Σχετικά με Συνέλιξη

Επιμέλεια:
Καφεντζής Γιώργος
Υποψ. Διδάκτωρ Τμημ. Η/Υ
Πανεπιστήμιο Κρήτης

22-03-2013

1 Εισαγωγή

Η συνέλιξη αποτελεί μια πράξη πολύ σημαντική, γιατί σχετίζεται με την ανάλυση συστημάτων, αλλά και με το γεγονός ότι η συνέλιξη μετατρέπεται σε γινόμενο όταν αλλάζουμε χώρους (απ' το χρόνο στη συχνότητα και αντίστροφα). Η συνέλιξη, λόγω του ότι εμπλέκει τον υπολογισμό ένος ολοκληρώματος (ή ενός αθροίσματος, στο διακριτό χρόνο), έχει μια δυσκολία. Η δυσκολία έγκειται στο ότι στην πράξη εμπεριέχεται το γινόμενο δυο σημάτων, εκ των οποίων το ένα έχει υποστεί *ανάκλαση και μετατόπιση*. Οι σημειώσεις αυτές καλύπτουν τη συνέλιξη τόσο του διακριτού όσο και του συνεχούς χρόνου.

2 Η συνέλιξη συνεχούς χρόνου αναλυτικά

Εδώ θα ξεδιαλύνουμε τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης. Ας δούμε τον ορισμό:

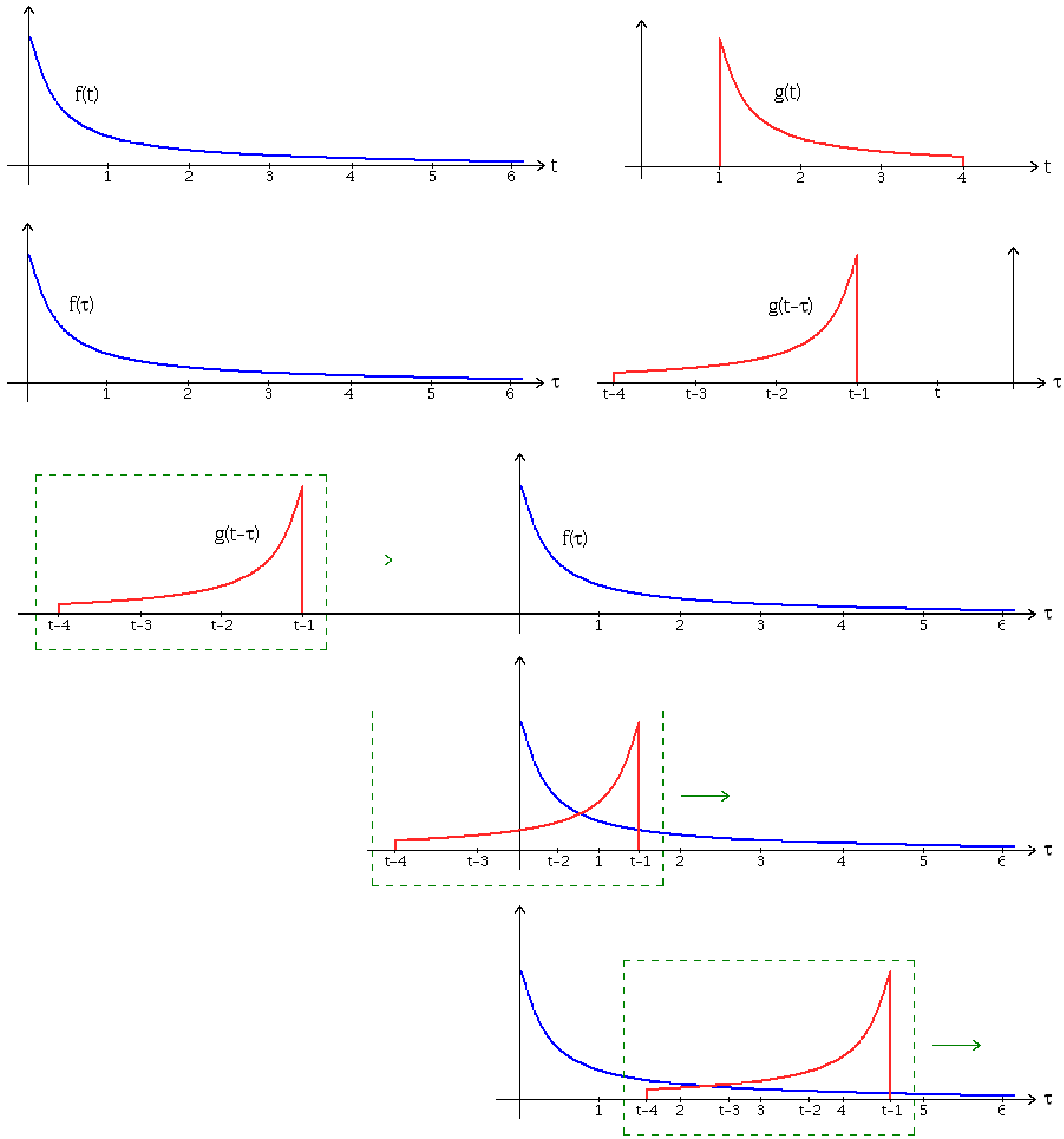
$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \tag{1}$$

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι το ολοκλήρωμα έχει ως μεταβλητή το τ! ΌΧΙ το t. Το t το θεωρούμε σταθερό μέσα στο ολοκλήρωμα. Έπειτα, το ολοκλήρωμα αυτό περιέχει δυο σήματα: το $x(\tau)$ και το $y(t-\tau)$. Το πρώτο είναι αυτούσιο το σήμα, δεν έχει κάποια μεταβολή. Το δεύτερο όμως, βλέπετε ότι έχει υποστεί δυο είδη επεξεργασίας: *ανάκλαση και μετατόπιση*. Η ακολουθία μετατροπής είναι η εξής:

$$y(t) \to y(\tau) \to y(-\tau) \to y(-\tau+t) = y(t-\tau) \tag{2}$$

Οπότε το σήμα που χρησιμοποιείται στο ολοκλήρωμα της συνέλιξης έχει υποστεί μια *ανάκλαση* ως προς τον κατακόρυφο άξονα και ακολούθως μια *μετατόπιση ως προς* t. Το σήμα που προκύπτει πολλαπλασιάζεται με το $x(\tau)$ και ολοκληρώνεται ως προς τ. Συνήθως προτιμάται η γραφική λύση της συνέλιξης, και ένα τέτοιο παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 1.

- Παρατηρήστε ότι έχουμε δυο σήματα, το $f(t)$ και το $g(t)$ στην πρώτη γραμμή του σχήματος. Επιλέγουμε να παίξουμε με το $g(t)$, δηλ. αυτό θα μετατοπίσουμε και θα ανακλάσουμε.
- Στη δεύτερη γραμμή, έχουμε ξανά τα δυο σήματα, μόνο που τώρα είναι συναρτήσει του τ και όχι του t, όπως ακριβώς επιτάσσει το ολοκλήρωμα της συνέλιξης, και το $g(\tau)$ έχει ανακλαστεί ως προς τον κατακόρυφο άξονα, και έχει μετατοπιστεί κατά t. Θυμίζω ότι αυτό το t το χειριζόμαστε ως σταθερά. Δείτε την αλλαγή στα άκρα του $g(\tau)$, και πώς αυτά προσαρμόστηκαν μετά την ανάκλαση και τη μετατόπιση.



Σχήμα 1: Διαδικασία συνέλιξης συνεχούς χρόνου

- Στην τρίτη γραμμή, παίρνουμε το $g(t-\tau)$ που μόλις φτιάξαμε και ξεκινάμε να το ''σέρνουμε'' πάνω στον ίδιο άξονα με το $f(\tau)$, ξεκινώντας από το $-\infty$ και προς το $+\infty$.

- Στην πορεία (τέταρτη γραμμή), βλέπετε ότι συναντάει κάποια στιγμή το $f(\tau)$. Όταν το συναντάει, έχουμε γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων και άρα αρχίζουμε να υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης. Άρα, αυτές οι χρονικές στιγμές είναι όταν το δεξί άκρο του $g(t-\tau)$ συναντά το αριστερό άκρο του $f(\tau)$ και πέρα, ΚΑΙ όταν το αριστερό άκρο του $g(t-\tau)$ ΔΕΝ έχει περάσει το 0, δηλ. όταν

$$t-1 \geq 0 \Rightarrow t \geq 1 \text{ και } t-4 \leq 0 \Rightarrow t \leq 4 \tag{3}$$

οπότε τότε η συνέλιξη υπολογίζεται στο διάστημα από 0 ως $t-1$, εκεί δηλαδή που υπάρχει γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων, ως

$$c_{fg}(t) = \int_0^{t-1} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \cdots , \tag{4}$$

όπου και αντικαθιστούμε τις μαθηματικες μορφές των σημάτων, και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

- Στην πέμπτη γραμμή, το $g(t-\tau)$ έχει μπει ολόκληρο μέσα στο $f(\tau)$, πράγμα που δεν είχε συμβεί παραπάνω, άρα είναι διαφορετική περίπτωση. Εδώ, η συνέλιξη ορίζεται όταν το αριστερό άκρο της $g(t-\tau)$ περάσει το 0, δηλ. όταν

$$t-4 > 0 \Rightarrow t > 4 \tag{5}$$

και η συνέλιξη υπολογίζεται ως

$$c_{fg}(t) = \int_{t-4}^{t-1} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \cdots , \tag{6}$$

όπου και αντικαθιστούμε τις μαθηματικες μορφές των σημάτων, και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

