Συνέλιξη στο MATLAB

Επιμέλεια:
Καφεντζής Γιώργος
Υποψ. Διδάκτωρ Τμημ. Η/Υ
Πανεπιστήμιο Κρήτης

22-03-2013

1 Εισαγωγή

Έχουμε συζητήσει τη συνέλιξη συνεχούς χρόνου στη θεωρία, καθώς και σε ασκήσεις. Ας δούμε σε αυτές τις σημειώσεις το πως σχεδιάζουμε και επιβεβαιώνουμε τα αποτελέσματα στο MATLAB. Υπάρχουν μερικά σημεία που χρειάζονται προσοχή όσον αφορά την αναπαρασταση σημάτων συνεχούς χρόνου σε ένα περιβαλλον διακριτού χρονου, οπως το MATLAB, και αυτά θα ξεδιαλύνουμε σε αυτές τις σημειώσεις.
Υπενθυμίζεται ότι η συνέλιξη είναι μια πράξη που σχετιζει την είσοδο ενός συστήματος, $x(t)$, με την κρουστική απόκριση του συστήματος, $h(t)$, και την έξοδο $y(t)$, και δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{1}$$

2 Σήματα συνεχούς χρόνου - Σχεδίαση και Συνέλιξη

Ας δούμε δυο χαρακτηριστικά παραδείγματα.

1. Έστω λοιπόν ότι έχουμε δυο σηματα συνεχούς χρόνου, τα

$$x(t) = \cos(\pi t/2),\ \ -5 \le t \le 5 \tag{2}$$

   και

$$h(t) = 2rect(t/2) \tag{3}$$

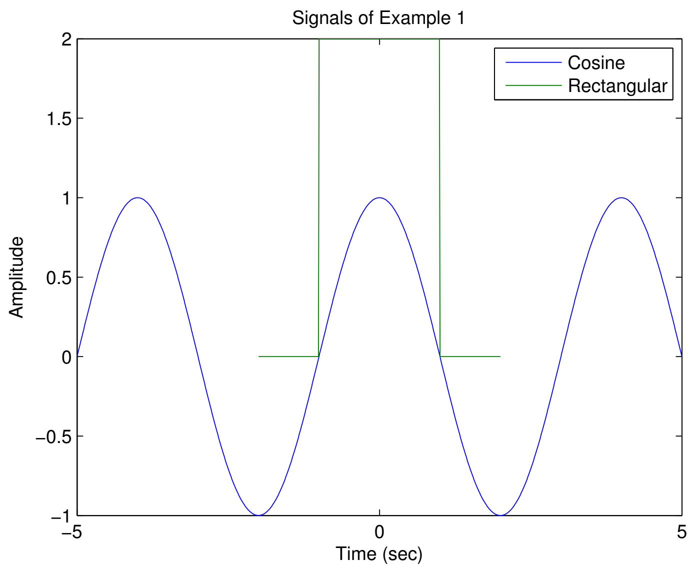
   όπου $Arect(t/T)$ είναι ένα συμμετρικό τετραγωνικό παράθυρο με πλάτος A και διάρκεια T, από $-T/2$ ως $T/2$ sec. Άρα το σήμα $2rect(t/2)$ είναι ενα συμμετρικό τετραγωνικό παραθυρο με διάρκεια 2 sec (από -1 ως 1 sec) και πλάτος 2.

   Θυμάστε ότι το MATLAB αναγνωρίζει όλες τις μεταβλητές του ως πίνακες. Οπότε ολα τα δεδομένα που θα εισάγουμε θα είναι μορφής πινάκων, και συγκεκριμένα, διανυσμάτων (πινάκων $Nx1$ ή $1xN$). Παρακάτω δίνεται κώδικας για τη σχεδίαση των σημάτων στο MATLAB:

```
ts = 0.01;                      % Sampling step
tx = -5:ts:5;                   % Time vector for x(t)
x = cos(pi * tx/ 2);            % x(t)
th = -2:ts:2;                   % Time vector for h(t)
h = 2*rectpuls(th/2);           % h(t)
plot(tx, x, th, h);             % Plot the result
```

```
xlabel('Time (sec)');            % Make plot pretty :-)
ylabel('Amplitude');             % Make plot pretty :-)
title('Signals of Example 1');   % Make plot pretty :-)
legend('Cosine', 'Rectangular'); % Make plot pretty :-)
```

Το αποτέλεσμα φαινεται στο σχήμα 1.



