ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΗΥ215 – ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ 3

ΤΜΗΜΑ

Α.Μ. Εξάμηνο Περίοδος

Εξεταζόμενο Μάθημα

Ημερομηνία

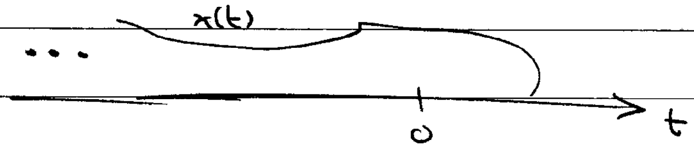
Ονοματεπώνυμο · Μετασχηματισμός Laplace

Θεωρία

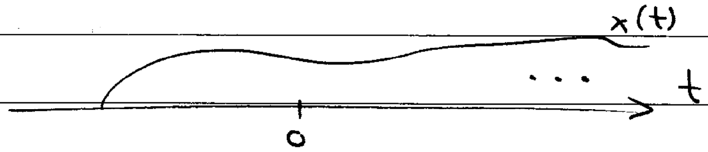
Δίπλευρος Μ.L : $X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} \, dt$

Μονόπλευρος Μ.L : $X(s) = \int_{0}^{+\infty} x(t) e^{-st} \, dt$

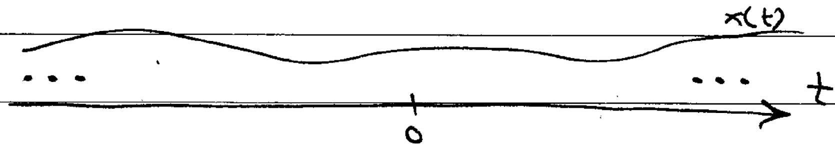
Τύποι σημάτων: αριστερόπλευρο (αρχίζει κάπου, τελειώνει $-\infty$)



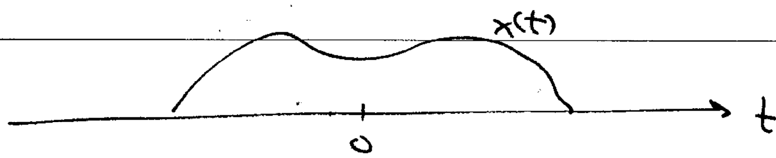
δεξιόπλευρο (αρχίζει κάπου, τελειώνει $+\infty$)



αμφίπλευρο (δίπλευρο) (αρχίζει $-\infty$, τελειώνει $+\infty$)



πεπερασμένο (αρχίζει κάπου, τελειώνει κάπου)



Range of Convergence (ROC): Παρατηρήσεις

- Το ROC είναι πάντα μια περιοχή του s-επιπέδου αριστερά ή δεξιά μιας κατακόρυφης γραμμής, ή μια "λωρίδα" μεταξύ δυο κατακόρυφων γραμμών.

- Το ROC δεν περιέχει ποτέ πόλους!

- Αν το $x(t)$ είναι δεξιόπλευρο, το ROC είναι δεξιόπλευρο, π.χ. $Re\{s\} > a$, με $a = Re\{$δεξιότερος πόλος$\}$.

- Αν $x(t)$ είναι αριστερόπλευρο, το ROC είναι αριστερόπλευρο, π.χ. $Re\{s\} < a$, με $a = Re\{$αριστερότερος πόλος$\}$.

- Αν $x(t)$ είναι δίπλευρο ή άθροισμα δεξιόπλευρων και αριστερόπλευρων σημάτων, το ROC είναι είτε μια "λωρίδα" ($a < Re\{s\} < b$), ή τα επιμέρους ROCs δε θα επικαλύπτονται, άρα ROC $= \emptyset$, το κενό σύνολο.

- Αν $x(t)$ είναι πεπερασμένο, το ROC είναι όλο το s-επίπεδο.

Ζεύγη Μ. Laplace:
1) $\delta(t) \xleftrightarrow{L} 1$, all s.
2) $u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s}$, $Re\{s\} > 0$
3) $e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+a}$, $Re\{s\} > -a$
4) $-e^{-at}u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+a}$, $Re\{s\} < -a$
5) $t^n u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{n!}{s^{n+1}}$, $Re\{s\} > 0$
6) $\sin\omega_0 t \cdot u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$, $Re\{s\} > 0$.
7) $\cos\omega_0 t \cdot u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$, $Re\{s\} > 0$.

