ΗΥ215 Φροντιστήριο

Τυχαία σήματα – Μ. Laplace – Γραμμ. συστήματα

1η Άσκηση:

Αποδείξτε τις δυο ακόλουθες ιδιότητες της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης:

α) Αν $X(t)$ έχει DC συνιστώσα ίση με A, τότε η $R_X(\tau)$ θα έχει μια σταθερή συνιστώσα ίση με A^2.

β) Αν $X(t)$ έχει μια ημιτονοειδή συνιστώσα, τότε η $R_X(\tau)$ θα έχει επίσης μια ημιτονοειδή συνιστώσα της ίδιας συχνότητας.

Λύση: α) Έστω $X(t) = A + Y(t)$, όπου A σταθερά και $Y(t)$ μια τυχαία διαδικασία με μέση τιμή 0. Είναι:

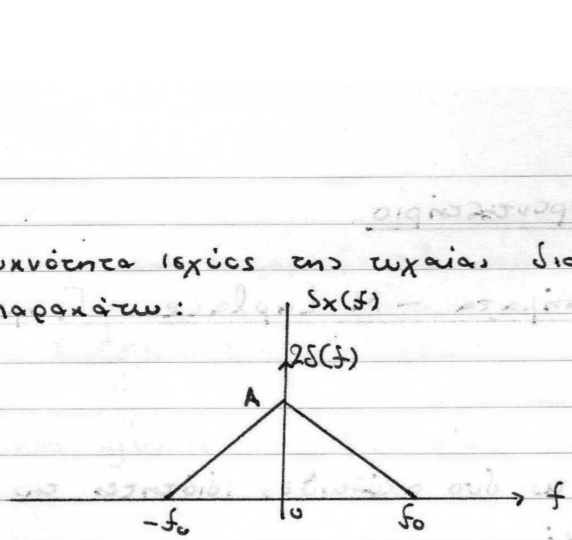
$$
\begin{aligned}
R_X(\tau) &= E[X(t+\tau)X(t)] = E[(A+Y(t+\tau))(A+Y(t))] = \\
&= E[A^2 + AY(t) + AY(t+\tau) + Y(t+\tau)Y(t)] = \\
&= A^2 + AE[Y(t)] + AE[Y(t+\tau)] + E[Y(t+\tau)Y(t)] = \\
&= A^2 + R_Y(\tau).
\end{aligned}
$$

β) Έστω $X(t) = A\cos(2\pi f t + \vartheta) + Z(t)$, με $A\cos(2\pi f t + \vartheta)$ η ημιτονοειδής συνιστώσα της $X(t)$ και ϑ μια τυχαία φάση.

Είναι:
$$
\begin{aligned}
R_X(\tau) &= E[X(t+\tau)X(t)] = E[A^2\cos(2\pi f t + 2\pi f\tau + \vartheta)\cos(2\pi f t+\vartheta)] \\
&\quad + E[Z(t+\tau)A\cos(2\pi f t+\vartheta)] + E[A\cos(2\pi f t + 2\pi f \tau + \vartheta)Z(t)] \\
&\quad + E[Z(t+\tau)Z(t)] = \\
&= \frac{A^2}{2}\cos 2\pi f\tau + R_Z(\tau) + E[\ldots] + E[\ldots].
\end{aligned}
$$

2^{η} Άσκηση:

Η φασματική πυκνότητα ισχύος της τυχαίας διαδικασίας $X(t)$ φαίνεται παρακάτω:



α) Βρείτε και σχεδιάστε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_X(\tau)$ της $X(t)$.

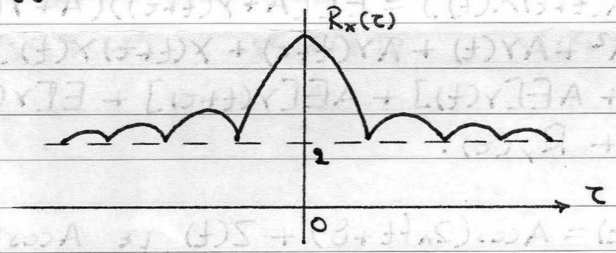
β) Βρείτε την ισχύ του σήματος.