Σχήμα 1: Σήματα Παραδειγματος 1

Μερικές παρατηρήσεις στον παραπάνω κώδικα...

(α΄) Η πρώτη γραμμή μας καθορίζει το πόσο συχνά παίρνουμε δείγματα από το συνεχές σήμα, για να το αναπαραστήσουμε στο MATLAB. Όπως γνωριζετε, ένα σήμα συνεχούς χρόνου ορίζεται **κάθε** χρονική στιγμή, οι οποίες ειναι άπειρες το πλήθος, ακόμα και σε ένα κλειστο διάστημα όπως π.χ. το $[0, 1]$. Προφανώς δεν μπορούμε να αναπαραστησουμε όλες αυτές τις τιμές. Πρεπει να διαλέξουμε κάποιες. Εδώ, στην πρώτη γραμμή επιλέγουμε το βήμα με το οποίο θα παίρνουμε τιμές από τα σήματα μας. Το βημα εδώ ειναι 0.01 sec, το οποίο στην περίπτωση μας είναι αρκετό – το βήμα αυτό εξαρτάται από το συχνοτικό περιεχόμενο των σημάτων, όπως θα δείτε προς το τελος του μαθήματος.

(β΄) Στη δευτερη και τέταρτη γραμμή, ορίζουμε τα πεδία ορισμού των σημάτων. Το th δεν ειναι ανάγκη να ειναι διαφορετικό από το tx, όμως το tx δε θα μπορούσε να είναι ίδιο με το th, γιατι το $x(t)$ ορίζεται στο $[-5, 5]$. Επίσης, το $h(t)$ έχει διάρκεια από -1 ως 1, οπότε η επιλογή του διαστήματος $[-2, 2]$ μας δίνει μερικά μηδενικά εκατέρωθεν του παλμού.

(γ΄) Θα μπορούσαμε να προσθέσουμε μερικά επιπλέον μηδενικά εκατέρωθεν και στο $x(t)$ ώστε να προσεγγιζει ακόμα περισσοτερο το πραγματικό σήμα. Ας βάλουμε 10 δευτερολεπτα εκατέρωθεν. Αυτό θα γινόταν κάπως ετσι:

```
ts = 0.01;                                             % Sampling step
tx = -5:ts:5;                                          % Time vector for x(t)
x = cos(pi * tx/ 2);                                   % x(t)
x_new = [zeros(1,length(tx)-1) x zeros(1,length(tx)-1)]; % Enhanced x(t)
tx_new = -15:ts:15;                                    % New time vector for x(t)
```

```
plot(tx_new, x_new, th, h);                                  % Plot the result
xlabel('Time (sec)');                                        % Make plot pretty :-)
ylabel('Amplitude');                                         % Make plot pretty :-)
title('Signals of Example 1');                               % Make plot pretty :-)
legend('Cosine', 'Rectangular');                             % Make plot pretty :-)
```

Τρέξτε τον παραπάνω κώδικα για να δείτε το αποτέλεσμα. :-)

(δ′) Η συνάρτηση rectpuls() υλοποιεί έναν τετραγωνικό παλμό διάρκειας 1 δευτερολέπτου και πλάτους 1, στο ορισμα-άξονα που του δίνεται. Η κλήση που κάνουμε εδώ, 2*rectpuls(th/2), φτιάχνει ένα τετραγωνικό παράθυρο διάρκειας 2 δευτερολέπτων, και πλάτους 2.