Ιδιότητες Δίπλευρου Μ. Laplace:

Ιδιότητα	$x(t)$	$X(s)$	Νέο ROC
Γραμμικότητα	$ax_1(t)+bx_2(t)$	$aX_1(s)+bX_2(s)$	$ROC \supseteq ROC_{(x_1)} \cap ROC_{(x_2)}$
Χρονική μετατόπ.	$x(t-t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	$ROC(x)$
Εκθετικός πολλ/μός	$e^{-at}x(t)$	$X(s+a)$	Μετατοπίζω το ROC κατά 'α' αριστερά
Επί t	$tx(t)$	$-\frac{dX(s)}{ds}$	$ROC(x)$
Χρονική διαβάθμιση	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X(s/a)$	Διαβαθμισμένο ROC ($s \in ROC$ ανν $s/a \in ROC_{old}$)
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	$ROC \supseteq ROC(x) \cap Re\{s\}>0$
Διαφόριση	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	$ROC \supseteq ROC(x)$

Μονόπλευρος Μ. Laplace (διαφορές)

Ολοκλήρωση	$\int_{0}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$
Διαφόριση	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)-x(0)$

Παράδειγμα: Έστω $X(s) = \dfrac{3s+5}{s^2+3s+2}$, ROC: $-2 < Re\{s\} < -1$.
Βρείτε το $x(t)$.

Λύση: Χρησιμοποιούμε Partial Fraction Expansion.

Παρένθεση: PFE $\longrightarrow$ Αν $X(s) = \dfrac{k_1}{s-p_1} + \dfrac{k_2}{s-p_2} + \dots$

$$\text{τότε } k_i = X(s)(s-p_i)\Big|_{s=p_i}.$$

Άρα είναι $X(s) = \dfrac{3s+5}{s^2+3s+2} = \dfrac{k_1}{s-p_1} + \dfrac{k_2}{s-p_2}$ (1)

Είναι $p_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-4\cdot 1\cdot 2}}{2} = \dfrac{-3\pm 1}{2}$ $\rightarrow p_1 = -1$, $\rightarrow p_2 = -2$ (2)

(1) $\xrightarrow{(2)}$ $X(s) = \dfrac{k_1}{s+1} + \dfrac{k_2}{s+2}$. Βρίσκουμε τα k_1, k_2:

$$k_1 = X(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{3s+5}{(s+2)(s+1)}(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{3s+5}{s+2}\Big|_{s=-1} =$$

$$= \frac{-3+5}{-1+2} = 2 \implies \boxed{k_1 = 2}$$

$$k_2 = X(s)(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{3s+5}{s+1}\Big|_{s=-2} = \frac{-6+5}{-2+1} = \frac{-1}{-1} = 1 \implies$$

$$\implies \boxed{k_2 = 1}.$$

Άρα τελικά $X(s) = \dfrac{1}{s+2} + \dfrac{2}{s+1}$. Με χρήση ιδιοτήτων, έχουμε ότι $\frac{1}{s+2} \xrightarrow{L^{-1}} e^{-2t}u(t)$, (ROC: $Re\{s\} > -2$)

$\frac{2}{s+1} \xrightarrow{L^{-1}} -2e^{-t}u(-t)$ (ROC: $Re\{s\} < -1$)

Άρα $x(t) = e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(-t)$.

<u>Παράδειγμα:</u> Υπολογίστε το δίπλευρο μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = e^{at}\epsilon(t) + e^{2at}\epsilon(-t), \quad a>0.$$

Υπάρχει γι' αυτό το σήμα ο μετασχ. Fourier; Αν ναι, βρείτε το M.F. του σήματος. Αν όχι, εξηγείστε.

<u>Λύση:</u> Είναι $X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{at-st}dt + \int_{-\infty}^{0} e^{2at}e^{-st}dt =$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{t(a-s)}dt + \int_{-\infty}^{0} e^{t(2a-s)}dt = \frac{1}{a-s}e^{t(a-s)}\Big|_{0}^{+\infty} + \frac{1}{2a-s}e^{t(2a-s)}\Big|_{-\infty}^{0} =$$

$$= \frac{1}{a-s}\cdot 0 - \frac{1}{a-s} + \frac{1}{2a-s} - \frac{1}{2a-s}\cdot 0 =$$

$$= -\frac{1}{a-s} + \frac{1}{2a-s} = \frac{a-s-(2a-s)}{(2a-s)(a-s)} = \frac{a-s-2a+s}{(2a-s)(a-s)} =$$

$$= \frac{-a}{(2a-s)(a-s)} = \frac{-a}{(s-2a)(s-a)}, \text{ αν } a-Re\{s\}<0 \text{ κ' } 2a-Re\{s\}>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Re\{s\}>a \text{ κ' } Re\{s\}<2a \Rightarrow Re\{s\}>a \text{ κ' } Re\{s\}<2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a < Re\{s\} < 2a.$$

Ο μετασχηματισμός Fourier δεν υπάρχει γιατί το ROC δεν περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα

Παράδειγμα: Να υπολογίσετε τον αντίστροφο δίπλευρο μετασχηματισμό Laplace του σήματος

$$X(s) = \frac{-3}{(s+2)(s-1)}$$

όταν:

(α') ROC: $-2 < Re\{s\} < 1$

(β') ROC: $Re\{s\} > 1$

(γ') ROC: $Re\{s\} < -2$

Σε κάθε περίπτωση, σχεδιάστε περιοχή σύγκλισης και το σήμα στο χρόνο που υπολογίζεται κάθε φορά.