γ) Πόσο πρέπει να είναι το A ώστε η ισχύς να είναι $P_X = 1$;

Λύση: α) Είναι $R_X(\tau) = F^{-1}\{S_X(f)\} = F^{-1}\{A\,tri\left(\frac{f}{f_0}\right) + 2\delta(f)\} =$

$= F^{-1}\{A\,tri\left(\frac{f}{f_0}\right)\} + 2F^{-1}\{\delta(f)\} = Af_0\,\mathrm{sinc}^2(f_0\tau) + 1\cdot 2.$

Είναι:

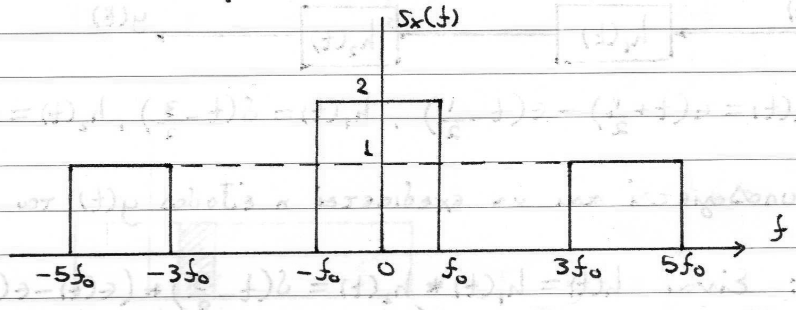


β) Η ισχύς του σήματος είναι $P_X = R_X(0) = Af_0 + 2$.

γ) Θέλουμε $P_X = 1 \Leftrightarrow Af_0 + 2 = 1 \Leftrightarrow Af_0 = -1 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{f_0}$.

3η Άσκηση:

Έστω μια στάσιμη με την ευρεία έννοια τυχαία διαδικασία $X(t)$ με $S_x(f)$, όπως φαίνεται παρακάτω:



Να βρεθεί η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_x(\tau)$ της $X(t)$.

Λύση: Είναι $S_x(f) = rect\left(\frac{f-4f_0}{2f_0}\right) + rect\left(\frac{f+4f_0}{2f_0}\right) + 2rect\left(\frac{f}{2f_0}\right)$

$$\xrightarrow{F^{-1}} R_x(\tau) = 2f_0\, sinc(2f_0\tau)\, e^{-j2\pi 4f_0\tau} + 2f_0\, sinc(2f_0\tau)\, e^{j2\pi 4f_0\tau} +$$

$$+ 2\cdot 2f_0\, sinc(2f_0\tau) =$$
$$= 2f_0\, sinc(2f_0\tau)\left(e^{-j2\pi 4f_0\tau} + e^{j2\pi 4f_0\tau}\right) + 4f_0\, sinc(2f_0\tau) =$$
$$= 2f_0\, sinc(2f_0\tau)\, 2\cos(2\pi 4f_0\tau) + 4f_0\, sinc(2f_0\tau) =$$
$$= 4f_0\, sinc(2f_0\tau)\left(\cos(2\pi 4f_0\tau) + 1\right) =$$
$$= 4f_0\, sinc(2f_0\tau)\cdot 2\cos^2(4\pi f_0\tau) =$$
$$= 8f_0\, sinc(2f_0\tau)\cos^2(4\pi f_0\tau)$$

Αλλιώς: $S_x(f) = rect\left(\frac{f}{10f_0}\right) - rect\left(\frac{f}{6f_0}\right) + 2rect\left(\frac{f}{2f_0}\right) \xrightarrow{F^{-1}}$

$$\xrightarrow{F^{-1}} R_x(\tau) = 10f_0\, sinc(10f_0\tau) - 6f_0\, sinc(6f_0\tau) + 2\cdot 2f_0\, sinc(2f_0\tau) =$$
$$= 10f_0\, sinc(10f_0\tau) - 6f_0\, sinc(6f_0\tau) + 4f_0\, sinc(2f_0\tau).$$

4η άσκηση:

Θεωρούμε το σύστημα που φαίνεται παρακάτω:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h_1(t)} \longrightarrow \boxed{h_2(t)} \longrightarrow y(t)$$

με $x(t) = \epsilon(t+\frac{1}{2}) - \epsilon(t-\frac{1}{2})$, $h_1(t) = \delta(t-\frac{3}{2})$, $h_2(t) = \epsilon(t) - \epsilon(t-3)$.

Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί η έξοδος $y(t)$ του συστήματος.

