καθοριστούν με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Η σχέση εισόδου-εξόδου μπορεί, για παράδειγμα, να εκφραστει ως

$$y[n] = x^2[n] \tag{64}$$

ή

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n] \tag{65}$$

Είναι επίσης δυνατόν να περιγραφει ένα σύστημα με αλγοριθμικούς όρους, που αποτελείται από εντολές ή πράξεις που εφαρμόζονται σε ενα σήμα εισόδου, όπως οι

$$
\begin{aligned}
y_1[n] &= \frac{1}{2}y_1[n-1] + \frac{1}{4}x[n] && (66)\\
y_2[n] &= \frac{1}{4}y_2[n-1] + \frac{1}{2}x[n] && (67)\\
y_3[n] &= \frac{4}{10}y_3[n=1] + \frac{1}{2}x[n] && (68)\\
y[n] &= y_1[n] + y_2[n] + y_3[n] && (69)
\end{aligned}
$$

Τα συστηματα διακριτού χρονου μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ανάλογα με τις ιδιότητες που έχουν. Οι πιο συνήθεις ιδιότητες που μας ενδιαφερουν είναι η *γραμμικότητα*, η η *χρονική αμεταβλητικότητα*, η *αιτιατότητα*, η *ευστάθεια*, και η *αντιστρεψιμότητα*. Αυτές οι ιδιότητες, μαζι με μερικές ακόμα, περιγράφονται παρακάτω.

7.3.1 Ιδιότητες Συστημάτων

1. Η πρώτη ιδιότητα αφορά το αν ένα σύστημα έχει ή όχι μνήμη. Ένα σύστημα λέμε οτι είναι *χωρίς μνήμη* αν η έξοδος σε μια χρονική στιγμή $n = n_0$ εξαρτάται μόνο από την είσοδο τη χρονική στιγμή $n = n_0$. Με άλλα λόγια, ένα σύστημα είναι χωρίς μνήμη αν, για κάθε n_0, μπορούμε να βρούμε την τιμή $y[n_0]$ δεδομένης μόνο της τιμής $x[n_0]$.

   Παραδειγμα:
   Το σύστημα $y[n] = x^2[n]$ ειναι χωρίς μνήμη γιατι το $y[n_0]$ εξαρτάται μόνο από την τιμή $x[n_0]$. Αντίθετα, το συστημα $y[n] = x[n] + x[n-1]$ είναι με μνήμη, γιατι για τον υπολογισμό του $y[n_0]$ χρειαζόμαστε και την τιμή $x[n_0 - 1]$, εκτος απ' την $x[n_0]$.

2. Ένα σύστημα λέγεται *αθροιστικό* αν ισχύει

   $$T[x_1[n] + x_2[n]] = T[x_1[n]] + T[x_2[n]] \tag{70}$$

   για οποιαδήποτε σήματα $x_1[n]$ και $x_2[n]$.

3. Ένα σύστημα λέμε ότι είναι ομογενές αν η κλιμάκωση της εισόδου με μια σταθερά έχει ως αποτέλεσμα την κλιμάκωση της εξόδου με την ίδια σταθερά. Ειδικότερα, αυτό σημαίνει ότι αν

   $$T[cx[n]] = cT[x[n]] \tag{71}$$

   για οποιαδήποτε μιγαδική σταθερά c για κάθε σήμα εισόδου $x[n]$.

   Παράδεγιμα:
   Το σύστημα που ορίζεται ως

   $$y[n] = \frac{x^2[n]}{x[n-1]} \tag{72}$$

   δεν είναι αθροιστικό γιατί

   $$T[x_1[n] + x_2[n]] = \frac{(x_1[n] + x_2[n])^2}{x_1[n-1] + x_2[n-1]} \tag{73}$$

   που δεν είναι το ίδιο με το

   $$T[x_1[n]] + T[x_2[n]] = \frac{x_1^2[n]}{x_1[n-1]} + \frac{x_2^2[n]}{x_2[n-1]} \tag{74}$$

Το σύστημα, όμως, είναι ομογενές, γιατί για είσοδο $cx[n]$, η έξοδος

$$T[cx[n]] = \frac{(cx[n])^2}{cx[n-1]} = c\frac{x^2[n]}{x[n-1]} = cT[x[n]] \tag{75}$$