(ε′) Οι τελευταιες 4 γραμμές απλά δίνουν μια περισσοτερη σαφήνεια στη γραφική μας παρασταση. Μην τις παραμελείτε, δεν είναι μόνο για αισθητικούς λόγους. :-)

Ας πούμε οτι θέλουμε να κάνουμε συνέλιξη αυτών των δυο σημάτων. Το ολοκλήρωμα της συνέλιξης δινεται ως

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{4}$$

Η συνέλιξη υλοποιείται στο MATLAB με τη συνάρτηση conv. Η συνάρτηση αυτή όμως υλοποιεί τη συνέλιξη για σήματα διακριτού χρόνου. Η σχέση (4) όμως είναι σχέση συνεχούς χρόνου. Θα πρέπει να τη μετατρεψουμε σε μια κάπως πιο βολική, διακριτή μορφή, ώστε να χρησιμοποιήσουμε την έτοιμη συνάρτηση που μας δινει το MATLAB. Μπορει να δειχθεί οτι η σχέση (4) μπορει να προσεγγιστεί από τη σχέση

$$y(kT) = x(kT) * h(kT) = T\sum_{i=k_0}^{k} x(iT)h((k-i)T) \tag{5}$$

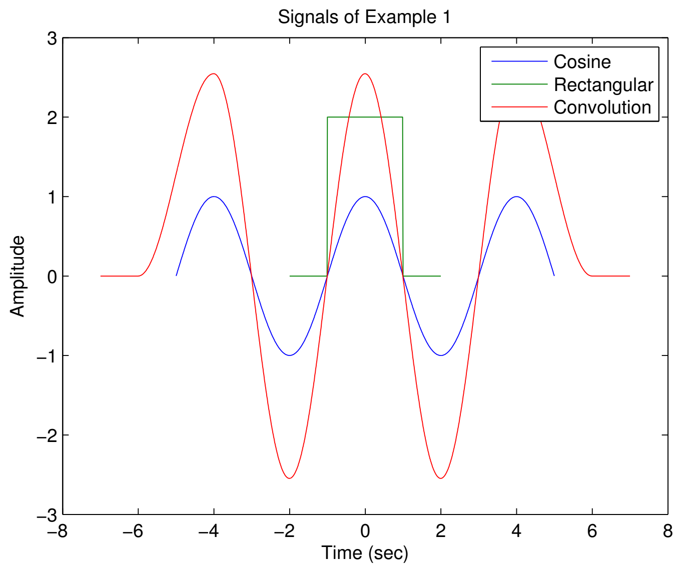
όπου kT είναι ακέραιες χρονικές στιγμές ανά T δευτερόλεπτα (ουσιαστικά, $T = t_s$ στον κώδικα). Η συνάρτηση conv υλοποιεί ακριβώς το άθροισμα που φαινεται παραπάνω (χωρίς τη σταθερά T). Άρα η συνέλιξη των δυο σημάτων θα δινεται από τον κώδικα παρακάτω:

```
ty = -7:ts:7;                                          % Convolution time vector
                                                       % [tx1+th1, tx2+th2]
y = ts*conv(x,h);                                      % Convolution approximation
plot(tx, x, th, h, ty, y);                             % Plot the result
xlabel('Time (sec)');                                  % Make plot pretty :-)
ylabel('Amplitude');                                   % Make plot pretty :-)
title('Signals of Example 1');                         % Make plot pretty :-)
legend('Cosine', 'Rectangular', 'Convolution'); % Make plot pretty :-)
```

Το αποτέλεσμα φαινεται στο σχήμα 2. Προσέξτε οτι τα άκρα του τετραγωνικού παραθύρου (μετα την ανάκλαση και μετατοπιση που έχει υποστεί, οπως έχουμε δει στη θεωρια) είναι τα $t-1, t+1$, αριστερά και δεξιά, αντίστοιχα.
Ας λύσουμε θεωρητικά τη συνέλιξη, να δούμε αν συμπίπτουν τα σχήματα. Θα έχουμε πέντε περιπτώσεις, οι οποίες φαίνονται στο σχήμα 3.