- Άλλη περίπτωση δεν υπάρχει, οπότε για κάθε άλλο t εκτός από τα παραπάνω, η συνέλιξη είναι μηδέν, άρα

$$c_{fg}(t) = 0, \ \ t < 1 \tag{7}$$

3 Η συνέλιξη διακριτού χρόνου αναλυτικά

Εδώ θα ξεδιαλύνουμε τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζουμε το άθροισμα της συνέλιξης. Ας δούμε τον ορισμό:

$$c_{xy}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] \tag{8}$$

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι το άθροισμα έχει ως μεταβλητή το k! ΌΧΙ το n. Το n το θεωρούμε σταθερό μέσα στο άθροισμα. Έπειτα, το άθροισμα αυτό περιέχει δυο σήματα: το $x[k]$ και το $y[n-k]$. Το πρώτο είναι αυτούσιο το σήμα, δεν έχει κάποια μεταβολή. Το δεύτερο όμως, βλέπετε ότι έχει υποστεί δυο είδη επεξεργασίας: *ανάκλαση και μετατόπιση*. Η ακολουθία μετατροπής είναι η εξής:

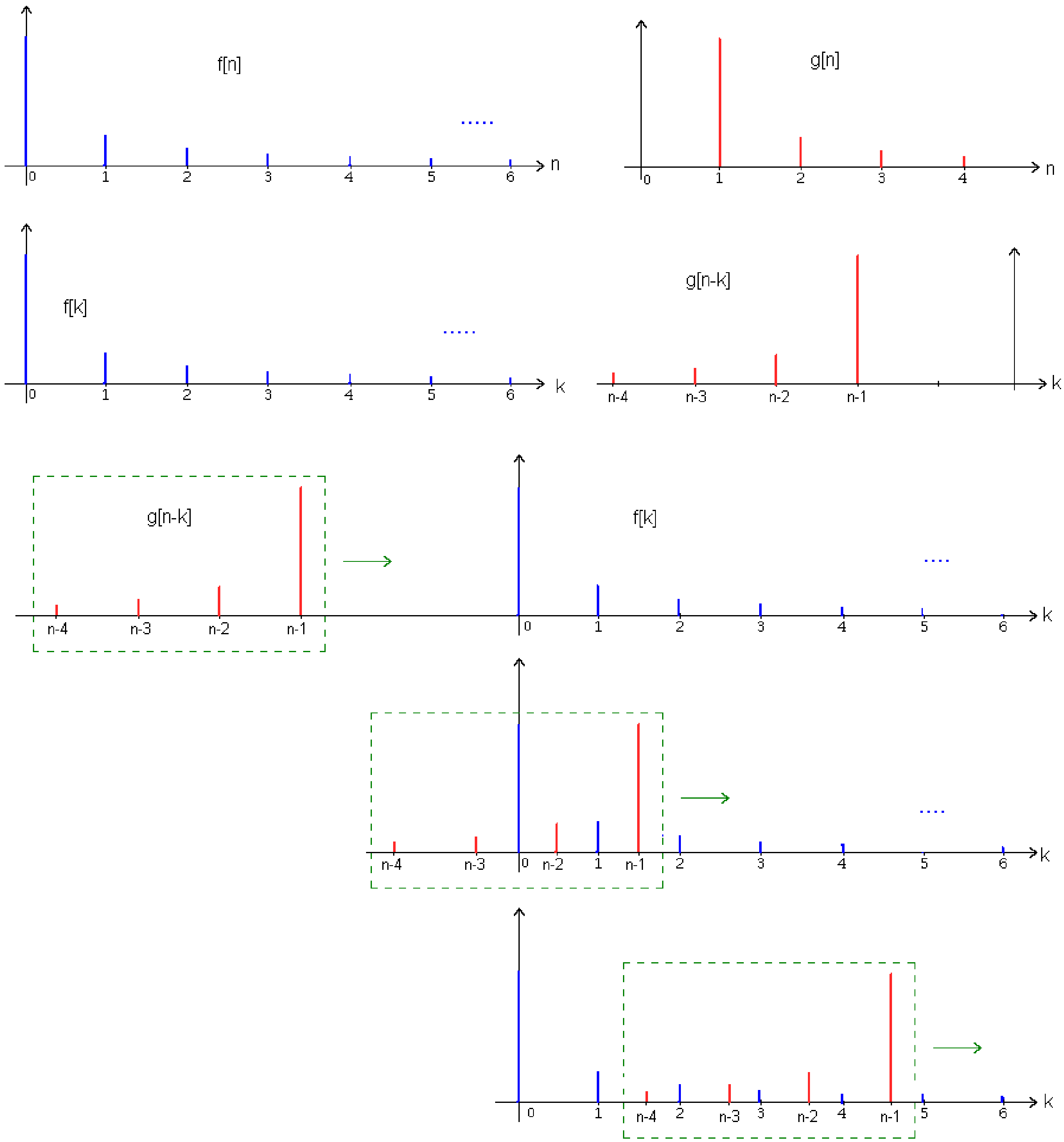
$$y[n] \to y[k] \to y[-k] \to y[-k+n] = y[n-k] \tag{9}$$

Οπότε το σήμα που χρησιμοποιείται στο άθροισμα της συνέλιξης έχει υποστεί μια *ανάκλαση* ως προς τον κατακόρυφο άξονα και ακολούθως μια *μετατόπιση ως προς n*. Το σήμα που προκύπτει πολλαπλασιάζεται με το $x[k]$ και αθροίζεται ως προς n.

3.1 Γραφική λύση

Συχνά προτιμάται η γραφική λύση της συνέλιξης, λόγω οπτικής ευκολίας, και ένα τέτοιο παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 2. Ας πούμε ότι εδώ η $f[n] = a^n u[n], \ |a| < 1$ και ότι η $g[n] = a^{n-1}, |a| < 1, 1 \leq n \leq 4$.

- Παρατηρήστε ότι έχουμε δυο σήματα, το $f[n]$ και το $g[n]$ στην πρώτη γραμμή του σχήματος. Επιλέγουμε να παίξουμε με το $g[n]$, δηλ. αυτό θα μετατοπίσουμε και θα ανακλάσουμε.



Σχήμα 2: Διαδικασία συνέλιξης διακριτού χρόνου

- Στη δεύτερη γραμμή, έχουμε ξανά τα δυο σήματα, μόνο που τώρα είναι συναρτήσει του k και όχι του n, όπως ακριβώς επιτάσσει το άθροισμα της συνέλιξης, και το $g[k]$ έχει ανακλαστεί ως προς τον κατακόρυφο άξονα, και έχει μετατοπιστεί κατά n. Θυμίζω ότι αυτό το n το χειριζόμαστε ως σταθερά. Δείτε την αλλαγή στα άκρα του $g[k]$, και πώς αυτά προσαρμόστηκαν μετά την ανάκλαση και τη μετατόπιση.

- Στην τρίτη γραμμή, παίρνουμε το $g[n-k]$ που μόλις φτιάξαμε και ξεκινάμε να το ''σέρνουμε'' πάνω στον ίδιο άξονα με το $f[k]$, ξεκινώντας από το $-\infty$ και προς το $+\infty$.

- Στην πορεία (τέταρτη γραμμή), βλέπετε ότι συναντάει κάποια στιγμή το $f[k]$. Όταν το συναντάει, έχουμε γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων και άρα αρχίζουμε να υπολογίζουμε το άθροισμα της συνέλιξης. Άρα, αυτές οι διακριτές χρονικές στιγμές είναι όταν το δεξί άκρο του $g[n-k]$ συναντά το αριστερό άκρο του $f[k]$ και πέρα, ΚΑΙ όταν το αριστερό άκρο του $g[n-k]$ ΔΕΝ έχει περάσει το 0, δηλ. όταν
$$n-1 \geq 0 \Rightarrow n \geq 1 \text{ και } n-4 \leq 0 \Rightarrow n \leq 4 \tag{10}$$
οπότε τότε η συνέλιξη υπολογίζεται στο διάστημα από 0 ως $n-1$, εκεί δηλαδή που υπάρχει γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων, ως
$$\begin{aligned} c_{fg}[n] &= \sum_{k=0}^{n-1} f[k]g[n-k] = \sum_{k=0}^{n-1} a^k a^{n-k-1} \qquad (11)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1} = a^{n-1}(n-1-0+1) = na^{n-1},\ 1 \leq n \leq 4 \qquad (12)\end{aligned}$$

- Στην πέμπτη γραμμή, το $g[n-k]$ έχει μπει ολόκληρο μέσα στο $f[k]$, πράγμα που δεν είχε συμβεί παραπάνω, άρα είναι διαφορετική περίπτωση. Εδώ, η συνέλιξη ορίζεται όταν το αριστερό άκρο της $g[n-k]$ περάσει το 0, δηλ. όταν
$$n-4 > 0 \Rightarrow n > 4 \tag{13}$$
και η συνέλιξη υπολογίζεται ως
$$\begin{aligned} c_{fg}[n] &= \sum_{k=n-4}^{n-1} f[k]g[n-k] = \sum_{k=n-4}^{n-1} a^k a^{n-k-1} \qquad (14)\\ &= \sum_{k=n-4}^{n-1} a^{n-1} = a^{n-1}(n-1-(n-4)+1) = 4a^{n-1},\ n > 4 \qquad (15)\end{aligned}$$

- Άλλη περίπτωση δεν υπάρχει, οπότε για κάθε άλλο n εκτός από τα παραπάνω, η συνέλιξη είναι μηδέν, άρα
$$c_{fg}[n] = 0,\ n < 1 \tag{16}$$

- Οπότε συγκεντρωτικά θα είναι:
$$c_{fg}[n] = \begin{cases} na^{n-1}, & 1 \leq n \leq 4 \\ 4a^{n-1}, & n > 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{17}$$

3.2 Αλγεβρικοί τρόποι

Ας δούμε αν ο αλγεβρικός τρόπος μας δίνει το ίδιο αποτέλεσμα... θα υπολογίσουμε τη συνέλιξη αλγεβρικά με τρεις τρόπους ($f[n] * g[n], g[n] * f[n]$, συν ένας ακόμα τρόπος που υπάρχει λόγω του ότι το δεύτερο σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας). Αρχικά, ας προσέξουμε ότι
$$g[n] = a^{n-1},\ 1 \leq n \leq 4 \Leftrightarrow g[n] = a^{n-1}(u[n-1] - u[n-5]) \tag{18}$$