Από την άλλη μεριά, το σύστημα που ορίζεται από τη σχέση

$$y[n] = x[n] + x^*[n-1] \tag{76}$$

είναι αθροιστικό (δείξτε το! :-)) αλλά δεν είναι ομογενές, γιατι

$$T[cx[n]] = cx[n] + c^*x^*[n-1] \neq cT[x[n]] = cx[n] + cx^*[n-1] \tag{77}$$

4. Ένα συστημα λέγεται *γραμμικό* αν είναι αθροιστικό και ομογενές. Δηλ. ένα σύστημα είναι γραμμικό αν

$$T[a_1x_1[n] + a_2x_2[n]] = a_1T[x_1[n]] + a_2T[x_2[n]] \tag{78}$$

για δυο εισόδους $x_1[n]$ και $x_2[n]$ για δυο οποιεσδηποτε σταθερές a_1, a_2.

5. Ένα σύστημα λέμε οτι ειναι *χρονικά αμετάβλητο* αν μια καθυστέρηση στην είσοδο κατά n_0 δείγματα έχει ως αποτέλεσμα την καθυστέρηση της εξόδου κατά n_0 δείγματα. Πιο ''μαθηματικά'' :-), έστω $y[n]$ η έξοδος ενός συστήματος για μια εισοδο $x[n]$. Το σύστημα λέμε ότι είναι *χρονικά αμετάβλητο* αν για κάθε καθυστέρηση n_0, η απόκριση στην είσοδο $x[n-n_0]$ ειναι η $y[n-n_0]$.

   Για να ελέγξουμε αν ένα σύστημα ειναι χρονικά αμετάβλητο, πρέπει να συγκρινουμε τα σήματα $y[n-n_0]$ και $T[x[n-n_0]]$. Αν είναι ίδια, τότε το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

   Παράδειγμα:
   Το σύστημα που ορίζεται ως

$$y[n] = x^2[n] \tag{79}$$

   ειναι χρονικά αμετάβλητο, και μπορούμε να το δείξουμε. Η απόκριση του συστήματος στην είσοδο $x[n-n_0]$, είναι $y'[n] = [x[n-n_0]]^2 = x^2[n-n_0]$. Όμως, $y'[n] = y[n-n_0]$, άρα το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

6. Ένα σύστημα είναι και γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο, και αναφέρεται ως ΓΧΑ σύστημα, αν ισχύει ότι αν $h[n]$ είναι η απόκριση του συστηματος στην είσοδο $\delta[n]$, τότε η απόκριση του συστήματος για είσοδο $\delta[n-k]$, είναι $h[n-k]$. Έτσι, η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n] \tag{80}$$

   όπου $*$ συμβολίζει τον τελεστη της *συνέλιξης*, η οποία ορίζεται ως το παραπάνω άθροισμα. Το σήμα $h[n]$ αναφέρεται ως *μοναδιαία ή κρουστική απόκριση* και χαρακτηρίζει πλήρως το ΓΧΑ σύστημα. Με άλλα λόγια, μπορούμε να βρούμε την απόκριση του συστήματος για κάθε είσοδο $x[n]$, αν γνωρίζουμε το $h[n]$.

7. Μια ιδιότητα ιδιαίτερα σημαντική για πραγματικές εφαρμογές είναι η *αιτιατότητα*, η οποία λέει ότι η απόκριση ενός συστηματος τη χρονική στιγμή n_0 εξαρταται μόνο από τις χρονικές στιγμές ΜΕΧΡΙ ΚΑΙ τη χρονική στιγμή $n = n_0$. Για ένα αιτιατο σύστημα, οι αλλαγές στην έξοδο δεν μπορεί να προηγούνται από αλλαγές στην είσοδο. Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα έχει την ιδιότητα οτι $h[n] = 0, n < 0$.

   Παράδειγμα:
   Το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση $y[n] = x[n] + x[n-1]$ είναι αιτιατο γιατι η τιμή της εξόδου τη χρονική στιγμή $n = n_0$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές εισόδου $x[n]$ στις χρονικές στιγμές n_0 και $n_0 - 1$. Αντίθετα, το σύστημα $y[n] = x[n] + x[n+1]$ δεν είναι αιτιατό, γιατι η έξοδος τη χρονική στιγμή n_0 εξαρτάται από την τιμή της εισόδου τις χρονικές στιγμές n_0 και $n_0 + 1$.