Λύση:

(α') Είναι $X(s) = \frac{-3}{(s+2)(s-1)} = \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2}{s-1}$,

με $k_1 = X(s)(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{-3}{(s+2)(s-1)}(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{-3}{s-1}\Big|_{s=-2} =$

$= \frac{-3}{-3} = 1 \Rightarrow \boxed{k_1 = 1}$ και $k_2 = X(s)(s-1)\Big|_{s=1} =$

$= \frac{-3}{s+2}\Big|_{s=1} = \frac{-3}{1+2} = -1 \Rightarrow \boxed{k_2 = -1}$. Άρα $X(s) =$

$= \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-1} \xrightarrow[-2<Re\{s\}<1]{L^{-1}} e^{-2t}\epsilon(t) - \left(-e^{t}\epsilon(-t)\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = e^{-2t}\epsilon(t) + e^{t}\epsilon(-t).$

(β') Όμοια, $x(t) = e^{-2t}\epsilon(t) - e^{t}\epsilon(t)$.

(γ') —"— , $x(t) = e^{t}\epsilon(-t) - e^{-2t}\epsilon(-t)$.

<u>Παράδειγμα:</u> Δείξτε ότι ο μονόπλευρος Μ. Laplace του σήματος

$$x(t) = te^{-at}\epsilon(t), \quad \alpha > 0$$

είναι $L\{x(t)\} = \dfrac{1}{(s+a)^2}$, $Re\{s\} > a$.

<u>Λύση:</u> Είναι $X(s) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty} te^{-at}e^{-st}\,dt =$

$$= \int_0^{+\infty} te^{-(a+s)t}\,dt = \frac{e^{-(a+s)t}}{(a+s)^2}\left(-(a+s)t - 1\right)\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(te^{-(a+s)t}\cdot\frac{-1}{a+s} - \frac{e^{-(a+s)t}}{(a+s)^2}\right) + \frac{1}{(a+s)^2} =$$

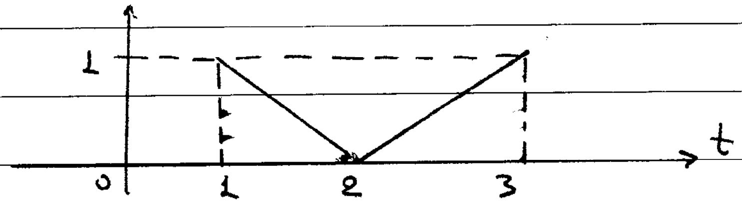
$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{-te^{-(a+s)t}}{a+s} - \lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-(a+s)t}}{(a+s)^2} + \frac{1}{(a+s)^2} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{-t}{e^{(a+s)t}}\,\frac{1}{a+s} - 0 + \frac{1}{(a+s)^2} =$$

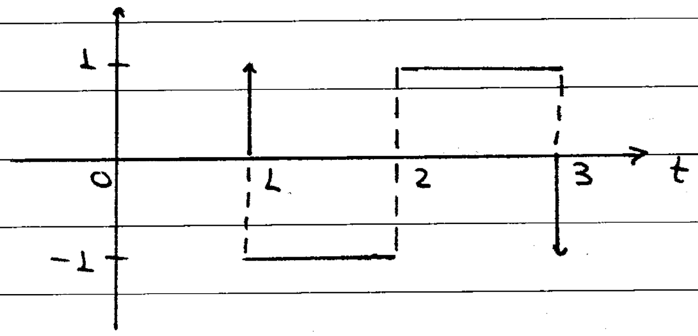
$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{-1}{e^{(a+s)t}}\,\frac{1}{(a+s)^2} + \frac{1}{(a+s)^2} =$$

$$= 0 + \frac{1}{(a+s)^2} = \frac{1}{(a+s)^2},$$ αν $Re\{s\} + a > 0 \Longrightarrow Re\{s\} > -a$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί ο μονόπλευρος μετασχ. Laplace του σήματος που φαίνεται στο σχήμα:



Λύση: Παραγωγίζοντας έχουμε:



Είναι $sX(s) - \cancel{x(0^-)}^{\,0} = e^{-s} - \frac{1}{s}(1-e^{-s})e^{-s} + \frac{1}{s}(1-e^{-s})e^{-2s} - e^{-3s} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow sX(s) = e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s}e^{-2s} + \frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s}e^{-3s} - e^{-3s} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow sX(s) = e^{-s}\left(1-\frac{1}{s}\right) + e^{-2s}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s}\right) - e^{-3s}\left(\frac{1}{s}+1\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow sX(s) = e^{-s}\,\frac{s-1}{s} + e^{-2s}\cdot\frac{2}{s} - e^{-3s}\,\frac{s+1}{s} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X(s) = \frac{e^{-s}(s-1)}{s^2} + \frac{2e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}(s+1)}{s^2}.$$

Το σήμα είναι πεπερασμένο, άρα ROC είναι όλο το s-plane.