- Πρώτη περίπτωση:

$$t+1 < -5 \Leftrightarrow t < -6,\ \ y(t) = 0 \tag{6}$$



Σχήμα 2: Σήματα και Συνέλιξη Παραδειγματος 1

- Δευτερη περιπτωση:

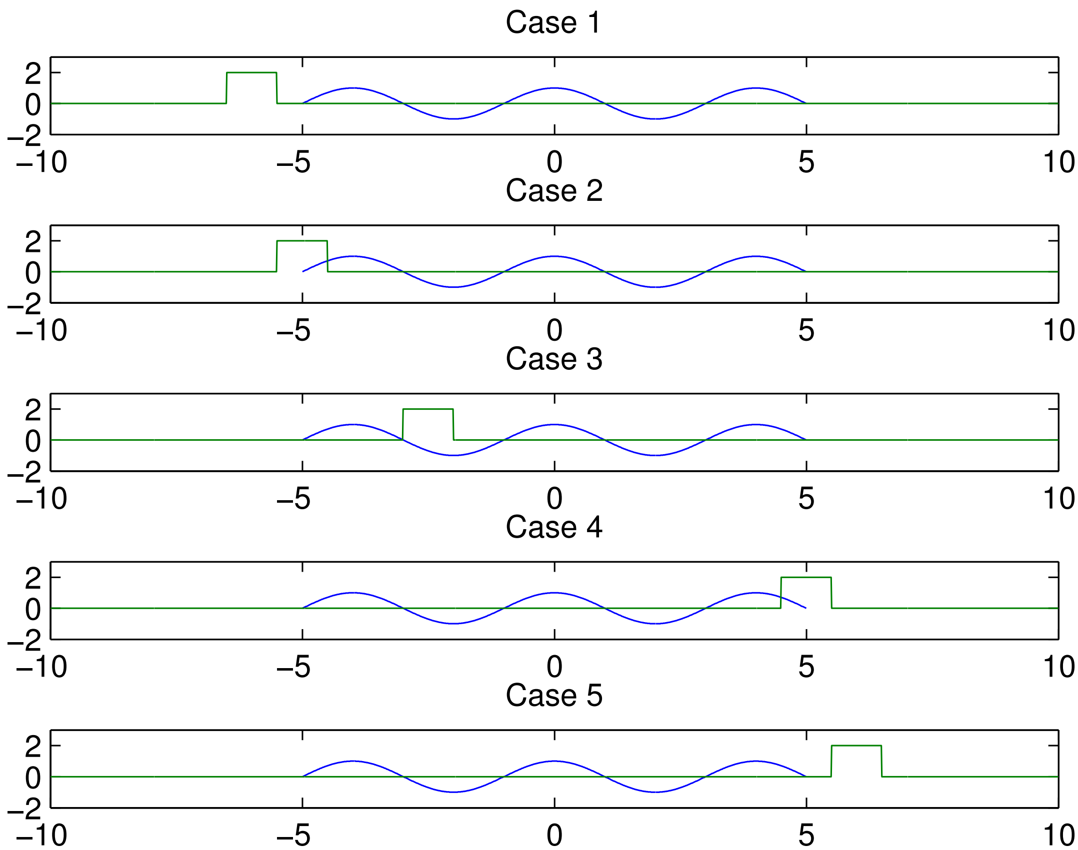
$$\begin{aligned}
-5 \le t+1 &\Leftrightarrow t \ge -6 \text{ και } t-1 \le -5 \Leftrightarrow t \le -4 \Rightarrow -6 \le t < -4, \\
y(t) &= \int_{-5}^{t+1} 2\cos(\pi\tau/2)d\tau = 2\frac{2}{\pi}\sin(\pi\tau/2)\Big|_{-5}^{t+1} \\
&= \frac{4}{\pi}(\sin(\pi(t+1)/2) - \sin(-5\pi/2)) = \frac{4}{\pi}(\sin(\pi t/2 + \pi/2) + 1) \\
&= \frac{4}{\pi}(\cos(\pi t/2) + 1) \qquad (7)
\end{aligned}$$