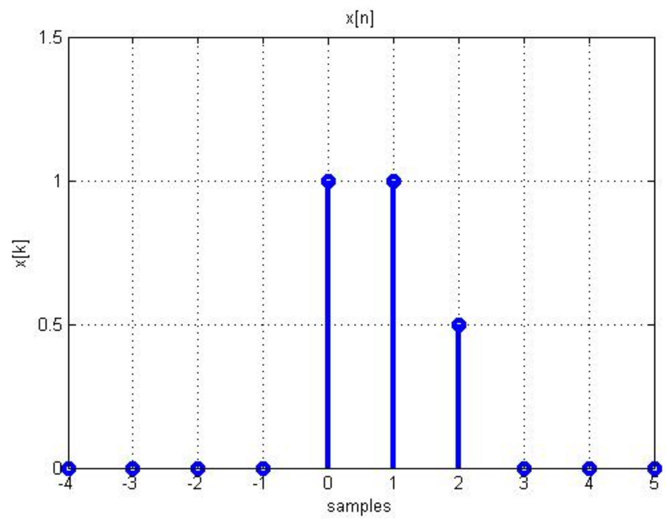
8. Ένα σύστημα λέγεται *ευσταθές*, αν ισχύει ότι για φραγμένη είσοδο, $|x[n]| < B_x$, η έξοδος είναι επίσης φραγμένη, $|y[n]| < B_y$, με B_x, B_y πραγματικούς αριθμούς. Για ενα ΓΧΑ σύστημα, η ευστάθεια ισχύει αν ισχυει η σχέση

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \tag{81}$$

9. Ένα σύστημα λέγεται *αντιστρεψιμο* αν η είσοδος σε ένα σύστημα μπορει να οριστεί μονοσήμαντα από την έξοδο. Με άλλα λόγια, για να είναι ένα σύστημα αντιστρέψιμο, ειναι απαραίτητο διαφορετικές εισόδους να δίνουν διαφορετικές εξόδους. Με άλλα άλλα :-) λόγια, δεδομένων δυο εισόδων $x_1[n], x_2[n]$, με $x_1[n] \neq x_2[n]$, πρέπει να ισχύει ότι $y_1[n] \neq y_2[n]$.

8 Ασκήσεις

(α΄) **Αν το διακριτό σήμα x[n] είναι όπως στην παρακάτω εικόνα,**



να σχεδιάσετε τα σήματα:
α) $x[n-2]$
β) $x[2-n]$
γ) $x[2n]$
δ) $x[n]u[1-n]$

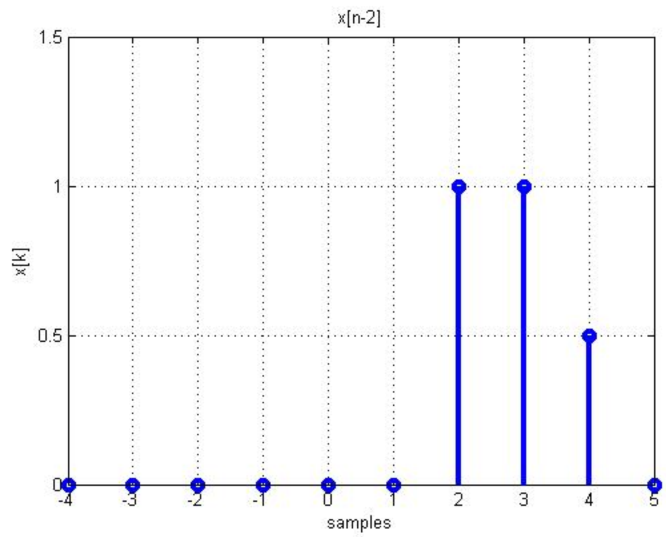
Λύση:
Το σήμα της εικόνας μπορεί να γραφεί ως:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ \frac{1}{2}, & n = 2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Παρ' ότι είναι σχετικά εύκολο να βρούμε με το μάτι τα παραπάνω, ας τα δούμε με μαθηματικά. Είναι: α)

$$x[n-2] = \begin{cases} 1, & n-2=0 \\ 1, & n-2=1 \\ \frac{1}{2}, & n-2=2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \Rightarrow x[n-2] = \begin{cases} 1, & n=2 \\ 1, & n=3 \\ \frac{1}{2}, & n=4 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