3.2.1 Συνέλιξη $f[n] * g[n]$

Θα είναι:

$$\begin{aligned} c_{fg}[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u[k] a^{n-k-1}(u[n-k-1]-u[n-k-5]) && (19)\\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k a^{n-k-1} u[k]u[n-k-1] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k a^{n-k-1} u[k]u[n-k-5] && (20)\end{aligned}$$

Το πρώτο γινόμενο βηματικών είναι 1 όταν $k \le n-1, k \ge 0$, ενώ το δεύτερο όταν $k \le n-5, k \ge 0$. Άρα θα έχουμε

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k a^{n-k-1} u[k]u[n-k-1] = \sum_{k=0}^{n-1} a^k a^{n-k-1} = a^{n-1}(n-1-0+1),\ \ 0 \le k \le n-1 \qquad (21)$$

και

$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k a^{n-k-1} u[k]u[n-k-5] = -\sum_{k=0}^{n-5} a^k a^{n-k-1} = -a^{n-1}(n-5-0+1),\ \ 0 \le k \le n-5 \qquad (22)$$

οπότε θα είναι

$$na^{n-1},\ \ 0 \le k \le n-1 \Leftrightarrow na^{n-1},\ \ n \ge 1 \qquad (23)$$

και

$$-(n-4)a^{n-1},\ \ 0 \le k \le n-5 \Leftrightarrow -(n-4)a^{n-1},\ \ n \ge 5 \qquad (24)$$

αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι υπάρχει επικάλυψη στα διαστήματα. Μπορούμε όμως να γράψουμε την παραπάνω σχέση, γράφοντας τους περιορισμούς στα διαστήματα ως βηματικές, ως

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k a^{n-k-1} u[k]u[n-k-1] = na^{n-1}u[n-1] \qquad (25)$$

και

$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k a^{n-k-1} u[k]u[n-k-5] = -(n-4)a^{n-1}u[n-5] \qquad (26)$$

και άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned} c_{fg}[n] &= na^{n-1}u[n-1] - (n-4)a^{n-1}u[n-5] && (27)\\ &= na^{n-1}(u[n-1]-u[n-5]) + 4a^{n-1}u[n-5] && (28)\\ &= \begin{cases} na^{n-1}, & 1 \le n \le 4 \\ 4a^{n-1}, & n \ge 5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} && (29)\end{aligned}$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με το γραφικό τρόπο λύσης.

3.2.2 Συνέλιξη $g[n] * f[n]$

Θα είναι:

$$\begin{aligned} c_{fg}[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{k-1}(u[k-1]-u[k-5])a^{n-k}u[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{k-1}a^{n-k}u[k-1]u[n-k] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{k-1}a^{n-k}u[k-5]u[n-k] && (30)\end{aligned}$$

Το πρώτο γινόμενο των βηματικών είναι 1 όταν $k \leq n, k \geq 1$, ενώ το δεύτερο όταν $k \leq n, k \geq 5$. Άρα θα έχουμε

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{k-1}a^{n-k}u[k-1]u[n-k] = \sum_{k=1}^{n} a^{k-1}a^{n-k} = a^{n-1}(n-1+1),\ 1 \leq k \leq n \tag{31}$$

και

$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{k-1}a^{n-k}u[k-5]u[n-k] = -\sum_{k=5}^{n} a^{k-1}a^{n-k} = -a^{n-1}(n-5+1),\ 5 \leq k \leq n \tag{32}$$

οπότε θα είναι

$$na^{n-1},\ 1 \leq k \leq n \Leftrightarrow na^{n-1},\ n \geq 1 \tag{33}$$

και

$$-(n-4)a^{n-1},\ 5 \leq k \leq n \Leftrightarrow -(n-4)a^{n-1},\ n \geq 5 \tag{34}$$

Βλέπουμε κι εδώ ότι υπάρχει επικάλυψη στα διαστήματα, αλλά μπορούμε και πάλι να γράψουμε αυτούς τους περιορισμούς ως βηματικές συναρτήσεις, δηλ.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{k-1}a^{n-k}u[k-1]u[n-k] = na^{n-1}u[n-1] \tag{35}$$

και

$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{k-1}a^{n-k}u[k-5]u[n-k] = -(n-4)a^{n-1}u[n-5] \tag{36}$$

και άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned} c_{gf}[n] &= na^{n-1}u[n-1] - (n-4)a^{n-1}u[n-5] && (37)\\ &= na^{n-1}(u[n-1] - u[n-5]) + 4a^{n-1}u[n-5] && (38)\\ &= \begin{cases} na^{n-1}, & 1 \leq n \leq 4 \\ 4a^{n-1}, & n \geq 5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} && (39) \end{aligned}$$

που είναι ξανά το ίδιο αποτέλεσμα με το γραφικό τρόπο λύσης αλλά και την προηγούμενη αλγεβρική μέθοδο.

3.2.3 Τρίτος τρόπος

Είναι

$$c_{gf}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k] = \sum_{k=1}^{4} a^{k-1}a^{n-k}u[n-k] \tag{40}$$

Εδώ εκμεταλλευτήκαμε ότι το $g[n]$ είναι πεπερασμένης διάρκειας και αλλάξαμε τα άκρα επιτόπου. Όμως πρέπει να δούμε τι θα γίνει με το $u[n-k]$. Προφανώς η συνάρτηση αυτή είναι 1 όταν $k \leq n$. Αφού $1 \leq k \leq 4$, θα έχουμε επίσης ότι

$$1 \leq k \leq n \leq 4$$
Ή
$$1 \leq k \leq 4 < n$$

Άρα θα έχουμε αντίστοιχα,

$$c_{gf}[n] = \sum_{k=1}^{n} a^{k-1}a^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} a^{n-1} = a^{n-1}(n-1+1) = na^{n-1}, \; 1 \le n \le 4 \tag{41}$$

ή

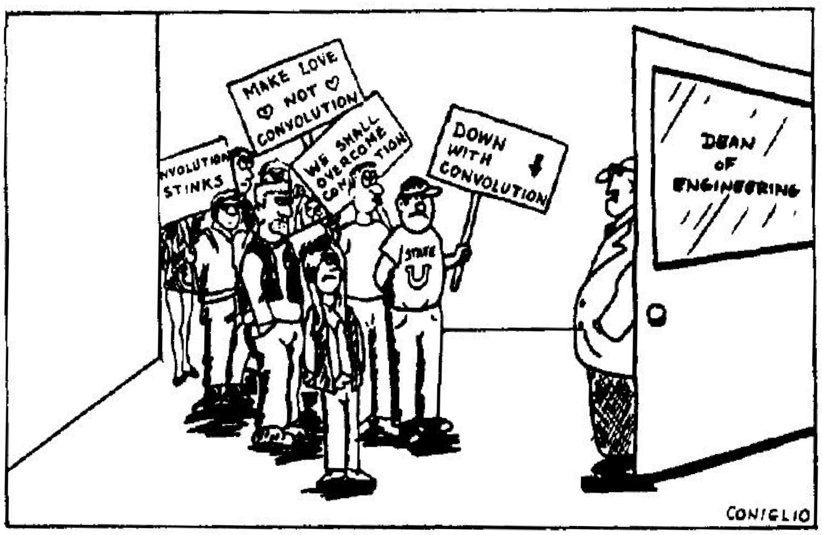
$$c_{gf}[n] = \sum_{k=1}^{4} a^{k-1}a^{n-k} = \sum_{k=1}^{4} a^{n-1} = a^{n-1}(4-1+1) = 4a^{n-1}, \; n > 4 \tag{42}$$

Άρα συγκεντρωτικά

$$c_{gf}[n] = \begin{cases} na^{n-1}, & 1 \le n \le 4 \\ 4a^{n-1}, & n > 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{43}$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με τα προηγούμενα.

Ας δούμε μερικές παρατηρήσεις...



Σχήμα 3: Πολύς κόσμος έχει ταλαιπωρηθεί από τη συνέλιξη...

1. Προφανώς, το Σχήμα 2 δεν είναι ακριβές γιατί οι μετακινήσεις του αριστερού σήματος γίνονται ανά ακέραιες χρονικές στιγμές, οπότε τα δείγματα του ενός σήματος πέφτουν πάντα πάνω στα δείγματα του άλλου. Απλά τα έχουμε ξεχωρίσει για οπτικούς λόγους.

2. Όπως βλέπετε, το πιο σημαντικό πράγμα είναι να μπορείτε να υπολογίσετε το μετατοπισμένο σήμα και να βλέπετε σωστά τις περιπτώσεις και τα άκρα του αθροίσματος, όσον αφορά τη γραφική λύση. Οι πράξεις μετά είναι απλά μαθηματικά.

3. Η συνέλιξη είναι αντιμεταθετική πράξη, ισχύει δηλ. ότι

$$c_{fg}[n] = f[n] * g[n] = g[n] * f[n] = c_{gf}[n] \tag{44}$$

$$c_{fg}(t) = f(t) * g(t) = g(t) * f(t) = c_{gf}(t) \tag{45}$$

δηλ. αν παίζαμε στη γραφική λύση με το $f[n] - f(t)$ αντί για το $g[n] - g(t)$, θα είχαμε πάλι το ίδιο αποτέλεσμα. Το είδατε άλλωστε στην αλγεβρική μέθοδο.

4. Προτιμούμε να παίξουμε με το μικρότερο σε διάρκεια σήμα, γιατί συνήθως είναι πιο εύκολη η διαδικασία. Αν και τα δυο σήματα είναι άπειρης διάρκειας, προτιμούμε όποιο θέλουμε.

5. Χρήσιμη παρατήρηση για πεπερασμένης διάρκειας σήματα είναι η εξής: αν το ένα εκ των δυο είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[a, b]$ και το άλλο είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[c, d]$, τότε η συνέλιξή τους είναι μη μηδενική στο διάστημα $[a + c, b + d]$. Είναι χρήσιμη παρατήρηση για να μπορούμε να ελέγχουμε τα αποτελέσματά μας. Για παράδειγμα, αν στο σχήμα 2, είχαμε συνέλιξη της $g[n]$ με τον εαυτό της, δηλ. $c_{gg}[n] = g[n] * g[n]$, τότε το αποτέλεσμα θα ήταν μη μηδενικό στο διάστημα $[2, 8]$.