Στο ίδιο καταλήγουμε αν $X(s) = \int_1^2 (2-t)e^{-st}dt + \int_2^3 (t-2)e^{-st}dt =$

$= \ldots$, αλλά με πολύ περισσότερες πράξεις!

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ

Α.Μ. Εξάμηνο Περίοδος

Εξεταζόμενο Μάθημα

Ημερομηνία

Ονοματεπώνυμο · Μετασχηματισμοί Laplace + τυχαία σήματα

Παράδειγμα: Δείξτε ότι ο μονόπλευρος Μ. Laplace του

$$x(t) = t\epsilon(t)$$

είναι $\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{1}{s^2}$, $Re\{s\} > 0$.

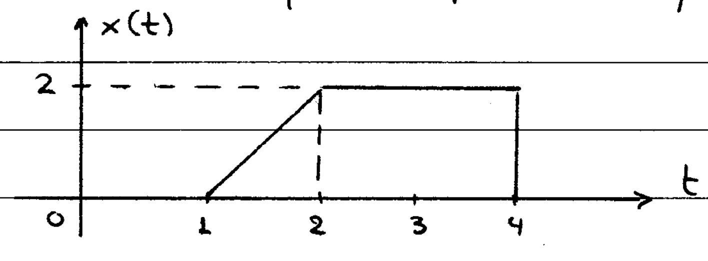
Λύση: Είναι $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\epsilon(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} te^{-st}dt =$

$$= \frac{e^{-st}}{s^2}(-st-1)\Big|_0^{+\infty} = \left(-\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right)\Big|_0^{+\infty} = -\frac{te^{-st}}{s}\Big|_0^{+\infty} - \frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_0^{+\infty} =$$

$= -\lim_{t\to\infty} \frac{te^{-st}}{s} + \frac{1}{s^2}$ (1). Είναι $\lim_{t\to\infty} te^{-st} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{st}} \overset{DLH}{=}$

$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{se^{st}} = 0$ (2). Η (1) $\xRightarrow{(2)}$ $X(s) = \frac{1}{s^2}$, $Re\{s\} > 0$.

Παράδειγμα: Δείξτε ότι ο μονόπλευρος Μ. Laplace που δίδεται στο σχήμα:



είναι ο $X(s) = \frac{2}{s^2}\left(e^{-s} - e^{-2s}\right) - \frac{2}{s}e^{-4s}$.

Λύση: (1ος τρόπος, κλασικός) $X(s) = \int_1^2 (2t-2)e^{-st}dt + \int_2^4 2e^{-st}dt =$

$$= \int_1^2 2te^{-st}\,dt - \int_1^2 2e^{-st}\,dt + \int_2^4 2e^{-st}\,dt =$$

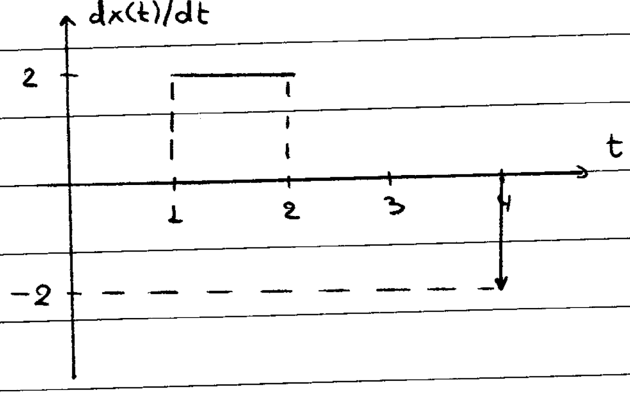
$$= 2\,\frac{e^{-st}}{s^2}(-st-1)\Big|_1^2 + 2\,\frac{e^{-st}}{s}\Big|_1^2 - 2\,\frac{e^{-st}}{s}\Big|_2^4 =$$

$$= 2\,\frac{e^{-2s}}{s^2}(-2s-1) - 2\,\frac{e^{-s}}{s^2}(-s-1) + 2\,\frac{e^{-2s}}{s} - 2\,\frac{e^{-s}}{s} - 2\,\frac{e^{-4s}}{s} + 2\,\frac{e^{-2s}}{s} =$$

$$= -2\,\frac{e^{-2s}}{s^2} + 2\,\frac{e^{-s}}{s^2} - 2\,\frac{e^{-4s}}{s} = \frac{2}{s^2}\left(e^{-s}-e^{-2s}\right) - \frac{2}{s}e^{-4s}.$$

Το ROC είναι όλο το s-plane, αφού το $x(t)$ είναι πεπερασμένο.