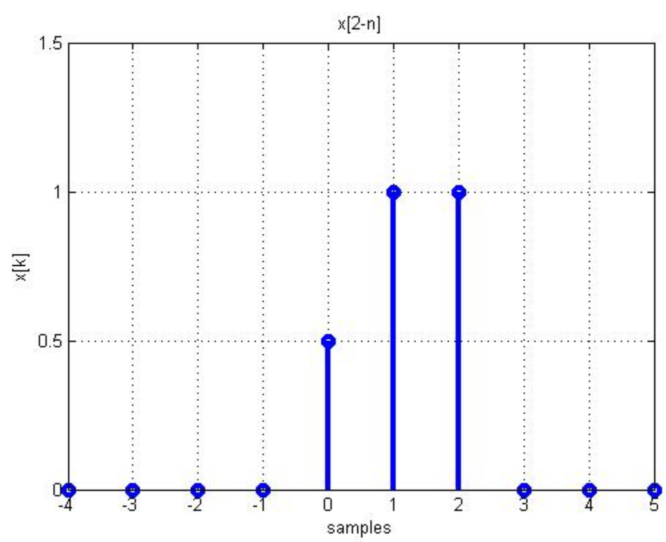
και το σήμα φαίνεται στην εικόνα παρακάτω.



β)

$$x[2-n] = \begin{cases} 1, & 2-n=0 \\ 1, & 2-n=1 \\ \frac{1}{2}, & 2-n=2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \Rightarrow x[2-n] = \begin{cases} 1, & n=2 \\ 1, & n=1 \\ \frac{1}{2}, & n=0 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

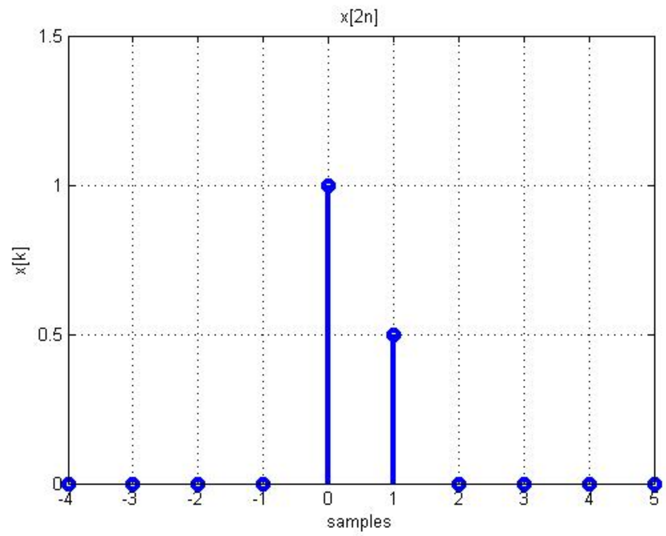
και το σήμα φαίνεται στην εικόνα παρακάτω.



γ)

$$x[2n] = \begin{cases} 1, & 2n = 0 \\ 1, & 2n = 1 \\ \frac{1}{2}, & 2n = 2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \Rightarrow x[2n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 1, & n = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & n = 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

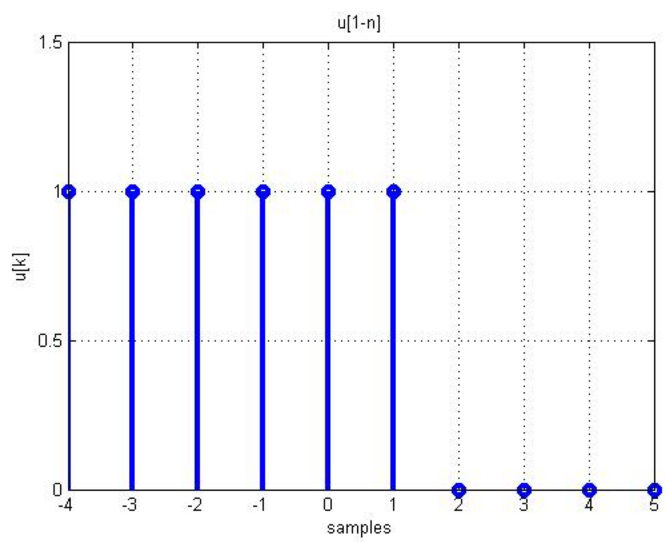
και το σήμα φαίνεται στην εικόνα παρακάτω (προφανώς για $n = \frac{1}{2}$ δεν ορίζεται το σήμα - ορίζεται μόνο για ακέραιες χρονικές τιμές).