Λύση: Είναι $h(t) = h_1(t) * h_2(t) = \delta(t-\frac{3}{2}) * (\epsilon(t) - \epsilon(t-3)) =$

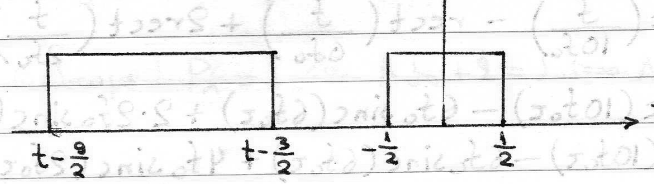
$= \epsilon(t-\frac{3}{2}) - \epsilon(t-3-\frac{3}{2}) = \epsilon(t-\frac{3}{2}) - \epsilon(t-\frac{9}{2})$.

Άρα είναι σαν να περνάμε την είσοδο $x(t)$ από το σύστημα $h(t)$. Παρατηρούμε ότι:

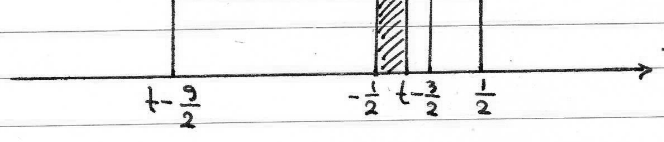
$x(t) = \epsilon(t+\frac{1}{2}) - \epsilon(t-\frac{1}{2}) = rect(\frac{t}{1})$ και

$h(t) = \epsilon(t-\frac{3}{2}) - \epsilon(t-\frac{9}{2}) = rect(\frac{t-3}{3})$.

Άρα $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$

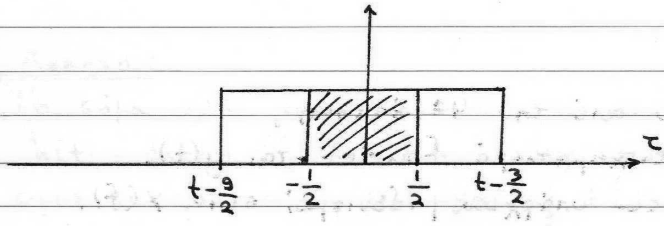
- 

Για $t \leq 1$, $y(t) = 0$.

- 

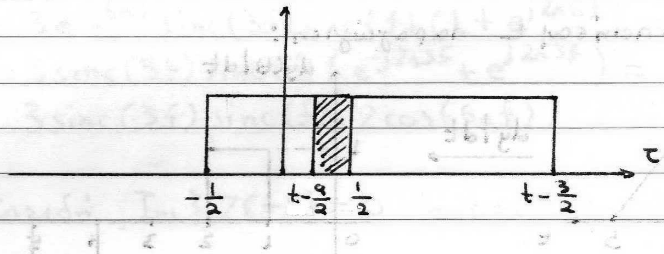
Για $1 < t \leq 2$, είναι: $y(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{t-\frac{3}{2}} d\tau =$

$= \tau \Big|_{-\frac{1}{2}}^{t-\frac{3}{2}} = t-1$.

- 

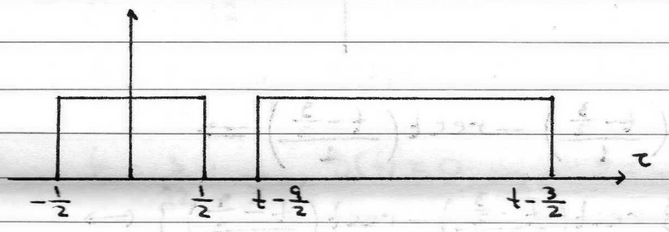
Για $2<t\leq 4$, είναι:

$$y(t)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\tau = \tau\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1.$$

- 

Για $4<t\leq 5$, είναι:

$$y(t)=\int_{t-\frac{9}{2}}^{\frac{1}{2}} d\tau = \tau\Big|_{t-\frac{9}{2}}^{\frac{1}{2}} = 5-t.$$