- Τρίτη περίπτωση:

$$\begin{aligned}
-5 \le t-1 &\Leftrightarrow t \ge -4 \text{ και } t+1 \le 5 \Leftrightarrow t \le 4 \Rightarrow -4 \le t \le 4, \\
y(t) &= \int_{t-1}^{t+1} 2\cos(\pi\tau/2)d\tau = \frac{4}{\pi}\sin(\pi\tau/2)\Big|_{t-1}^{t+1} \\
&= \frac{4}{\pi}(\sin(\pi(t+1)/2) - \sin(\pi(t-1)/2) = \frac{4}{\pi}(\cos(\pi t/2) + \cos(\pi t/2)) \\
&= \frac{8}{\pi}\cos(\pi t/2) \qquad (8)
\end{aligned}$$

- Τέταρτη περιπτωση:

$$\begin{aligned}
t+1 > 5 &\Leftrightarrow t > 4 \text{ και } t-1 \le 5 \Leftrightarrow t \le 6 \Rightarrow 4 < t \le 6 \\
y(t) &= \int_{t-1}^{5} 2\cos(\pi\tau/2)d\tau = \frac{4}{\pi}\sin(\pi\tau/2)\Big|_{t-1}^{5} \\
&= \frac{4}{\pi}(\sin(5\pi/2) - \sin(\pi(t-1)/2)) = \frac{4}{\pi}(\sin(5\pi/2) - \sin(\pi(t-1)/2)) \\
&= \frac{4}{\pi}(1 + \cos(\pi t/2)) \qquad (9)
\end{aligned}$$



Σχήμα 3: Περιπτώσεις Συνέλιξης Παραδειγματος 1

- Πέμπτη περιπτωση:

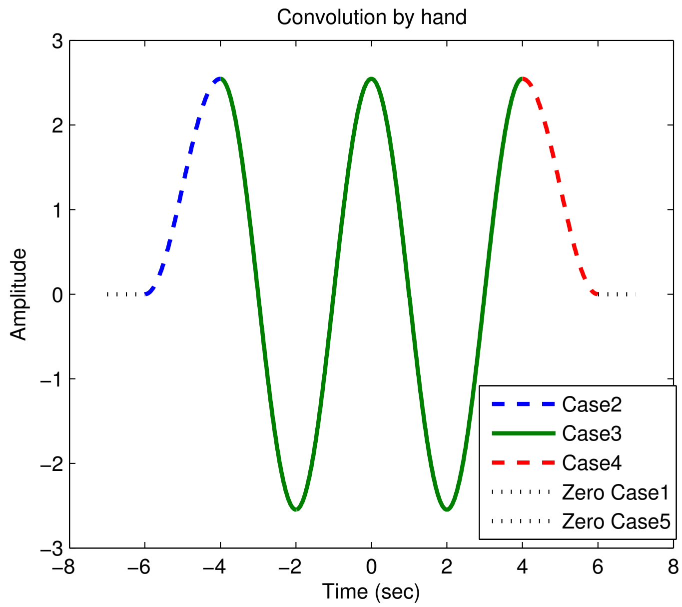
$$t - 1 > 5 \Leftrightarrow t > 6, \;\; y(t) = 0 \tag{10}$$

Άρα συνολικά:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < -6, \\ \frac{4}{\pi}(\cos(\pi t/2) + 1), & -6 \leq t < -4, \\ \frac{8}{\pi}\cos(\pi t/2), & -4 \leq t \leq 4, \\ \frac{4}{\pi}(\cos(\pi t/2) + 1), & 4 < t \leq 6 \\ 0, & t > 6 \end{cases} \tag{11}$$

Ας σχεδιάσουμε αυτό το σήμα στο MATLAB. Δείτε το σχήμα 4. Ο κώδικας που παράγει το σχήμα 4 δίνεται παρακάτω:

```
t2 = -6:ts:-4;                          % Case 2 time vector
x2 = (4/pi)*(cos(pi*t2/2) + 1);         % Case 2 signal
t3 = -4:ts:4;                           % Case 3 time vector
x3 = (8/pi)*(cos(pi*t3/2));             % Case 3 signal
t4 = 4:ts:6;                            % Case 4 time vector
x4 = (4/pi)*(cos(pi*t4/2) + 1);         % Case 4 signal
t_zero1 = -7:ts:-6;                     % Zero time vector: case 1
```