δ)

$$u[1-n] = \begin{cases} 1, & 1-n \geq 0 \\ 0, & 1-n \leq 0 \end{cases} \Rightarrow u[1-n] = \begin{cases} 1, & 1 \geq n \\ 0, & 1 \leq n \end{cases}$$

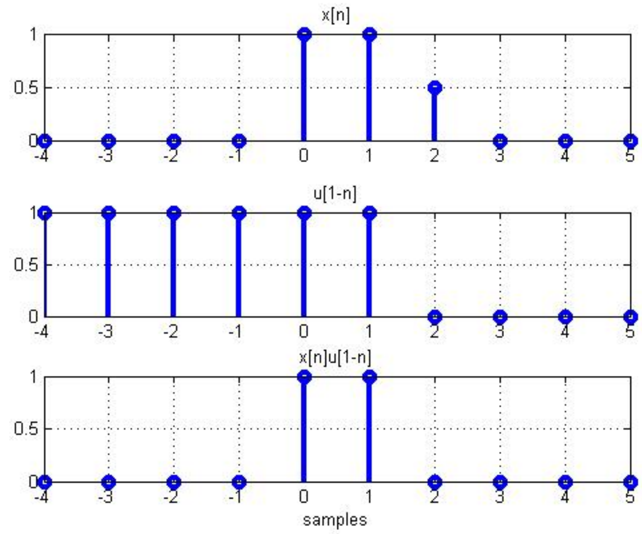
άρα η βηματική αυτή συνάρτηση ορίζεται για $n \leq 1$. Οπότε θα είναι όπως φαίνεται στην εικόνα παρακάτω.



Το $x[n]$ το γνωρίζουμε από παραπάνω, άρα το γινόμενό τους θα ορίζεται μόνο για $n = 0, n = 1$. 'ρα θα έχουμε ότι

$$x[n][1-n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

πράγμα που φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα.



(β′) **Ελέγξτε αν τα παρακάτω σήματα είναι περιοδικά, κι αν ναι, βρείτε την περίοδό τους.**

i. $x[n] = e^{\frac{j2\pi n}{3}}$

ii. $x[n] = ne^{\frac{j2\pi n}{3}}$

iii. $x[n] = e^{jn}$

iv. $x[n] = e^{\frac{j2\pi n}{\sqrt{2}}}$

<u>Λύση:</u>

Για να είναι περιοδικό ένα διακριτό σήμα, πρέπει να ισχύει για την περίοδό του, N, ότι $N = \frac{2\pi k}{\omega_0}$, με το μικρότερο δυνατό $k \in Z$ και προφανώς $N \in Z$ (δε νοείται περίοδος π.χ. $N = 5.5$ δείγματα!).

i. Είναι $N = \frac{2\pi k}{\omega_0} = \frac{2\pi k}{\frac{2\pi}{3}} = 3k$. Προφανώς $k = 1$ και άρα $N = 3$.

ii. Στο πρώτο ερώτημα είδαμε ότι το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $N = 3$. Το σήμα $y[n] = n$ προφανώς ΔΕΝ είναι περιοδικό. Ά'ρα έχουμε το γινόμενο μιας περιοδικής με μια μη περιοδική συνάρτηση. Το αποτέλεσμα είναι φυσικά μη περιοδικό σήμα.

iii. Είναι $N = \frac{2\pi k}{\omega_0} = \frac{2\pi k}{1} = 2\pi k$. Δεν υπάρχει $k \in Z$ που να δίνει ακέραιο N, άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.

iv. Είναι $N = \frac{2\pi k}{\omega_0} = \frac{2\pi k}{\frac{2\pi}{\sqrt{2}}} = \sqrt(2)k$, επίσης δεν υπάρχει ακέραιο k που να δίνει ακέραιο N, άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.

(γ′) **Εξετάστε αν τα παρακάτω συστήματα είναι γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα, και αιτιατά.**

i. $y[n] = 2x[n-1] + 3x[n-3]$

ii. $y[n] = n^2x^2[n+2] - x[n]$

Λύση:
Ας θυμηθούμε πότε ένα σύστημα που περιγράφεται από μια εξίσωση διαφορών λέγεται γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο, και αιτιατό.