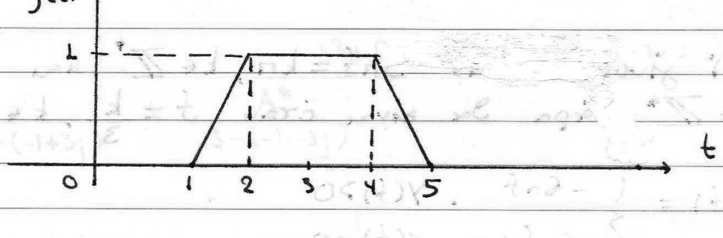
- 

Για $t>5$, είναι:

$$y(t)=0.$$

Άρα θα είναι:

$$y(t)=\begin{cases} 0 & , t<1,\ t\geq 5 \\ t-1 & , 1\leq t<2 \\ 1 & , 2\leq t<4 \\ 5-t & , 4\leq t<5 \end{cases}$$



Παρατήρηση: Μπορούμε να περάσουμε την είσοδο από το $h_1(t)$, να βρούμε την έξοδο $y_1(t)$, κι έπειτα να περάσουμε την $y_1(t)$ από το $h_2(t)$ και να πάρουμε την $y(t)$.

5η Άσκηση:

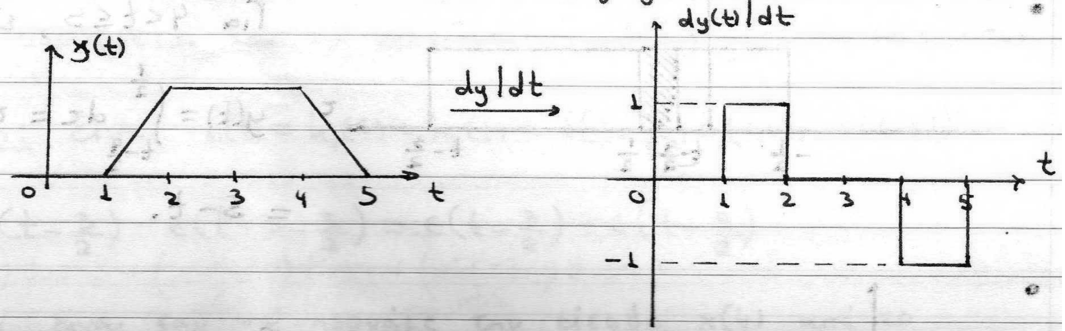
Δεδομένου του $y(t)$ από την 4η άσκηση,

α) Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier του $y(t)$.

β) Σε ποιές συχνότητες υπάρχουν μηδενισμοί στην $Y(f)$.

γ) Υπολογίστε το φάσμα φάσης για -1 Hz έως 1 Hz.

Λύση: α) Θα χρησιμοποιήσουμε παραγώγιση:



Είναι $\dfrac{dy(t)}{dt} = \text{rect}\left(\dfrac{t-\frac{3}{2}}{1}\right) - \text{rect}\left(\dfrac{t-\frac{9}{2}}{1}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow F\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = F\left\{\text{rect}\left(\frac{t-\frac{3}{2}}{1}\right) - \text{rect}\left(\frac{t-\frac{9}{2}}{1}\right)\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow j2\pi f\, Y(f) = \text{sinc}(f)\left(e^{-j3\pi f} - e^{-j9\pi f}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow j2\pi f\, Y(f) = \text{sinc}(f)\, e^{-j6\pi f}\, 2j \sin(3\pi f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(f) = 3e^{-j6\pi f}\, \text{sinc}(3f)\, \text{sinc}(f).$$

β) Οι μηδενισμοί γίνονται όταν $3\pi f = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}^*$ και $\pi f = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}^*$, άρα θα είναι όταν $f = \dfrac{k}{3},\ k \in \mathbb{Z}^*$.

γ) Είναι: $\theta(f) = \begin{cases} -6\pi f & ,\ Y(f) > 0 \\ -6\pi f + \pi & ,\ Y(f) < 0 \end{cases}$

$f = -\frac{1}{3} : \frac{1}{3} \longrightarrow \theta(f) = -6\pi f$, $f = -\frac{1}{3} : -\frac{2}{3}$, $\theta(f) = -6\pi f - \pi$

$f = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} \longrightarrow \theta(f) = -6\pi f + \pi$ $\quad f = -\frac{2}{3} : -1$, $\theta(f) = -6\pi f$.

$f = \frac{2}{3} : 1 \longrightarrow \theta(f) = -6\pi f$

6η Άσκηση:

Το σήμα $y(t)$ του πρώτου θέματος είναι είσοδος στο σύστημα με $h(t) = \delta(t) + \delta(t+6)$. Να υπολογιστεί ο Μ.F. της εξόδου και οι τιμές του φάσματος φάσης για $-\frac{1}{3} \le f \le \frac{1}{3}$.