6. Ο τρόπος που προτιμά ο καθένας για την επίλυση της συνέλιξης εξαρτάται από τον ίδιο. Διαλέξτε έναν τρόπο και μάθετέ τον καλά. Συνήθως, στο διακριτό χρόνο προτιμούμε κάποια αλγεβρική μέθοδο, ενώ στο συνεχή χρόνο είναι σύνηθες να βλέπουμε γραφικές λύσεις - φυσικά αυτό δε δεσμεύει κανέναν. :-)

7. Στη βιβλιογραφία, θα βρείτε τον ορισμό της συνέλιξης με διαφορετικές μεταβλητές. Π.χ.

$$c_{xy}(t) = \int_{\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \tag{46}$$

$$c_{xy}(\tau) = \int_{\infty}^{\infty} x(t)y(\tau-t)dt \tag{47}$$

   Και οι δυο παραπάνω σχέσεις είναι σωστές. Απλά αλλάξαμε τις μεταβλητές t, τ μεταξύ τους. Διαλέξτε όποια σας βολεύει, αρκεί να είστε συνεπείς και προσεκτικοί. Σε αυτές τις σημειώσεις, προτιμούμε συνήθως την πρώτη σχέση.

8. Η γραφική επίλυση που συζητήσαμε εδώ φαίνεται εκ πρώτης όψεως περίπλοκη και αποθαρρύνει το φοιτητή. Πράγματι, κάποιοι ισχυρίζονται ότι η συνέλιξη έχει οδηγήσει πολλούς προπτυχιακούς σε τμήματα Μηχανικών Η/Υ να ενστερνιστούν τη Θεολογία, είτε για σωτηρία ψυχής είτε ως εναλλακτική καριέρα!! :-) (δείτε το περιοδικό IEEE Spectrum, Μάρτιος 1991, σελ. 60).

4 Συστήματα Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου

Τα συστήματα δεν είναι τίποτα άλλο από σήματα κι αυτά, τα οποία συνήθως κάνουν μια συγκεκριμένη δουλειά επάνω στο σήμα εισόδου τους, $x(t)$ (ή $x[n]$). Αυτή η δουλειά αντικατοπτρίζεται στην έξοδο του συστήματος, $y(t)$ (ή $y[n]$). Το σήμα που περιγράφει το σύστημα συνήθως συμβολίζεται ως $h(t)$ (ή $h[n]$), και λέγεται *κρουστική απόκριση*. Η σχέση εισόδου-εξόδου ορίζεται ως η συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση:

$$y(t) = x(t) * h(t) \ \text{(ή } y[n] = x[n] * h[n]) \tag{48}$$

όπου $*$ συμβολίζει την πράξη της συνέλιξης. Επίσης, μπορεί ένα σύστημα να περιγραφεί με μια απλή μαθηματική σχέση, ως η έξοδος συναρτήσει της εισόδου:

$$y(t) = f(x(t)) \ \text{(ή } y[n] = f(x[n])) \tag{49}$$

4.1 Ιδιότητες Συστημάτων Συνεχούς Χρόνου

Τα συστήματα έχουν ορισμένες χρήσιμες ιδιότητες, τις οποίες και θα συζητήσουμε εδώ. Οι ιδιότητες αυτές είναι οι εξής:

1. **Συστήματα με μνήμη**: τα συστήματα με μνήμη είναι αυτά για τα οποία η έξοδός τους απαιτεί προηγούμενες τιμές της εισόδου για να υπολογιστεί. Για παράδειγμα, το σύστημα $y(t) = 2x(t)$ είναι ένα σύστημα χωρίς μνήμη, ενώ το σύστημα $y(t) = e^{x(t-1)}$ είναι ένα σύστημα με μνήμη.

2. **Αιτιατά συστήματα**: τα αιτιατά συστήματα είναι αυτά για τα οποία ο υπολογισμός της εξόδου ΔΕΝ απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου. Για παράδειγμα, το σύστημα $y(t) = 2x(t-1) + \sin(x(t))$ είναι αιτιατό, ενώ το σύστημα $y(t) = x(t-2)^2 + 4x(t+4)$ είναι μη αιτιατό, επειδή για τον υπολογισμό του $y(t)$ απαιτείται μελλοντική τιμή της εισόδου, η $x(t+4)$. Εναλλακτικά, μπορείτε να ελέγχετε την $h(t)$, αν σας δίνεται. Αν ισχύει ότι $h(t) = 0,\ t < 0$, τότε το σύστημα είναι αιτιατιό. Μια και είπαμε ότι ένα σύστημα δεν είναι τίποτα άλλα από ένα σήμα κι αυτό, θα δείτε λίγο παρακάτω ότι ένα αιτιατό σήμα $x(t)$ ικανοποιεί τη σχέση $x(t) = 0,\ t < 0$.

3. **Γραμμικά συστήματα**: τα γραμμικά συστήματα είναι αυτά για τα οποία ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) \rightarrow y(t) &= T\{Ax_1(t) + Bx_2(t)\} \\ &= AT\{x_1(t)\} + BT\{x_2(t)\} = y_1(t) + y_2(t) \end{aligned} \tag{50}$$

   Με λόγια, γραμμικά είναι τα συστήματα στα οποία αν εφαρμόσουμε ως είσοδο ένα άθροισμα σημάτων, θα πάρουμε ως έξοδο το άθροισμα των εξόδων που θα παίρναμε αν είχαμε δώσει ως είσοδο ένα-ένα τα σήματα, κι όχι όλα μαζί ως άθροισμα. Για παράδειγμα, το σύστημα $y(t) = 2x(t+1) - 3x(t-4)$ είναι γραμμικό, ενώ το σύστημα $y(t) = \sqrt{x(t)}$ δεν είναι γραμμικό, όπως επίσης και το $y(t) = x^2(t)$ δεν είναι γραμμικό. Η ιδιότητα της γραμμικότητας είναι πολύ σημαντική.

4. **Χρονικά Αμετάβλητα συστήματα**: τα συστήματα που είναι χρονικά αμετάβλητα είναι αυτά για τα οποία ισχύει ότι η έξοδός τους ΔΕΝ εξαρτάται ρητά από το χρόνο t. Για παράδειγμα, το σύστημα $y(t) = 3x(t+2) - 2\cos(x(t-2))$ είναι χρονικά αμετάβλητο, ενώ το σύστημα $y(t) = tx(t)$ είναι χρονικά μεταβλητό.

5. **Ευσταθή συστήματα**: τα συστήματα που είναι ευσταθή είναι αυτά για τα οποία ισχύει:

$$|x(t)| < M_x \Rightarrow |y(t)| < M_y,\ \ M_x, M_y < +\infty \tag{51}$$

   Με λόγια, αν η είσοδος είναι φραγμένη κατ΄ απόλυτη τιμή, τότε και η έξοδος είναι φραγμένη κατ΄ απόλυτη τιμή. Για παράδειγμα, το σύστημα $y(t) = x(t-1) + t$ δεν είναι ευσταθές, όπως επίσης και το σύστημα $y(t) = t/x(t+2)$, ενώ το σύστημα $y(t) = \sin(x(t))$ είναι ευσταθές. Ο συγκεκριμένος ορισμός της ευστάθειας λέγεται και BIBO stablility - Bounded Input Bounded Output stability, που δηλώνει ακριβώς ό,τι είπαμε: όταν η είσοδος είναι απολύτως φραγμένη, τότε και η έξοδος είναι απολύτως φραγμένη (κι όχι απαραίτητα από τον ίδιο αριθμό-φράγμα, όπως φαίνεται παραπάνω).

4.2 Ιδιότητες Συστημάτων Διακριτού Χρόνου

Τα συστήματα διακριτού χρόνου έχουν τις αντιστοιχες ιδιότητες:

1. **Συστήματα με μνήμη**: τα συστήματα με μνήμη είναι αυτά για τα οποία η έξοδός τους απαιτεί προηγούμενες τιμές της εισόδου για να υπολογιστεί. Για παράδειγμα, το σύστημα $y[n] = 2x[n]$ είναι ένα σύστημα χωρίς μνήμη, ενώ το σύστημα $y[n] = e^{x[n-2]}$ είναι ένα σύστημα με μνήμη.

2. **Αιτιατά συστήματα**: τα αιτιατά συστήματα είναι αυτά για τα οποία ο υπολογισμός της εξόδου ΔΕΝ απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου. Για παράδειγμα, το σύστημα $y[n] = 2x[n-1] + \sin(x[n])$ είναι αιτιατό, ενώ το σύστημα $y[n] = x^2[n-2] + 4x[n+4]$ είναι μη αιτιατό, επειδή για τον υπολογισμό του $y[n]$ απαιτείται μελλοντική τιμή της εισόδου, η $x[n+4]$. Εναλλακτικά, μπορείτε να ελέγχετε την $h[n]$, αν σας δίνεται. Αν ισχύει ότι $h[n] = 0,\ n < 0$, τότε το σύστημα είναι αιτιατιό. Μια και είπαμε ότι ένα σύστημα δεν είναι τίποτα άλλα από ένα σήμα κι αυτό, θα δείτε λίγο παρακάτω ότι ένα αιτιατό σήμα $x[n]$ ικανοποιεί τη σχέση $x[n] = 0,\ n < 0$.

3. **Γραμμικά συστήματα**: τα γραμμικά συστήματα είναι αυτά για τα οποία ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} x[n] = Ax_1[n] + Bx_2[n] \to y[n] &= T\{Ax_1[n] + Bx_2[n]\} \\ &= AT\{x_1[n]\} + BT\{x_2[n]\} = y_1[n] + y_2[n] \end{aligned} \tag{52}$$

   Με λόγια, γραμμικά είναι τα συστήματα στα οποία αν εφαρμόσουμε ως είσοδο ένα άθροισμα σημάτων, θα πάρουμε ως έξοδο το άθροισμα των εξόδων που θα παίρναμε αν είχαμε δώσει ως είσοδο ένα-ένα τα σήματα, κι όχι όλα μαζί ως άθροισμα. Για παράδειγμα, το σύστημα $y[n] = 2x[n+1] - 3x[n-4]$ είναι γραμμικό, ενώ το σύστημα $y[n] = \sqrt{x[n]}$ δεν είναι γραμμικό, όπως επίσης και το $y[n] = x^2[n]$ δεν είναι γραμμικό. Η ιδιότητα της γραμμικότητας είναι πολύ σημαντική.