(2ος τρόπος – παραγώγιση)



Είναι $\frac{dx(t)}{dt} = 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{3}{2}}{1}\right) - 2\delta(t-4) \Rightarrow L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} =$

$$= \frac{2}{s}e^{-\frac{3}{2}s}\left(e^{s\frac{1}{2}}-e^{-s\frac{1}{2}}\right) - 2e^{-4s} =$$

$$= \frac{2}{s}e^{-s} - \frac{2}{s}e^{-2s} - 2e^{-4s} =$$

$= \frac{2}{s}e^{-s} - \frac{2}{s}e^{-2s} - 2e^{-4s}$. Ισχύει ότι $L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0^-)$

Άρα $\frac{2}{s}\left(e^{-s}-e^{-2s}\right) - 2e^{-4s} = sX(s) - \cancel{x(0^-)}^{0} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{2}{s^2}\left(e^{-s}-e^{-2s}\right) - \frac{2}{s}e^{-4s}.$$

Παράδειγμα: Έστω το σήμα $x(t) = \begin{cases} A, & 0 \le t \le T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$.

α) Να υπολογίσετε το Μ.F. του

β) Να υπολογίσετε το M.L. του.

Λύση: α) Είναι $X(f) = AT\,\mathrm{sinc}(fT)\, e^{-j\pi f T}$.

β) Είναι $X(s) = \int_0^T A e^{-st}\,dt = A \left.\dfrac{e^{-st}}{-s}\right|_0^T = \dfrac{A}{-s}\left(e^{-sT} - 1\right) = \dfrac{A}{s}\left(1 - e^{-sT}\right)$, με ROC όλο το s-plane.

Παράδειγμα: Ο δίπλευρος μ.L. δίδεται από τον $X(s) = \dfrac{s+2}{s^2 - 2s - 3}$.

α) Για κάθε ROC που μπορεί να προκύψει, να βρείτε σε ποιο σήμα αντιστοιχεί.

β) Σε ποιά περίπτωση υπάρχει ο M.F; Υπολογίστε τον.

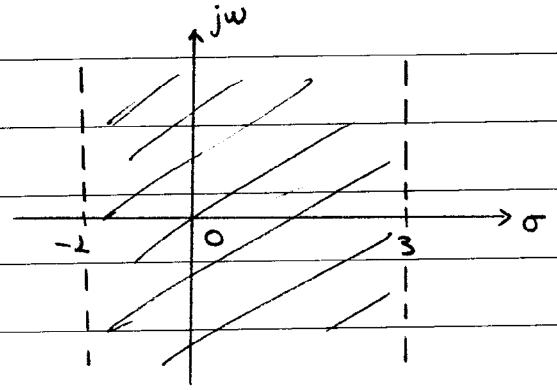
Λύση: α) "Σπάμε" το κλάσμα. Άρα θα έχουμε:

$$s_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \rightsquigarrow s_1 = 3,\ s_2 = -1.$$ Άρα $X(s) =$

$$= \frac{s+2}{(s-3)(s+1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1}.$$ Είναι $A = X(s)(s-3)\Big|_{s=3} = \left.\dfrac{s+2}{s+1}\right|_{s=3} =$

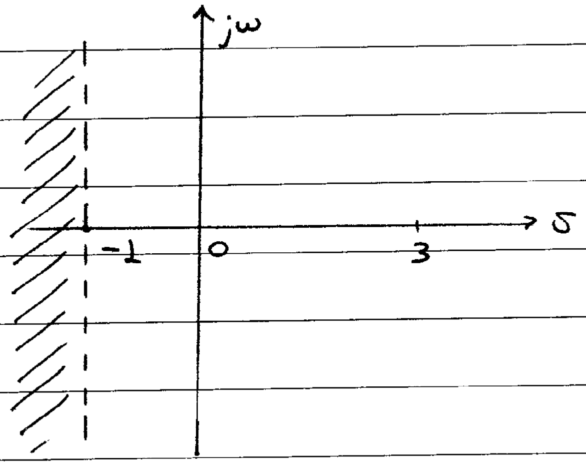
$$= \frac{3+2}{3+1} = \frac{5}{4}, \quad B = X(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{2-1}{-4} = -\frac{1}{4}.$$