Σχήμα 4: Συνέλιξη Παραδειγματος 1 - Θεωρητικό αποτέλεσμα

```
t_zero2 = 6:ts:7;                     % Zero time vector: case 5
x_zero1 = zeros(1, length(t_zero1)); % Zero signal for case 1
x_zero2 = zeros(1, length(t_zero2)); % Zero signal for case 5
plot(t2, x2, t3, x3, t4, x4, t_zero1, x_zero1, t_zero2, x_zero2);
xlabel('Time (sec)');
ylabel('Amplitude');
title('Convolution by hand');
legend('Case2', 'Case3', 'Case4', 'Zero Case1', 'Zero Case5');
```

Παρατηρήστε οτι το θεωρητικό αποτέλεσμα του σχήματος 4 και το αποτέλεσμα της συνάρτησης conv του σχήματος 2 είναι ίδια. :-)

2. Έστω ότι έχουμε δυο σηματα συνεχούς χρόνου, τα

$$x(t) = u(t) \tag{12}$$

και

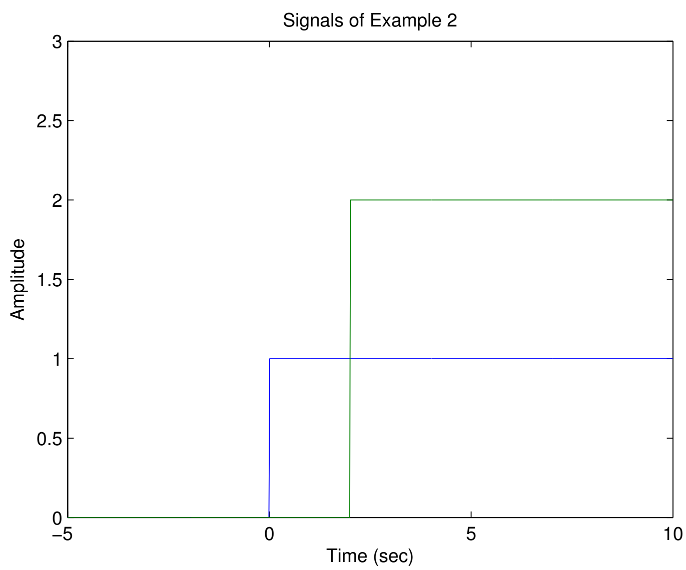
$$h(t) = 2u(t-2) \tag{13}$$

όπου $u(t)$ είναι η γνωστη σας βηματική συνάρτηση. Προφανώς, τα σήματα αυτά είναι άπειρα στο χρόνο, οπότε δε γίνεται να τα αναπαραστήσουμε με ακρίβεια στο MATLAB. Θα αναπαρασταθούν μεχρι ένα συγκεκριμένο χρονικό σημείο της επιλογής μας. Ας σχεδιάσουμε αυτά τα σηματα στο MATLAB ως εχουν:

```
ts = 0.01;
tx = -5:ts:10;                % Up to 10 seconds
x = heaviside(tx);            % x(t) = u(t)
th = -5:ts:10;                % Up to 10 seconds again
```

```
h = 2*heaviside(th - 2);         % h(t) = 2u(t-2)
plot(tx, x, th, h);              % Plot
xlabel('Time (sec)');
ylabel('Amplitude');
title('Signals of Example 2');
axis([-5 10 0 3]);               % Rescale the axis of the figure (prettier graph :-P)
```