4. **Χρονικά Αμετάβλητα συστήματα**: τα συστήματα που είναι χρονικά αμετάβλητα είναι αυτά για τα οποία ισχύει ότι η έξοδός τους ΔΕΝ εξαρτάται ρητά από το χρόνο n. Για παράδειγμα, το σύστημα $y[n] = 3x[n+2]) - 2\cos(x[n-2])$ είναι χρονικά αμετάβλητο, ενώ το σύστημα $y[n] = nx[n]$ είναι χρονικά μεταβλητό.

5. **Ευσταθή συστήματα**: τα συστήματα που είναι ευσταθή είναι αυτά για τα οποία ισχύει:

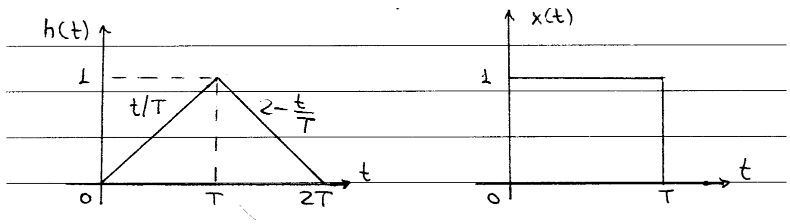
$$|x[n]| < M_x \Rightarrow |y[n]| < M_y, \;\; M_x, M_y < +\infty \tag{53}$$

   Με λόγια, αν η είσοδος είναι φραγμένη κατ' απόλυτη τιμή, τότε και η έξοδος είναι φραγμένη κατ' απόλυτη τιμή. Για παράδειγμα, το σύστημα $y[n] = x[n-1] + n$ δεν είναι ευσταθές, όπως επίσης και το σύστημα $y[n] = n/x[n+2]$, ενώ το σύστημα $y[n] = \sin(x[n])$ είναι ευσταθές. Ο συγκεκριμένος ορισμός της ευστάθειας λέγεται και BIBO stablility - Bounded Input Bounded Output stability, που δηλώνει ακριβώς ό,τι είπαμε: όταν η είσοδος είναι απολύτως φραγμένη, τότε και η έξοδος είναι απολύτως φραγμένη (κι όχι απαραίτητα από τον ίδιο αριθμό-φράγμα, όπως φαίνεται παραπάνω).

Από όλες αυτές τις κατηγορίες σημάτων, τα πιο σημαντικά είναι αυτά που είναι γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα, και σε αυτά θα αναφερόμαστε από εδώ και πέρα όταν μιλάμε για συστήματα. Η ευστάθεια είναι συνήθως μια επιθυμητή ιδιότητα αλλά δε θα τη θεωρήσουμε δεδομένη στη μελέτη μας.

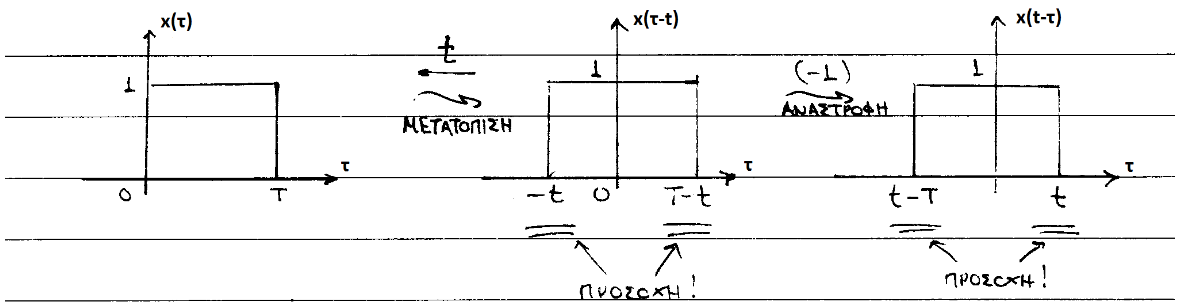
5 Ασκήσεις

1. **Έστω τα παρακάτω σήματα: Να υπολογίσετε τη συνέλιξη $\mathbf{y(t) = x(t) * h(t)}$.**



Σχήμα 4: Σχήμα Άσκησης 1

Λύση:
Επιλέγουμε να παίξουμε με το $x(t)$, καθ' ότι ευκολότερο. Η ανάκλαση και η μετατόπιση του σήματος φαίνεται στο σχήμα 5. Ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφηκε στην παράγραφο 2, θα έχουμε



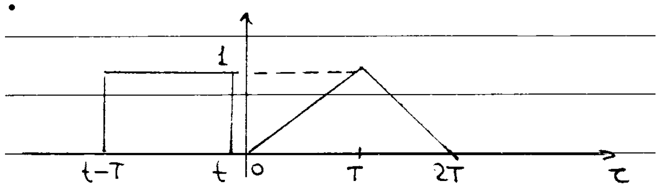
Σχήμα 5: Μετατόπιση και ανάκλαση για Άσκηση 1

τις παρακάτω περιπτώσεις:

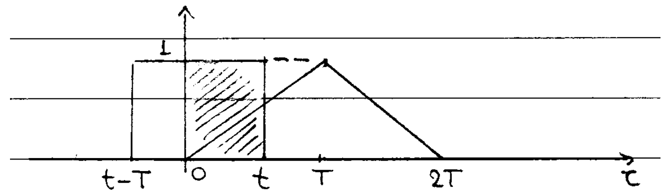
- $y(t) = 0,\ t < 0$ (σχήμα 6α')
- $y(t) = \int_0^t \frac{\tau}{T} d\tau = \frac{\tau^2}{2T}\Big|_0^t = \frac{t^2}{2T}$, για $t \geq 0$ και $t - T \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq T$ (σχήμα 6β')
- $y(t) = \int_{t-T}^{t} \frac{\tau}{T} d\tau + \int_T^t \left(2 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau = -\frac{t^2}{T} + 3t - \frac{3T}{2}$, για $t - T < T$ και $t \geq T \Leftrightarrow T \geq t < 2T$ (σχήμα 7α')
- $y(t) = \int_{t-T}^{2T} \left(2 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau = \left(2\tau - \frac{\tau^2}{2T}\right)\Big|_{t-T}^{2T} = \frac{t^2}{2T} - 3t + \frac{9T}{2}$, για $t < 3T$ και $t \geq 2T \Leftrightarrow 2T \leq t < 3T$ (σχήμα 7β')
- $y(t) = 0,\ t \geq 3T$ (σχήμα 8α')

Άρα τελικά θα είναι:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ και } t \geq 3T \\ \frac{t^2}{2T}, & 0 \leq t \leq T \\ -\frac{t^2}{T} + 3t - \frac{3T}{2}, & T \geq t < 2T \\ \frac{t^2}{2T} - 3t + \frac{9T}{2}, & 2T \leq t < 3T \end{cases} \tag{54}$$

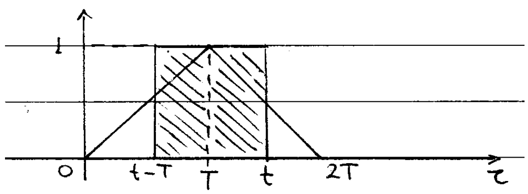


(α′) 1η περίπτωση Άσκησης 1

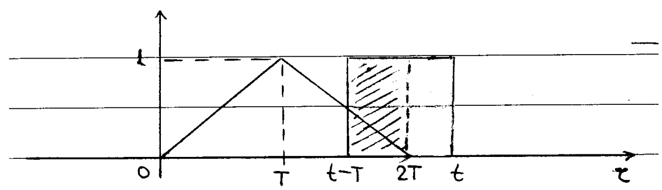


(β′) 2η περίπτωση Άσκησης 1

Σχήμα 6: Περιπτώσεις Άσκησης 1 - I

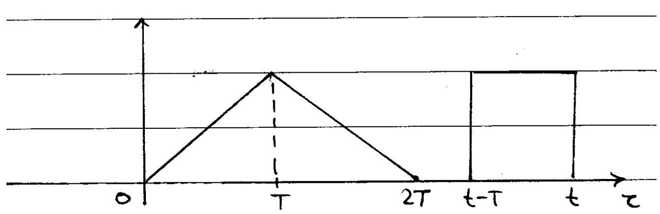


(α′) 3η περίπτωση Άσκησης 1



(β′) 4η περίπτωση Άσκησης 1

Σχήμα 7: Περιπτώσεις Άσκησης 1 - II



(α′) 5η περίπτωση Άσκησης 1

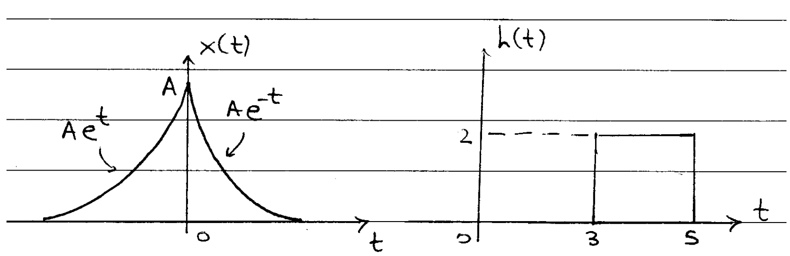
Σχήμα 8: Περιπτώσεις Άσκησης 1 - III

που είναι και το ζητούμενο.