Οπότε, είναι $X(s) = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{s+1} + \dfrac{5}{4}\dfrac{1}{s-3}$, ROC: $\begin{cases} Re\{s\} < -1 \\ Re\{s\} > 3 \\ -1 < Re\{s\} < 3 \end{cases}$

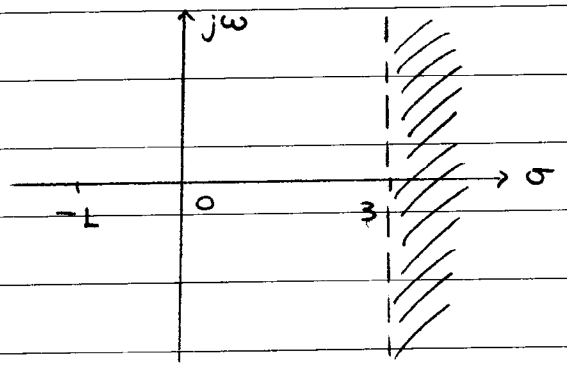


- Re{s} > -1 , άρα $x_1(t) = -\frac{1}{4} e^{-t}\epsilon(t)$.
  Re{s} < 3 , άρα $x_2(t) = -\frac{5}{4} e^{3t}\epsilon(-t)$.

  Άρα $x(t) = -\frac{1}{4} e^{-t}\epsilon(t) - \frac{5}{4} e^{3t}\epsilon(-t)$, με το διπλανό ROC.



- Re{s} < -1 , άρα $x_1(t) = \frac{1}{4} e^{-t}\epsilon(-t)$
  και $x_2(t) = -\frac{5}{4} e^{3t}\epsilon(-t)$.
  Άρα $x(t) = \frac{1}{4} e^{-t}\epsilon(-t) - \frac{5}{4} e^{3t}\epsilon(-t)$, με το διπλανό ROC.



- Re{s} > 3 , άρα $x_1(t) = -\frac{1}{4} e^{-t}\epsilon(t)$,
  και $x_2(t) = \frac{5}{4} e^{3t}\epsilon(t)$.
  Άρα $x(t) = -\frac{1}{4} e^{-t}\epsilon(t) + \frac{5}{4} e^{3t}\epsilon(t)$, με το διπλανό ROC.

β) Ο M.F υπάρχει στην περίπτωση $-1 < Re\{s\} < 3$, γιατί σε αυτό το ROC περιλαμβάνεται ο άξονας των φανταστικών αριθμών.
Άρα για $\sigma = 0$, $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \ldots = \frac{2(j\pi f + 1)}{(j2\pi f + 1)(j2\pi f + 3)}$.

Παράδειγμα: Έστω τυχαία διαδικασία $X(t)$ που δίνεται από την:

$$X(t) = A\cos(\omega t + \vartheta),$$

όπου ω και ϑ είναι σταθερές και A είναι τυχαία μεταβλητή.
Να διερευνηθεί αν η $X(t)$ είναι WSS.

Λύση: Είναι $E[X(t)] = E[A\cos(\omega t+\vartheta)] = \cos(\omega t+\vartheta)\, E[A]$.
Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι η $E[X(t)]$ δεν είναι σταθερή εκτός αν $E[A]=0$.
Επίσης, $R_X(t,t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = E[A^2\cos(\omega t+\vartheta)\cos(\omega(t+\tau)+\vartheta)] =$
$= \frac{1}{2}\left[\cos\omega\tau + \cos(2\omega t + 2\vartheta + \omega\tau)\right] E[A^2]$. Βλέπουμε ότι η αυτοσυσχέτιση της $X(t)$ δεν είναι συνάρτηση μόνο της χρονικής διαφοράς τ, άρα η διεργασία δεν είναι WSS.

Παράδειγμα. Έστω η τυχαία διαδικασία $Y(t) = AX(t)\cos(\omega_c t+\vartheta)$, με $X(t)$ τυχαία διαδικασία, στάσιμη, με $E[X(t)]=0$, αυτοσυσχέτιση $R_X(\tau)$ και φάσμα ισχύος $\Phi_X(f)$. Το πλάτος A και η συχνότητα ω_c είναι σταθερές, και η φάση ϑ είναι τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη κατανομή στο $[0,2\pi)$. Αν $X(t)$ και ϑ είναι ανεξάρτητες, να βρεθεί:
α) $E[Y(t)] = ?$ β) $R_Y(\tau) = ?$ γ) $\Phi_Y(f) = ?$