Λύση: Είναι $Z(f) = Y(f)H(f) = 3e^{-j6\pi f}\,\mathrm{sinc}(3f)\,\mathrm{sinc}(f)\,H(f) =$

$$= 3e^{-j6\pi f}\,\mathrm{sinc}(3f)\,\mathrm{sinc}(f)\,(1 + e^{j2\pi 6f}) =$$

$$= 3\,\mathrm{sinc}(3f)\,\mathrm{sinc}(f)\,(e^{-j2\pi 3f} + e^{j2\pi 3f}) =$$

$$= 3\,\mathrm{sinc}(3f)\,\mathrm{sinc}(f)\cdot 2\cos(6\pi f).$$

Επειδή $\mathrm{Im}\{Z(f)\} = 0$, η φάση θα είναι 0 ή $\pm\pi$.

Για $f = 0 : \frac{1}{12}$, $\theta(f) = 0$, $f = -\frac{1}{12} : 0$, $\theta(f) = 0$.

$f = \frac{1}{12} : \frac{3}{12}$, $\theta(f) = \pi$, $f = -\frac{3}{12} : -\frac{1}{12}$, $\theta(f) = -\pi$.

$f = \frac{3}{12} : \frac{1}{3}$, $\theta(f) = 0$, $f = -\frac{3}{12} : -\frac{1}{3}$, $\theta(f) = 0$.

7η Άσκηση:

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της

$$X(s) = \frac{3s+2}{s^2+2s+10}$$

Λύση: Είναι $X(s) = \frac{3s+2}{s^2+2s+10} = \frac{3s+2}{(s-(-1+3j))(s-(-1-3j))} =$

$$= \frac{A}{s-(-1+3j)} + \frac{A^*}{s-(-1-3j)}.$$

Είναι $A = X(s)(s-(-1+3j))\Big|_{s=-1+3j} = \frac{3s+2}{s-(-1-3j)}\Big|_{s=-1+3j} = \frac{3}{2} + \frac{1}{6}j$

Άρα $A^* = \frac{3}{2} - \frac{1}{6}j$. Οπότε $X(s) = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{6}j\right)\frac{1}{s-(-1+3j)} + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}j\right)\frac{1}{s-(-1-3j)}$

και ανάλογα με το ROC, έχουμε το αντίστοιχο $x(t)$.

Κάντε το μόνοι σας! :)

8η Άσκηση:

Υπολογίστε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 7\frac{dy(t)}{dt} + 12y(t) = x(t)$$

με αρχικές συνθήκες $y(0)=0$, $\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = -2$ και $x(t) = \epsilon(t)$.

Λύση: Παίρνουμε το M.L. και των δυο πλευρών:

$$L\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} + 7L\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + 12L\{y(t)\} = L\{x(t)\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0) + 7sY(s) - 7y(0^-) + 12Y(s) = X(s) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow s^2Y(s) - (-2) + 7sY(s) + 12Y(s) = X(s) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow Y(s)\left(s^2+7s+12\right) = X(s) - 2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow Y(s) = \frac{X(s)}{s^2+7s+12} - \frac{2}{s^2+7s+12} = \frac{1-2s}{s(s^2+7s+12)} =$$

$$= \frac{1-2s}{s(s+4)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{s+3}.$$

$A = Y(s)s\Big|_{s=0} = \frac{1}{12}$, $B = Y(s)(s+4)\Big|_{s=-4} = -9$,

$C = Y(s)(s+3)\Big|_{s=-3} = 7$.

Άρα $Y(s) = \frac{1}{12}\frac{1}{s} - 9\frac{1}{s+4} + 7\frac{1}{s+3} \xrightarrow{L^{-1}}$

$$\xrightarrow{L^{-1}} y(t) = \frac{1}{12}\epsilon(t) - 9e^{-4t}\epsilon(t) + 7e^{-3t}\epsilon(t) =$$

$$= \left(\frac{1}{12} - 9e^{-4t} + 7e^{-3t}\right)\epsilon(t).$$

Παρατήρηση: Χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα:

$$L\left\{\frac{d^{(n)}x(t)}{dt^n}\right\} = s^nX(s) - s^{n-1}x(0^-) - \ldots - x^{(n-1)}(0^-).$$