- **Γραμμικό** λέγεται ένα σύστημα αν ισχύει ότι:
  Αν για είσοδο $x_1[n]$, παίρνουμε έξοδο $y_1[n]$ και είσοδο $x_2[n]$ παίρνουμε έξοδο $y_2[n]$, τότε για είσοδο $ax_1[n]+bx_2[n]$ παίρνουμε έξοδο $ay_1[n]+by_2[n]$. Με απλά λόγια, όταν δίνουμε ως είσοδο ένα άθροισμα από σήματα (πολλαπλασιασμένα με σταθερές $a, b, ...$), τότε παίρνουμε ως έξοδο το άθροισμα των εξόδων που θα μας έδινε το σύστημα αν βάζαμε τις εισόδους μια-μια, ξεχωριστά.
- **Χρονικά Αμετάβλητο** λέγεται ένα σύστημα αν ισχύει ότι:
  Αν για είσοδο $x[n]$ παίρνουμε έξοδο $y[n]$, τότε για είσοδο $x[n-n_0]$ θα πάρουμε έξοδο $y[n-n_0]$. Με απλά λόγια, αυτό σημαίνει ότι όση καθυστέρηση έχουμε στην είσοδο, τόση καθυστέρηση θα πάρουμε στην έξοδο, δηλ. για μια δεδομένη είσοδο, η έξοδος του συστήματος είναι ανεξάρτητη από τη χρονική στιγμή που δίνεται η είσοδος.
- **Αιτιατό** λέγεται έναν σύστημα όταν ισχύει ότι η έξοδος ΔΕΝ εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου, παρά μόνο από τωρινές ή παρελθοντικές.

Ά'ρα θα εχουμε:

i. Για είσοδο $x_1[n]$ παίρνουμε έξοδο
$$y_1[n] = 2x_1[n-1] + 3x_1[n-3] \tag{82}$$
Για είσοδο $x_2[n]$ παίρνουμε έξοδο
$$y_2[n] = 2x_2[n-1] + 3x_2[n-3] \tag{83}$$
Ά'ρα
$$ay_1[n] + by_2[n] = a(2x_1[n-1] + 3x_1[n-3]) + b(2x_2[n-1] + 3x_2[n-3]) \tag{84}$$
Για είσοδο $ax_1[n] + bx_2[n]$ παίρνουμε έξοδο
$$\begin{aligned} y_3[n] &= 2(ax_1[n-2] + bx_2[n-1]) + 3(ax_1[n-3] + bx_2[n-3]) = && (85)\\ &= a(2x_1[n-1] + 3x_1[n-3]) + b(2x_2[n-1] + 3x_2[n-3]) && (86)\end{aligned}$$
Προφανώς οι σχέσεις 84, 86 είναι ίδιες, άρα το σύστημα είναι γραμμικό.

Για είσοδο $x[n-n_0]$ παίρνουμε έξοδο
$$y[n] = 2x_1[n-n_0-1] + 3x_1[n-n_0-3] \tag{87}$$
Υπολογίζουμε το
$$y[n-n_0] = 2x[n-n_0-1] + 3x[n-n_0-3] \tag{88}$$
Οι 87, 88 είναι ίδιες, άρα το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

Προφανώς, το σύστημά μας εξαρτάται μόνο από παρελθοντικές τιμές της εισόδου ($x[n-1], x[n-3]$), άρα είναι αιτιατό.

ii. Προφανώς το σύστημα είναι ΜΗ γραμμικό (η έξοδος είναι συνάρτηση του τετραγώνου της εισόδου - αποδείξτε το αναλυτικά), ΜΗ χρονικά αμετάβλητο (το n^2 μπροστά απ' το $x[n+2]$ "ευθύνεται"γι' αυτό - αποδείξτε το), ΜΗ αιτιατό (για να βρούμε το $y[n]$ θέλουμε το $x[n+2]$, δηλ. μελλοντική τιμή της εισόδου).