2. **Έστω τα σήματα**

$$\mathbf{x(t) = Ae^{-|t|},\ h(t) = 2(u(t-3) - u(t-5))}$$

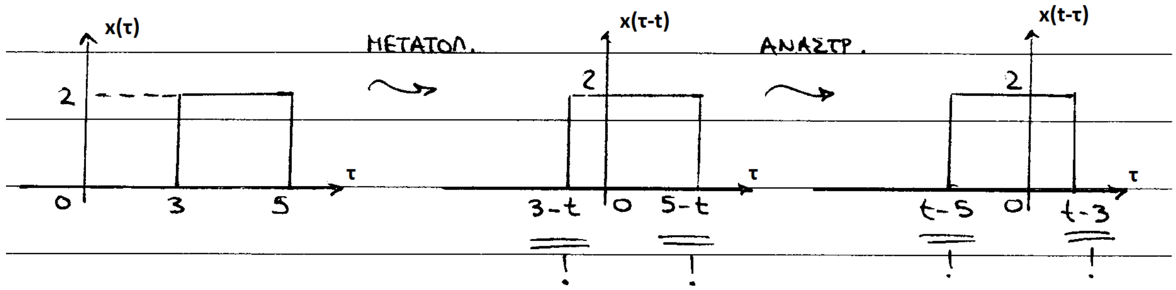
που φαίνονται στο σχήμα 9 Υπολογίστε τη συνέλιξη των δυο σημάτων.



Σχήμα 9: Σχήμα Άσκησης 2

Λύση:

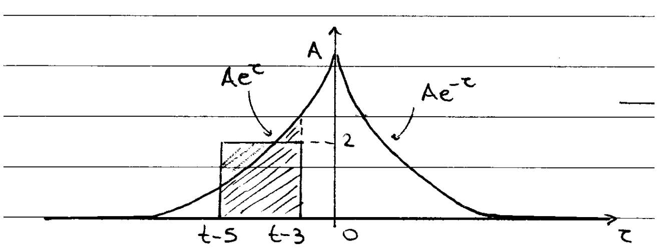
Επιλέγουμε να παίξουμε με το $h(t)$, καθ' ότι ευκολότερο. Η ανάκλαση και η μετατόπιση του σήματος φαίνεται στο σχήμα 10. Ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφηκε στην παράγραφο 2, θα έχουμε



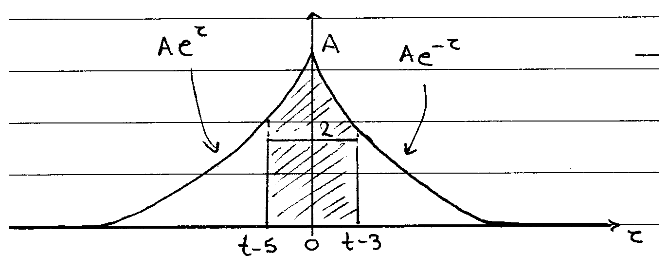
Σχήμα 10: Ανάκλαση και μετατόπιση του σήματος Άσκησης 2

τις παρακάτω περιπτώσεις:

- $y(t) = \int_{t-5}^{t-3} 2Ae^{\tau} d\tau = 2A(e^{t-3} - e^{t-5})$, για $t - 3 \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 3$ (σχήμα 11α')
- $y(t) = \int_{t-5}^{0} 2Ae^{\tau} d\tau + \int_{0}^{t-3} 2Ae^{-\tau} d\tau = 2A(2A - e^{t-5} - e^{3-t})$, για $t \leq 5$ και $t > 3 \Leftrightarrow 3 < t \leq 5$ (σχήμα 11β')
- $y(t) = \int_{t-5}^{t-3} 2Ae^{-\tau} d\tau = 2A(e^{5-t} - e^{3-t})$, για $t - 5 > 0 \Leftrightarrow t > 5$ (σχήμα 12α')

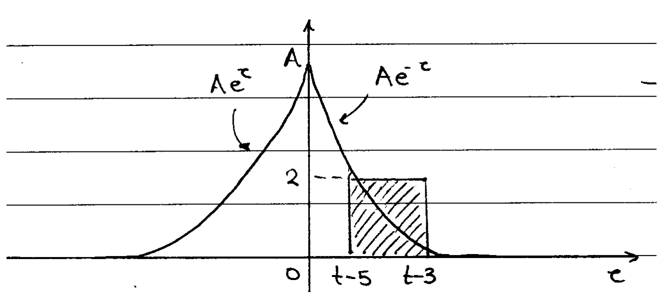


(α') 1η περίπτωση Άσκησης 2



(β') 2η περίπτωση Άσκησης 2

Σχήμα 11: Περιπτώσεις Άσκησης 2 - I



(α') 3η περίπτωση Άσκησης 2

Σχήμα 12: Περιπτώσεις Άσκησης 2 - II

Άρα τελικά θα έχουμε

$$y(t) = \begin{cases} 2A(e^{t-3} - e^{t-5}), & t \leq 3 \\ 2A(2A - e^{t-5} - e^{3-t}), & 3 < t \leq 5 \\ 2A(e^{5-t} - e^{3-t}), & t > 5 \end{cases} \tag{55}$$

που είναι και το ζητούμενο.

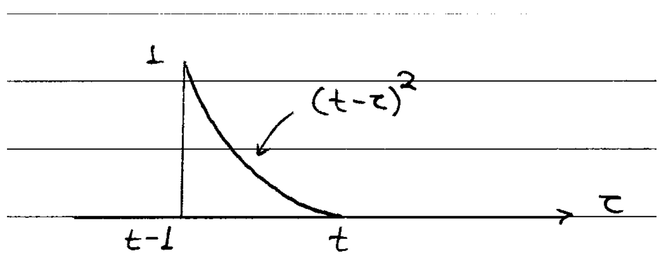
3. **Έστω τα σήματα**

$$\mathbf{x(t)} = \begin{cases} 0, & \text{αλλού} \\ \frac{1}{t}, & t \geq 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{y(t)} = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Υπολογίστε τη συνέλιξη των δυο σημάτων.

Λύση:
Επιλέγουμε να παίξουμε με το $h(t)$, καθ' ότι ευκολότερο στη σχεδίαση. Η ανάκλαση και η μετατόπιση του σήματος φαίνεται στο σχήμα 13. Ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφηκε στην παράγραφο



Σχήμα 13: Ανακλασμένο και μετατοπισμένο σήμα Άσκησης 3

2, θα έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- $y(t) = 0,\ t \leq 1$
- $y(t) = \int_1^t \frac{1}{\tau}(t-\tau)^2 d\tau = t^2 \ln|\tau|\Big|_1^t - 2t\tau\Big|_1^t + \frac{\tau^2}{2}\Big|_1^t = \cdots$, για $t < 2$ και $t > 1 \Leftrightarrow 1 < t < 2$
- $y(t) = \int_{t-1}^t \frac{1}{\tau}(t-\tau)^2 d\tau = t^2 \ln|\tau|\Big|_{t-1}^t - 2t\tau\Big|_{t-1}^t + \frac{\tau^2}{2}\Big|_{t-1}^t = \cdots$, για $t-1 \geq 1 \Leftrightarrow t \geq 2$

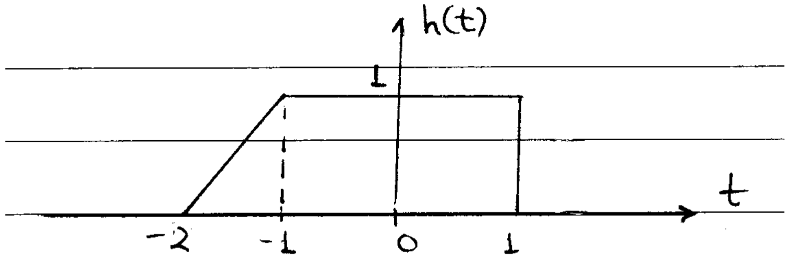
Επιβεβαιώστε εσείς σχηματικά ότι τα παραπάνω είναι σωστά! :-)

4. **Έστω το σήμα**

$$\mathbf{x(t) = 2\delta(t) - 3\delta(t-4)}$$

και το σήμα $\mathbf{h(t)}$ που φαίνεται στο σχήμα 14. Βρείτε το αποτέλεσμα της συνέλιξης των δυο σημάτων.

Λύση:
Η συνέλιξη με συναρτήσεις Δέλτα απλά παράγει αντίγραφα των σημάτων με τα οποία συνελίσσεται,



Σχήμα 14: Σχήμα Άσκησης 4

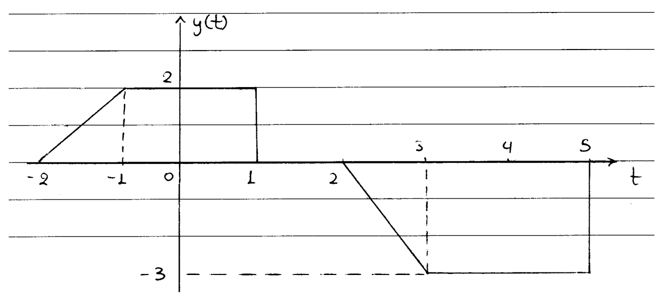
μετατοπισμένα στη θέση της συνάρτησης Δέλτα, πολλαπλασιασμένα με το πλάτος της. Ούτε ολοκληρώματα, ούτε μετατοπίσεις, ούτε αναστροφές, ούτε τίποτα! :-) Γίνεται όμως ευρεία χρήση των ιδιοτήτων της συνάρτησης Δέλτα, όπως η

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

Άρα θα είναι απλά

$$y(t) = h(t) * (2\delta(t) - 3\delta(t-4)) = 2h(t) * \delta(t) - 3h(t) * \delta(t-4) = 2h(t) - 3h(t-4)$$

Το αποτέλεσμα της συνέλιξης φαίνεται στο σχήμα 15.