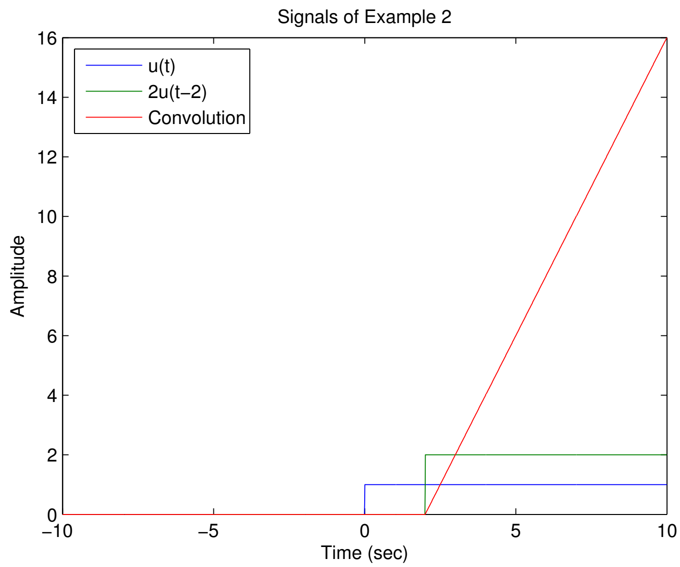
Η συνάρτηση heaviside() υλοποιεί μια βηματική συνάρτηση, ανάλογα με το ορισμα που της δίνεται. Η συνάρτηση axis προσαρμόζει τα ορια των αξόνων στο σχήμα. Στο σχήμα 5 φαίνεται το αποτέλεσμα του παραπάνω κώδικα. Τώρα, η συνέλιξη των δυο αυτών σημάτων θα δινεται ως



Σχήμα 5: Σήματα Παραδειγματος 2

```
ty = -10:ts:10;              % Time vector for y(t)
y = ts*conv(x,h);            % Convolution (size [-10,20])
y = y(1:length(ty));         % Keep only meaningful result ([-10,10])
plot(tx, x, th, h, ty, y);   % Plot
xlabel('Time (sec)');
ylabel('Amplitude');
title('Signals of Example 2');
legend('u(t)', '2u(t-2)', 'Convolution');
```

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα 6. Προσέξτε στον παραπάνω κώδικα το εξής: το διάνυσμα που αντιπροσωπεύει τον άξονα του χρόνου, ty, για τη συνέλιξη, $y(t)$, δεν υπακούει στον κανόνα που γνωριζετε και που είδαμε και στο προηγούμενο παράδειγμα. Ποιόν κανόνα; Αυτόν που λέει οτι ένα πεπερασμένης διάρκειας σημα $x(t)$, που ειναι μη μηδενικό στο $[a, b]$, οταν συνελίσσεται (κουλτούρα :-)) με ένα άλλο πεπερασμένης διάρκειας σήμα $h(t)$, που ειναι μη μηδενικό στο $[c, d]$, τότε το αποτέλεσμά τους (η συνέλιξη δηλαδη) ειναι μη μηδενικό στο $[a + c, b + d]$. Εδώ, ορίσαμε και τα δυο σήματά μας στο $[-5, 10]$, παρ′ ολο που δεν είναι πεπερασμένα θεωρητικά, οπως είπαμε. Αντί όμως να πάρουμε ως άξονα χρονου ty για τη συνέλιξη το $[-10, 20]$, πήραμε το $[-10, 10]$! Γιατί; Η απάντηση είναι ότι σε τέτοιες περιπτώσεις, όπου αναπαριστούμε άπειρα - θεωρητικά - σήματα στο MATLAB, πρεπει να



Σχήμα 6: Σήματα και Συνέλιξη Παραδειγματος 2

ελέγχουμε/γνωρίζουμε μέχρι ποιό χρονικό σημείο τα αποτελέσματά μας έχουν νόημα (συμπίπτουν δηλαδή με αυτά της θεωρίας). Εν προκειμένω, ξέρουμε ότι μετά τη χρονική στιγμή 10 sec, το σημα μας θεωρείται (από το MATLAB) ότι μηδενίζεται, πράγμα που δε συμβαίνει στη θεωρία. Οπότε ό,τι αποτέλεσμα παίρνουμε μετά από το 10ο δευτερόλεπτο, δεν έχει νόημα! Θεωρούμε ότι η γραφική παράσταση της συνέλιξης ώς το 10ο δευτερόλεπτο συνεχίζεται επ΄ άπειρον στο μοτίβο που είχε ως εκείνη τη χρονική στιγμή (στο παράδειγμά μας, η ευθεία συνεχίζει να ανεβαίνει ως το άπειρο).