Παρένθεση:
Παρ' ότι στο μάθημα θα ασχοληθούμε σχεδόν αποκλειστικά με γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα και αιτιατά συστήματα, αυτό δε σημαίνει ότι όσα δεν πληρούν τις παραπάνω συνθήκες είναι "άχρηστα". Ένα πολύ χρήσιμο στην πράξη σύστημα είναι το παρακάτω:

$$y[n] = x^2[n] - x[n-1]x[n+1] \tag{89}$$

Το σύστημα αυτό είναι ΜΗ γραμμικό, είναι χρονικά αμετάβλητο, αλλά και ΜΗ αιτιατό, γιατί η χρονική στιγμή n της εξόδου χρειάζεται τη χρονική στιγμή $n+1$ της εισόδου. Παρ' ότι αυτό το σύστημα δεν είναι γραμμικό, ούτε και αιτιατό, είναι αρκετά χρήσιμο και διαδεδομένο. Η πράξη που περιγράφεται από το σύστημα αυτό λέγεται **τελεστής Teager-Kaiser**, και οι ιδιότητές της την καθιστούν πολύ χρήσιμη σε ΠΑΡΑ πολλές εφαρμογές (εικόνες, ήχος, βιολογικά σήματα, κλπ).

Αντιπαραδείγματα:
Δείτε ότι τα σήματα:

- $y[n] = x^2[n-4]$,
- $y[n] = \log_{10}(|x[n]|)$,
- $y[n] = \frac{1}{x[n]}$, με $x[n] \neq 0$

είναι ΜΗ γραμμικά. (Δείξτε δηλαδή ότι οι αντίστοιχες σχέσεις που προκύπτουν ΔΕΝ είναι ίδιες).
Δείξτε ότι τα σήματα:

- $y[n] = x[-n]$
- $y[n] = \sum_{k=n_0}^{n} x[k]$
- $y[n] = x[n/L], n = 0, \pm L, \pm 2L, ...$

είναι χρονικά ΜΕΤΑΒΛΗΤΑ (time variant) συστήματα. (Δείξτε δηλαδή ότι οι αντίστοιχες σχέσεις που προκύπτουν ΔΕΝ είναι ίδιες).
Ελέγξτε αν τα σήματα:

- $y[n] = x[-n]$
- $y[n] = \sum_{k=n_0}^{n} x[k]$
- $y[n] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$

είναι ΜΗ αιτιατά (υπό κάποιες συνθήκες - βρείτε τις).

(δ') **Έστω το σήμα**

$$\mathbf{x(t) = \sin^2(5\pi t)\cos(22\pi t)}$$

Βρείτε την περίοδο $\mathbf{T_0}$ του σήματος.

Λύση:
Για να βρούμε την περίοδο, θα πρέπει να γράψουμε το $x(t)$ ως άθροισμα ημιτόνων ή/και συνημιτόνων.

Είναι:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sin^2(5\pi t)\cos(22\pi t) = \Big(\frac{1}{2j}e^{j5\pi t} - \frac{1}{2j}e^{-j5\pi t}\Big)^2\Big(\frac{1}{2}e^{j22\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j22\pi t}\Big) \\
&= \Big(\frac{1}{4j^2}e^{j10\pi t} - 2\frac{1}{2j}\frac{1}{2j}e^{j5\pi t}e^{-j5\pi t} + \frac{1}{4j^2}e^{-j10\pi t}\Big)\Big(\frac{1}{2}e^{j22\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j22\pi t}\Big) \\
&= \Big(-\frac{1}{4}e^{j10\pi t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-j10\pi t}\Big)\Big(\frac{1}{2}e^{j22\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j22\pi t}\Big) \\
&= -\frac{1}{8}e^{j32\pi t} - \frac{1}{8}e^{-j12\pi t} + \frac{1}{4}e^{j22\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j22\pi t} - \frac{1}{8}e^{-j32\pi t} - \frac{1}{8}e^{j12\pi t} \\
&= -\frac{1}{4}\cos(12\pi t) + \frac{1}{2}\cos(22\pi t) - \frac{1}{4}\cos(32\pi t) \\
&= -\frac{1}{4}\cos(2\pi 6t) + \frac{1}{2}\cos(2\pi 11t) - \frac{1}{4}\cos(2\pi 16t) \\
&= \frac{1}{4}\cos(2\pi 6t + \pi) + \frac{1}{2}\cos(2\pi 11t) + \frac{1}{4}\cos(2\pi 16t + \pi)
\end{aligned} \tag{90}$$

Ένας διαφορετικός τρόπος λύσης θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\sin^2(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta)$$