Λύση: α) $E[Y(t)] = E[AX(t)\cos(\omega_c t+\vartheta)] \overset{\text{ανεξ}}{=} AE[X(t)]\cdot E[\cos(\omega_c t+\vartheta)] =$
$=0$, επειδή $X(t)$, ϑ ανεξάρτητες.
β) $R_Y(\tau) = E[Y(t)Y(t+\tau)] = E[A^2X(t)X(t+\tau)\cos(\omega_c t+\vartheta)\cos(\omega_c(t+\tau)+\vartheta)] =$
$= \frac{A^2}{2} E[X(t)X(t+\tau)]\, E[\cos(\omega_c\tau) + \cos(2\omega_c t + \omega_c\tau + 2\vartheta)] =$

$= \frac{A^2}{2} R_X(\tau)\cos(\omega_c\tau) = R_Y(\tau)$. Επειδή η μέση τιμή είναι σταθερή και η αυτοσυσχέτιση της $Y(t)$ εξαρτάται μόνο από τη χρονική διαφορά τ, η $Y(t)$ είναι WSS.

γ) Είναι $\Phi_Y(f) = F\{R_Y(\tau)\} = \frac{A^2}{2} F\{R_X(\tau)\cos\omega_c\tau\} =$

$= \frac{A^2}{2} F\{R_X(\tau)\} * F\{\cos(\omega_c\tau)\} = \frac{A^2}{2}\Phi_X(f) * \left(\frac{1}{2}\delta(f-f_c) + \frac{1}{2}\delta(f+f_c)\right)$

$= \frac{A^2}{4}\Phi_X(f-f_c) + \frac{A^2}{4}\Phi_X(f+f_c)$.

<u>Παράδειγμα</u>: Δυο τυχαίες διαδικασίες $X(t), Y(t)$ δίνονται από τις:

$$X(t) = A\cos(\omega t + \vartheta)$$
$$Y(t) = A\sin(\omega t + \vartheta)$$

όπου A και ω είναι σταθερές και ϑ είναι τυχαία μεταβλητή, ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0, 2\pi)$. Να βρεθεί η στατιστική ετεροσυσχέτιση των $X(t), Y(t)$ και να δειχθεί ότι:

$$R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau).$$

<u>Λύση</u>: Είναι $R_{XY}(t, t+\tau) = E[X(t)Y(t+\tau)] =$

$= E[A^2\cos(\omega t+\vartheta)\sin(\omega(t+\tau)+\vartheta)] =$

$= \frac{A^2}{2} E[\sin(2\omega t + \omega\tau + 2\vartheta) - \sin(-\omega\tau)] =$

$= \frac{A^2}{2}\sin\omega\tau = R_{XY}(\tau)$. (1)

Επίσης, $R_{YX}(t, t+\tau) = E[Y(t)X(t+\tau)] =$

$= E[A^2\sin(\omega t+\vartheta)\cos(\omega(t+\tau)+\vartheta)] =$

$= \frac{A^2}{2} E[\sin(2\omega t+\omega\tau+2\vartheta) + \sin(-\omega\tau)] =$

$= -\frac{A^2}{2}\sin\omega\tau = R_{YX}(\tau)$ (2).

Από (1), (2), βλέπουμε ότι ισχύει $R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau)$.

Παράδειγμα: Να δείξετε ότι αν η $X(t)$ είναι WSS, τότε:

$$E\left[[X(t+\tau)-X(t)]^2\right] = 2\left[R_{xx}(0)-R_{xx}(\tau)\right],$$

όπου $R_{xx}(\tau)$ είναι η αυτοσυσχέτιση της $X(t)$.

Λύση: Είναι $E\left[[X(t+\tau)-X(t)]^2\right] =$

$= E\left[X^2(t+\tau) - 2X(t+\tau)X(t) + X^2(t)\right] =$

$= E[X^2(t+\tau)] - 2E[X(t+\tau)X(t)] + E[X^2(t)]$ (1)

Γνωρίζουμε ότι $E[X(t+\tau)X(t)] = R_x(\tau)$. Για $\tau=0$, έχουμε ότι $R_x(0) = E[X^2(t)]$. (2).

Η (1) $\overset{(2)}{\Rightarrow} E\left[[X(t+\tau)-X(t)]^2\right] = R_x(0) - 2R_x(\tau) + R_x(0) =$

$= 2R_x(0) - 2R_x(\tau) = 2\left(R_x(0) - R_x(\tau)\right).$

Παράδειγμα: Έστω η τυχαία διαδικασία $x(t) = \sum_k A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$, με φ_k τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[-\pi,\pi)$. Τα A_k, ω_k θεωρούνται δεδομένα (σταθερά).

α) Ν.δ.ο η $x(t)$ είναι στάσιμη $2^{ης}$ τάξης.

β) Ν.δ.ο η $x(t)$ είναι εργοδική.

γ) Ποιά η φασματική πυκνότητα ισχύος της διαδικασίας;

Λύση: α) Για να είναι στάσιμη $2^{ης}$ τάξης, πρέπει να ισχύουν:

$E[x(t)] = c \in \mathbb{R}$ κ' $R_x(t_1,t_2) = R_x(|t_1-t_2|) = R_x(\tau)$.