Προσέξτε οτι η γραμμή

```
y = y(1:length(ty));         % Keep only meaningful result ([-10,10])
```

αποθηκεύει στο διάνυσμα y τα στοιχεια του διανύσματος y από το 1ο ως τον αριθμό που ισούται με το μήκος του άξονα ty που έχουμε επιλέξει. Η συνάρτηση length() μας επιστρέφει το μήκος ενός διανύσματος (δηλ. πόσα στοιχεία περιέχει). Επειδή η συνάρτηση conv() μας επιστρεφει την πλήρη συνέλιξη, θεωρώντας ότι τα σηματά μας μηδενίζονται μετα το 10ο δευτερόλεπτο, πρέπει εμείς να κρατήσουμε τα στοιχεία του y που έχουν νόημα. Αυτό κάνουμε στην παραπάνω γραμμή.

Ας λύσουμε τη συνέλιξη αναλυτικά, να δούμε αν συμπίπτουν τα αποτελέσματα μας. Θα ειναι

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} 2u(\tau)u(t-\tau-2)d\tau \tag{14}$$

Όμως παρατηρούμε οτι

$$u(t-\tau-2) = \begin{cases} 1, & t-\tau-2 \geq 0 \Leftrightarrow \tau \leq t-2, \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{15}$$

και

$$u(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \geq 0, \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{16}$$

Οπότε, από κοινού,

$$2u(\tau)u(t-\tau-2) = \begin{cases} 2, & 0 \leq \tau \leq t-2, \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{17}$$

Άρα το ολοκλήρωμά μας γίνεται

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} 2u(\tau)u(t-\tau-2)d\tau = \int_{0}^{t-2} 2d\tau \\ &= 2\tau\Big|_0^{t-2} = 2(t-2) = 2t-4, \ \ \text{για} \ \ t \geq 2. \end{aligned} \quad (18)$$

Προφανώς, για $t < 2$, $y(t) = 0$.
Είδατε οτι κάποιες φορές, δεν είναι απαραιτητο να διαχωρίζουμε περιπτώσεις με σχήματα για τη συνέλιξη, αν και σιωπηλά κάναμε κάτι τέτοιο με μαθηματικά. ;-) Επιβεβαιώστε εσεις (εξάσκηση!) ότι κάνοντας τη γραφική λύση της συνέλιξης που έχετε δει στο μάθημα και στο φροντιστήριο, παιρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα.

Μπορειτε να δείτε , τέλος, οτι το αποτέλεσμά μας ειναι το ίδιο με αυτό που μας έδωσε η conv() (η $2t - 4$ περνάει από τα σημεία $(2, 0), (10, 16)$ που περνά και η ευθεία του σχήματος 6).

3 Κλεινοντας

Προφανώς η παραπάνω διαδικασία *σχεδιασης σημάτων* μπορει εύκολα να επεκταθεί για σήματα διακριτού χρόνου. Σε αυτην την περιπτωση, ο άξονας του χρόνου περιλαμβάνει μόνο ακέραιες τιμές, ενώ η συνάρτηση conv() χρησιμοποιείται χωρίς κλιμάκωση με t_s (άλλωστε το t_s στα διακριτού χρόνου σήματα είναι πάντα μονάδα). Για παράδειγμα, ο παρακάτω κώδικας σχεδιάζει το συνημίτονο του παραδειγματος 1:

```
nx = -5:5;                       % Discrete time vector for x[n] (step = 1 sample)
x = cos(pi * nx/ 2);             % x[n]
stem(nx, x);                     % Plot the result (stem is for discrete time signals)
xlabel('Time (samples)');        % Make plot pretty :-)
ylabel('Amplitude');             % Make plot pretty :-)
title('Signal of Example 1');    % Make plot pretty :-)
legend('Discrete Cosine');       % Make plot pretty :-)
```

Τρέξτε το, δείτε το αποτέλεσμα, σχεδιάστε το στο χαρτί, και επιβεβαιώστε οτι είναι σωστο! ;-)