και

$$\cos(\theta)\cos(\omega) = \frac{1}{2}\cos(\theta + \omega) + \frac{1}{2}\cos(\theta - \omega)$$

Τότε θα είναι:

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(10\pi t)\Big)\cos(22\pi t) &= \frac{1}{2}\cos(22\pi t) - \frac{1}{2}\cos(22\pi t)\cos(10\pi t) \\
&= \frac{1}{2}\cos(22\pi t) + \frac{1}{4}\cos(32\pi t + \pi) + \frac{1}{4}\cos(12\pi t + \pi)
\end{aligned}$$

Προφανώς, η θεμελιώδης συχνότητα θα είναι: $f_0 = \text{ΜΚΔ}(6, 11, 16) = 1$. Άρα $T_0 = \frac{1}{f_0} = 1$.

(ε′) **Βρείτε την περίοδο του σήματος:**

$$\mathbf{x(t) = \sin^2(5\pi t + \phi_1) + \sin^2(2\pi t + \phi_2)}$$

Λύση:
Θα χρειαστεί να γράψουμε το σήμα μας ως άθροισμα απλών ημιτόνων ή/και συνημιτόνων, ώστε να μπορούμε να αποφανθούμε για την περιοδικότητά του. Είναι:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sin^2(5\pi t + \phi_1) + \sin^2(2\pi t + \phi_2) \\
&= \Big(\frac{1}{2j}e^{j5\pi t}e^{j\phi_1} - \frac{1}{2j}e^{-j5\pi t}e^{-j\phi_1}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{2j}e^{j2\pi t}e^{j\phi_2} - \frac{1}{2j}e^{-j2\pi t}e^{-j\phi_2}\Big)^2 \\
&= -\frac{1}{4}e^{j10\pi t}e^{j2\phi_1} - 2\frac{1}{2j}\frac{1}{2j} - \frac{1}{4}e^{-j10\pi t}e^{-j2\phi_1} - \frac{1}{4}e^{j4\pi t}e^{j2\phi_2} - 2\frac{1}{2j}\frac{1}{2j} - \frac{1}{4}e^{-j4\pi t}e^{-j2\phi_2} \\
&= -\frac{1}{4}(e^{j10\pi t}e^{j2\phi_1} + e^{-j10\pi t}e^{-j2\phi_1}) - \frac{1}{4}(e^{j4\pi t}e^{j2\phi_2} + e^{-j4\pi t}e^{-j2\phi_2}) + 1 \\
&= 1 - \frac{1}{4}2\cos(10\pi t + 2\phi_1) - \frac{1}{4}2\cos(4\pi t + 2\phi_2) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\cos(10\pi t + 2\phi_1) - \frac{1}{2}\cos(4\pi t + 2\phi_2) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\cos(2\pi 5t + 2\phi_1) - \frac{1}{2}\cos(2\pi 2t + 2\phi_2)
\end{aligned} \tag{91}$$

Άρα η θεμελιώδης συχνότητα του σήματος θα είναι $f_0 = \text{ΜΚΔ}\{5,2\} = 1$. Άρα $T_0 = \frac{1}{f_0} = 1$ sec. Αλλιώς, θα μπορούσαμε να πούμε ότι $T_0 = \text{ΕΚΠ}\{\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\}$ =ΕΚΠ$\{0.2, 0.5\} = 1$ sec.

Σημείωση: Αν μας ζητούσε να *δείξουμε* ότι το σήμα είναι περιοδικό, και μετά να υπολογίσουμε την περίοδό του, τότε θα έπρεπε (για να είμαστε απόλυτα σωστοί) να πούμε ότι:
$\frac{T1}{T2} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$, που είναι λόγος ακεραίων αριθμών, άρα το σήμα είναι περιοδικό. Έπειτα, θα υπολογίζαμε την περίοδο με όποιον τρόπο θέλαμε.
Ένα καλό αντιπαράδειγμα σχετικά με αυτή τη σημείωση, θα ήταν το

$$x(t) = 2 + \cos(10\pi t + \phi_1) - \frac{1}{2}\cos(4t - \phi_2)$$

Τότε, θα ήταν $\frac{T1}{T2} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{\pi}} = \frac{\pi}{10}$, το οποίο προφανώς ΔΕΝ είναι λόγος ακεραίων αριθμών, άρα το σήμα ΔΕΝ είναι περιοδικό.