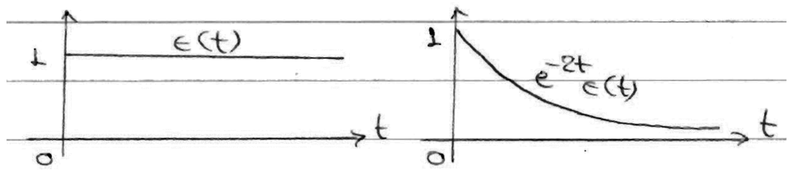
Σχήμα 15: Σήμα συνέλιξης $h(t) * x(t)$ Άσκησης 4

5. **Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων**

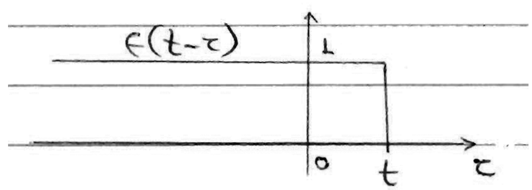
$$\mathbf{x(t) = u(t)}$$
$$\mathbf{y(t) = e^{-2t}u(t)}$$

Λύση:
Τα δυο σήματα είναι όπως στο σχήμα 16. Παίζουμε με το $x(t)$. Το ανεστραμμένο και ανακλασμένο σήμα φαίνεται στο σχήμα 17. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις, οι οποίες φαίνονται στα σχήματα 18α′ και 18β′.

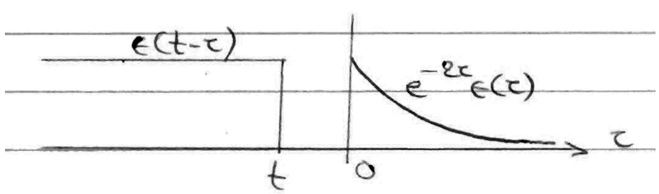
- $c_{xy}(t) = 0,\ t \leq 0$
- $c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau} u(t) u(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{-2\tau} d\tau = \dfrac{1 - e^{-2t}}{2},\ t > 0$



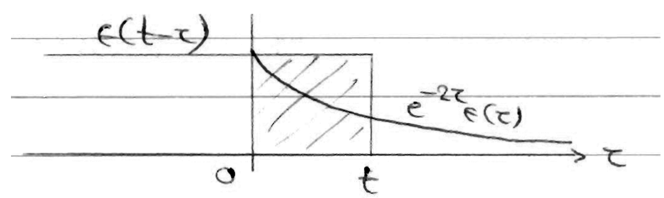
Σχήμα 16: Σήματα Άσκησης 5



Σχήμα 17: Μετατοπισμένο σήμα Άσκησης 5



(α') Περίπτωση 1η



(β') Περίπτωση 2η

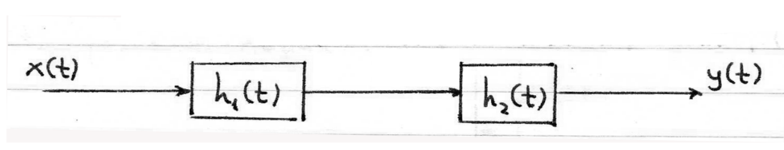
Σχήμα 18: Περιπτώσεις Άσκησης 5

Άρα τελικά θα είναι

$$c_{xy}(t) = \begin{cases} \frac{1-e^{-2t}}{2}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \tag{56}$$

που είναι και το ζητούμενο.

6. **Θεωρούμε το σύστημα που φαίνεται στο σχήμα 19, με**



Σχήμα 19: Σήμα Άσκησης 6

$$\mathbf{x(t) = u\Big(t + \frac{1}{2}\Big) - u\Big(t - \frac{1}{2}\Big)}$$
$$\mathbf{h_1(t) = \delta\Big(t - \frac{3}{2}\Big)}$$
$$\mathbf{h_2(t) = u(t) - u(t - 3)}$$

Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί η έξοδος του συστήματος, $\mathbf{y}(\mathbf{t})$.

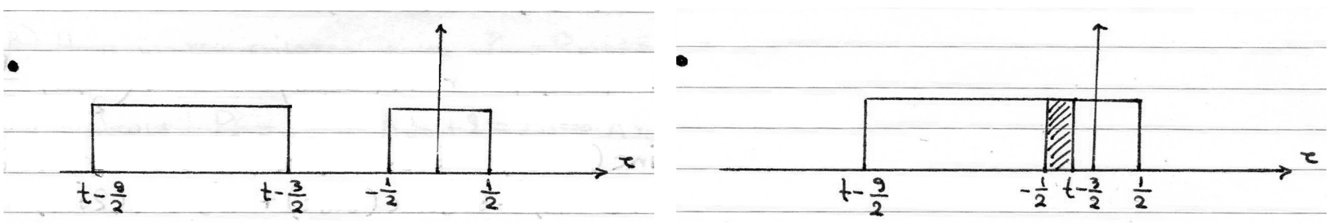
<u>Λύση:</u>
Αφού τα συστήματα είναι σε σειρά, μπορούμε να βρούμε το συνολικό σύστημα $h(t)$, που είναι η συνέλιξη των δυο συστημάτων, και είναι

$$\begin{aligned} h(t) &= h_1(t) * h_2(t) = \delta\Big(t - \frac{3}{2}\Big) * \Big(u(t) - u(t-3)\Big) \\ &= u\Big(t - \frac{3}{2}\Big) - u\Big(t - 3 - \frac{3}{2}\Big) = u\Big(t - \frac{3}{2}\Big) - u\Big(t - \frac{9}{2}\Big) \end{aligned}$$

Άρα είναι σαν να περνάμε την είσοδο $x(t)$ από το σύστημα $h(t)$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} x(t) &= u\Big(t + \frac{1}{2}\Big) - u\Big(t - \frac{1}{2}\Big) = rect\Big(\frac{t}{1}\Big) \\ h(t) &= u\Big(t - \frac{3}{2}\Big) - u\Big(t - \frac{9}{2}\Big) = rect\Big(\frac{t-3}{3}\Big) \end{aligned}$$

Οι περιπτώσεις φαίνονται στο σχήμα 20, 21, 22. Κατά τα γνωστά λοιπόν, θα παίξουμε με το $h(t)$,

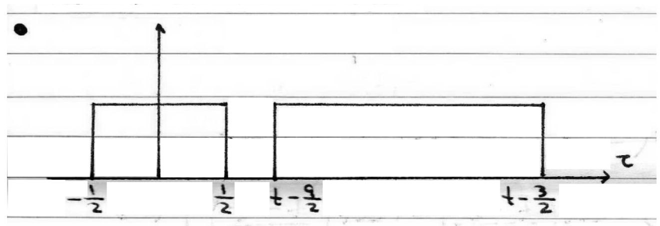


(α') Περίπτωση 1η (β') Περίπτωση 2η

Σχήμα 20: Περιπτώσεις Άσκησης 6 - 1

(α') Περίπτωση 3η (β') Περίπτωση 4η

Σχήμα 21: Περιπτώσεις Άσκησης 6 - 2



Σχήμα 22: Περιπτώσεις Άσκησης 6 - 3

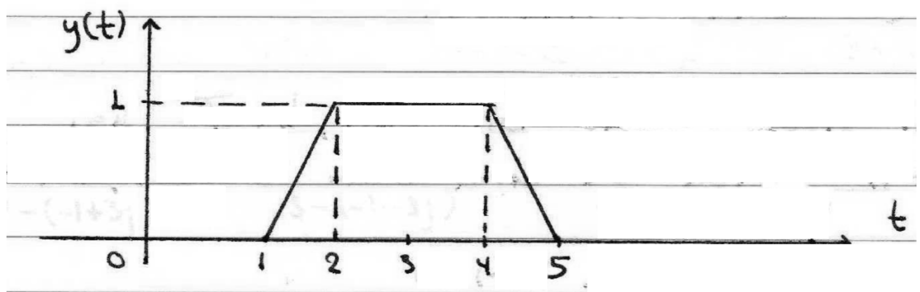
και θα έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- $y(t) = 0,\ t \leq 1$
- $y(t) = \int_{-1/2}^{t-3/2} d\tau = \tau\Big|_{-1/2}^{t-3/2} = t-1$, για $1 < t \leq 2$.
- $y(t) = \int_{-1/2}^{1/2} d\tau = \tau\Big|_{-1/2}^{1/2} = 1$, για $2 < t \leq 4$
- $y(t) = \int_{t-9/2}^{1/2} d\tau = \tau\Big|_{t-9/2}^{1/2} = 5-t$, για $4 < t \leq 5$
- $y(t) = 0,\ t > 5$

Άρα συνολικά θα είναι

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 1,\ t > 5 \\ t-1, & 1 < t \leq 2 \\ 1, & 2 < t \leq 4 \\ 5-t, & 4 < t \leq 5 \end{cases} \tag{57}$$

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα 23.



Σχήμα 23: Αποτέλεσμα Άσκησης 6

Παρατήρηση: Μπορούμε να περάσουμε την είσοδο από το $h_1(t)$, να βρούμε την έξοδο $y_1(t)$, και έπειτα να περάσουμε την $y_1(t)$ από το $h_2(t)$ και να βρούμε την τελική έξοδο $y(t)$.

7. **Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων:**

$$\mathbf{x[n] = \delta[n] - 3\delta[n-1] + 2\delta[n-3],\ \ h[n] = -\delta[n+1] + \delta[n-1]} \tag{58}$$

Λύση:
Επειδή τα σήματα αποτελούνται από λίγες συναρτήσεις δέλτα, μπορούμε να εφαρμόσουμε μια πολύ χρήσιμη ιδιότητα των συναρτήσεων δέλτα: $\delta[n-k] * \delta[n-l] = \delta[n-k-l]$
Άρα θα είναι:

$$\begin{aligned} x[n] * h[n] &= (\delta[n] - 3\delta[n-1]] + 2\delta[n-3]) * (-\delta[n+1] + \delta[n-1]) \\ &= -\delta[n+1] + \delta[n-1] + 3\delta[n] - 3\delta[n-2] - 2\delta[n-2] + 2\delta[n-4] \\ &= -\delta[n+1] + 3\delta[n] + \delta[n-1] - 5\delta[n-2] + 2\delta[n-4] \end{aligned} \tag{59}$$

8. **Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων:**

$$\mathbf{x[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1}$$

και

$$\mathbf{h[n] = u[n-2]}$$

Λύση:
Εδώ δεν έχουμε συναρτήσεις δέλτα (άσχετα αν μπορούμε να εκφράσουμε τα σήματά μας ως άθροισμα τέτοιων), άρα θα χρησιμοποιήσουμε καθαρά αλγεβρικό τρόπο για τη λύση. Πάμε με τον ορισμό:

1ος τρόπος:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k]u[n-k-2]$$

Προσοχή, η μεταβλητή μας είναι το k!!
Παρατηρήστε το γινόμενο $u[k]u[n-k-2]$.
Ξέρουμε ότι

$$u[k] = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

και

$$u[n-k-2] = \begin{cases} 1, & k \leq n-2 \\ 0, & k > n-2 \end{cases}$$

οπότε το γινόμενο

$$u[k]u[n-k-2] = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq n-2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

άρα η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k]u[n-k-2] = \sum_{k=0}^{n-2} a^k = \frac{1-a^{n-1}}{1-a}, \ \text{για } n \geq 2$$

Προφανώς για $n < 2$ η έξοδος είναι μηδέν.