Είναι $E[x(t)] = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_k A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) \frac{1}{2\pi} d\varphi_k = \sum_k A_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_k t + \varphi_k) d\varphi_k =$

$= \sum_k A_k \cdot 0 = 0$, γιατί $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(a+x)dx = 2\cos a \cdot \sin\pi = 0$.

$(*)_1: \cos\vartheta \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\cos(\vartheta-\varphi) + \cos(\vartheta+\varphi)\right).$

$(*)_2: \sin\vartheta - \sin\varphi = 2\cos\left(\frac{\vartheta+\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\vartheta-\varphi}{2}\right).$

Επίσης, $R(t_1,t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] = E\left[\sum_k A_k \cos(\omega_k t_1+\varphi_k)\sum_k A_k\cos(\omega_k t_2+\varphi_k)\right] =$

$= \sum_k A_k^2 E[\cos(\omega_k t_1+\varphi_k)\cos(\omega_k t_2+\varphi_k)] = (*)_1$

$= \sum_k \frac{A_k^2}{2}\left(E[\cos(\omega_k(t_1-t_2))] + \overbrace{E[\cos(\omega_k(t_1+t_2)+2\varphi_k)]}^{0}\right) = (t_1-t_2=\tau)$

$= \sum_k \frac{A_k^2}{2}\cos(\omega_k\tau) = R_x(\tau).$

Άρα η διαδικασία είναι στάσιμη 2ης τάξης.

β) Για να είναι εργοδική, πρέπει $\bar{x} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt = E[x(t)] = 0$

κ' $\varphi_x(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau)\,dt = R_x(\tau) = \sum_k \frac{A_k^2}{2}\cos(\omega_k\tau).$

Είναι: $\bar{x} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_k A_k \frac{1}{\omega_k}\sin(\omega_k t+\varphi_k)\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = (*)_2$

$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_k \frac{A_k}{\omega_k}2\cos\varphi_k \sin\left(\frac{\omega_k T}{2}\right) = \sum_k A_k\cdot 2\cos\varphi_k\cdot\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\frac{\sin\left(\frac{\omega_k T}{2}\right)}{\omega_k} =$

$= \sum_k A_k\cos\varphi_k\cdot\lim_{T\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\omega_k T}{2}\right)}{\frac{\omega_k T}{2}} = \sum_k A_k\cos\varphi_k \lim_{T\to\infty}\mathrm{sinc}(f_k T) = 0.$

Εντελώς ανάλογα, και με χρήση της $(*)_1$, αποδεικνύεται ότι:

$\varphi_x(\tau) = \sum_k \frac{A_k^2}{2}\cos(\omega_k\tau)$

γ) Η φασματική πυκνότητα ισχύος είναι $\Phi_x(f) = F\{\varphi_x(\tau)\} = F\{R_x(\tau)\} =$

$= F\left\{\sum_k \frac{A_k^2}{2}\cos(\omega_k\tau)\right\} = \sum_k \frac{A_k^2}{2}F\{\cos(\omega_k\tau)\} =$

$= \sum_k \frac{A_k^2}{2}\left(\frac{1}{2}\delta(f-f_k) + \frac{1}{2}\delta(f+f_k)\right) =$

$= \sum_k \frac{A_k^2}{4}\left(\delta(f-f_k) + \delta(f+f_k)\right).$

Table 6.2

The Laplace Transform Properties

Operation	$f(t)$	$F(s)$
Addition	$f_1(t) + f_2(t)$	$F_1(s) + F_2(s)$
Scalar multiplication	$kf(t)$	$kF(s)$
Time differentiation	$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$
	$\frac{d^2f}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0^-) - \dot{f}(0^-)$
	$\frac{d^3f}{dt^3}$	$s^3F(s) - s^2f(0^-) - s\dot{f}(0^-) - \ddot{f}(0^-)$
Time integration	$\int_{0^-}^{t} f(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$
	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} f(t)\,dt$
Time shift	$f(t - t_0)u(t - t_0)$	$F(s)e^{-st_0} \quad t_0 \geq 0$
Frequency shift	$f(t)e^{s_0t}$	$F(s - s_0)$
Frequency differentiation	$-tf(t)$	$\frac{dF(s)}{ds}$
Frequency integration	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_{s}^{\infty} F(z)\,dz$
Scaling	$f(at),\ a \geq 0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
Time convolution	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s)F_2(s)$
Frequency convolution	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j}F_1(s) * F_2(s)$
Initial value	$f(0^+)$	$\lim_{s\to\infty} sF(s) \quad (n > m)$
Final value	$f(\infty)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$ (poles of $sF(s)$ in LHP)