2ος τρόπος:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k-2]a^{n-k}u[n-k]$$

Παρατηρήστε το γινόμενο $u[k-2]u[n-k]$.
Ξέρουμε ότι

$$u[k-2] = \begin{cases} 1, & k \geq 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

και

$$u[n-k] = \begin{cases} 1, & k \leq n \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

οπότε το γινόμενο

$$u[k-2]u[n-k] = \begin{cases} 1, & 2 \leq k \leq n \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

άρα η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k-2]a^{n-k}u[n-k] \\ &= \sum_{k=2}^{n} a^{n-k} = a^n \sum_{k=2}^{n} (a^{-1})^k \\ &= \frac{a^{n-2}-a^{-1}}{1-a^{-1}} = \frac{a^{n-1}-1}{a-1}, \text{ για } n \geq 2 \end{aligned}$$

και

$$y[n] = 0, \text{ για } n < 2$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με τον 1ο τρόπο.
Άρα τελικά:

$$y[n] = \begin{cases} \dfrac{1-a^{n-1}}{1-a}, & n \geq 2 \\ 0, & n < 2 \end{cases}$$

Σημείωση:
Στα παραπάνω μας φάνηκε χρήσιμη η σχέση:

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} a^k = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a}, \text{ για } N_2 \geq N_1 \tag{60}$$

9. **Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων**

$$\mathbf{x[n] = a^{|n|}, \quad |a| < 1}$$

και

$$\mathbf{h[n] = u[n-N]} \tag{61}$$

Λύση:
1ος τρόπος:
Έχουμε

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^{|k|}u[n-k-N]$$

Η $u[n-k-N] = 1$ όταν $n-k-N \geq 0 \Rightarrow k \leq n-N$, οπότε το παραπάνω άθροισμα γράφεται

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^{|k|}u[n-k-N] = \sum_{k=-\infty}^{n-N} a^{|k|}$$

Εδώ διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

- Περίπτωση 1: Είναι $n-N<0$.
  Τότε

$$\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n-N} a^{|k|} = \sum_{k=N-n}^{+\infty} a^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} a^k - \sum_{k=0}^{N-n-1} a^k \\
&= \frac{1}{1-a} - \frac{1-a^{N-n-1+1}}{1-a} = \frac{a^{N-n}}{1-a}
\end{aligned}$$

- Περίπτωση 2: Είναι $n-N \geq 0$.
  Τότε

$$\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n-N} a^{|k|} = \sum_{k=-\infty}^{-1} a^{-k} + \sum_{k=0}^{n-N} a^k = \sum_{k=1}^{+\infty} a^k + \sum_{k=0}^{n-N} a^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} a^k - a^0 + \sum_{k=0}^{n-N} a^k = \frac{1}{1-a} - 1 + \frac{1-a^{n-N+1}}{1-a} \\
&= \frac{a}{1-a} + \frac{1-a^{n-N+1}}{1-a} = \frac{1+a-a^{n-N+1}}{1-a}
\end{aligned}$$

Άρα τελικά:

$$y[n] = \begin{cases} \dfrac{a^{N-n}}{1-a}, & n < N \\ \\ \dfrac{1+a-a^{n-N+1}}{1-a}, & n \geq N \end{cases}$$

2ος τρόπος:
Το σήμα $x[n] = a^{|n|}$ μπορεί να γραφεί ως $x[n] = a^{-n}u[-n-1] + a^n u[n]$.
Έτσι θα έχουμε

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (a^{-k}u[-k-1] + a^k u[k])u[n-k-N]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (a^{-k}u[-k-1])u[n-k-N] + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (a^k u[k])u[n-k-N] = y_1[n] + y_2[n].$$

Ας δούμε πως συμπεριφέρονται οι βηματικές που έχουμε εδώ. Όπως δείξαμε παραπάνω,

$$u[n-k-N] = 1, k \leq n-N$$

Επίσης,

$$u[-k-1] = 1, k \leq -1$$

και προφανώς

$$u[k] = 1, k \geq 0$$

Ας δούμε τους όρους του $y[n]$ έναν-έναν, ξεχωριστά. Ο πρώτος όρος, $y_1[n]$, γράφεται:

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^{-k} u[-k-1]u[n-k-N]$$

Για το γινόμενο των βηματικών που έχουμε εδώ, σύμφωνα με τα παραπάνω, θα είναι

$$u[-k-1]u[n-k-N] = 1$$

όταν

$$k \leq -1, \quad k \leq n-N$$

Εδώ διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

- Περίπτωση 1: Είναι $n-N \leq -1$.
  Τότε $y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-N} a^{-k} = \sum_{k=N-n}^{+\infty} a^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k - \sum_{k=0}^{N-n-1} a^k = \frac{1}{1-a} - \frac{1-a^{N-n}}{1-a} = \frac{a^{N-n}}{1-a}$.
- Περίπτωση 2: Είναι $n-N > -1$.
  Τότε $y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{-1} a^{-k} = \sum_{k=1}^{+\infty} a^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k - a^0 = \frac{1}{1-a} - 1 = \frac{a}{1-a}$.

Άρα

$$y_1[n] = \begin{cases} \frac{a^{N-n}}{1-a}, & n \leq N-1 \\ \frac{a}{1-a}, & n > N-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a^{N-n}}{1-a}, & n < N \\ \frac{a}{1-a}, & n \geq N \end{cases}$$

Ο δεύτερος όρος, $y_2[n]$, γράφεται:

$$y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k]u[n-k-N] = \sum_{k=0}^{n-N} a^k$$

Για το γινόμενο των βηματικών που έχουμε εδώ, θα είναι

$$u[k]u[n-k-N] = 1$$

όταν

$$k \geq 0, \quad k \leq n-N$$

Κι εδώ διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

- Περίπτωση 1: Είναι $n-N < 0$.
  Τότε $y_2[n] = 0$, γιατί $u[k]u[n-k-N] = 0$, αν $n-N < 0$.

- Περίπτωση 2: Είναι $n - N \geq 0$.
  Τότε $y_2[n] = \sum_{k=0}^{n-N} a^k = \dfrac{1 - a^{n-N+1}}{1-a}$.

Άρα

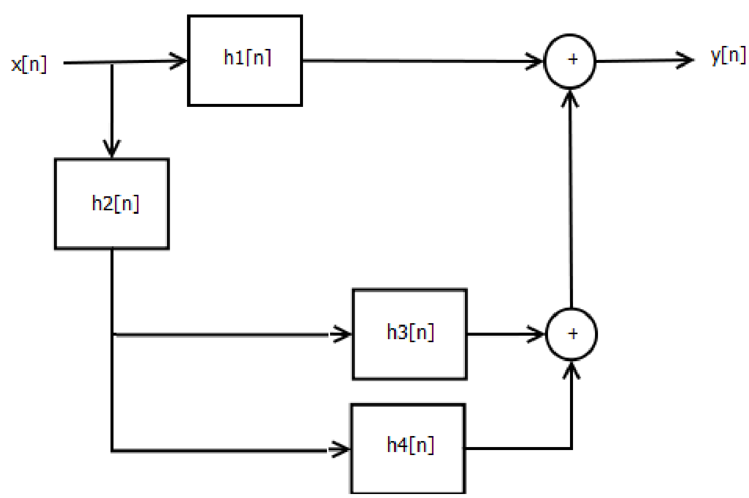
$$y_2[n] = \begin{cases} 0, & n < N \\ \dfrac{1 - a^{n-N+1}}{1-a}, & n \geq N \end{cases}$$

Οπότε τελικά (ουφφφφφ...) θα είναι:

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n] = \begin{cases} \dfrac{a^{N-n}}{1-a}, & n < N \\ \\ \dfrac{1 + a - a^{n-N+1}}{1-a}, & n \geq N \end{cases}$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με τον 1ο τρόπο.

10. **Δίνεται το παρακάτω σύστημα: με $\mathbf{h_1[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]}$, $\mathbf{h_2[n] = \frac{1}{2}\delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n-1]}$, $\mathbf{h_3[n] = 2\delta[n]}$,**



Βρείτε την έξοδο $\mathbf{y[n]}$ ως συνάρτηση του $\mathbf{x[n]}$.

<u>Λύση:</u>

Είναι

$$
\begin{aligned}
h[n] &= h_1[n] + h_2[n] * (h_3[n] + h_4[n]) \\
&= \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] + (\frac{1}{2}\delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n-1]) * (2\delta[n] - 2(\frac{1}{2})^n u[n]) \\
&= 2\delta[n] + \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n u[n-1] - (\frac{1}{2})^n u[n] \\
&= 2\delta[n] + (\frac{1}{2})^n u[n-1] - (\frac{1}{2})^n u[n] \\
&= 2\delta[n] - (\frac{1}{2})^n (u[n] - u[n-1]) \\
&= 2\delta[n] - (\frac{1}{2})^n \delta[n] = 2\delta[n] - \delta[n] \\
&= \delta[n] \qquad (62)
\end{aligned}
$$

Άρα $y[n] = h[n] * x[n] = \delta[n] * x[n] = x[n]$, δηλ. το σύστημα αφήνει αναλλοίωτη την είσοδο.