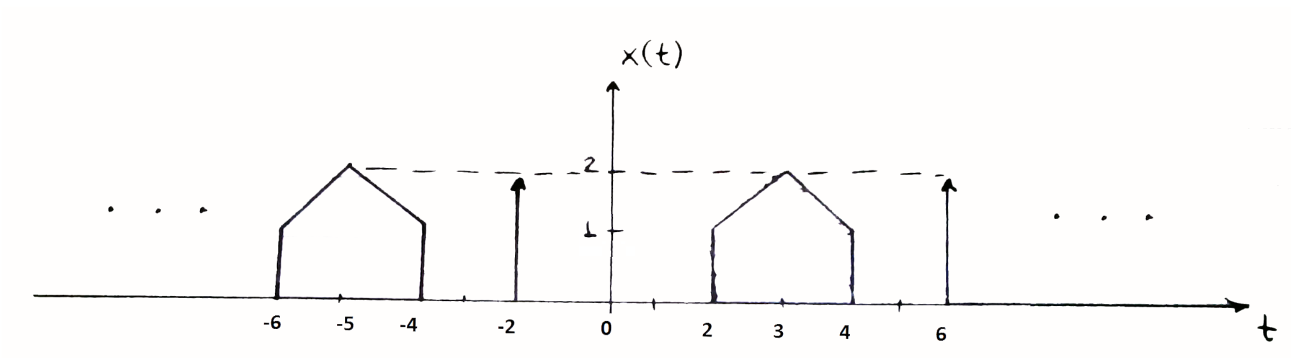
Επαναληπτικά/Προχωρημένα Θέματα Σημάτων και Συστημάτων

Επιμέλεια: Γιώργος Π. Καφεντζής
Υποψ. Διδ. Τμήμ. Η/Υ
Πανεπιστήμιο Κρήτης

19 Ιουνίου 2013

1. **Έστω το παρακάτω περιοδικό με περίοδο $\mathbf{T_0}$ σήμα $\mathbf{x(t)}$ (γνωστό και ως περιοδικό, μικρό σπίτι στο λιβάδι) του Σχήματος 1.**

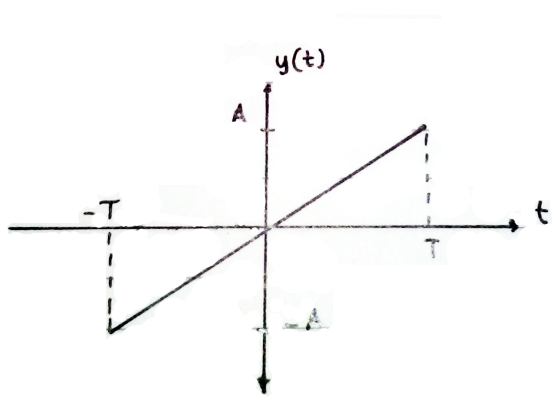


Σχήμα 1: Περιοδικό μικρο σπίτι στο λιβάδι

   (α′) **Υπολογίστε το μετασχ. Fourier, $\mathbf{X_{T_0}}(\omega)$ για τη βασική περίοδο του σήματος.**

   (β′) **Βρείτε τη Σειρά Fourier για το περιοδικό σήμα του Σχήματος 1.**

   (γ′) **Έστω το σήμα $\mathbf{y(t)} \longleftrightarrow \mathbf{Y}(\omega)$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 2, και έστω $\mathbf{Z}(\omega) = \omega\mathbf{Y}(\omega)$. Βρείτε το $\mathbf{z(t)}$.**



Σχήμα 2: Μη περιοδικό σήμα

(δ′) **Υπολογίστε τα**

i. $\mathbf{Y(0)}$

ii. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Y}(\omega)\mathbf{d}\omega$

iii. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{Y}(\omega)|^{\mathbf{2}}\mathbf{d}\omega$

(ε′) **Έστω το σήμα εισόδου**

$$\mathbf{w(t)} = \mathbf{2}\cos(\mathbf{50}\pi\mathbf{t}) - \cos(\mathbf{60}\pi\mathbf{t}) - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sin(\mathbf{80}\pi\mathbf{t} + \pi/\mathbf{2})$$

i. **Βρείτε την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας, $\mathbf{\Omega_s}$, για την ανάκτηση του αναλογικού σήματος από τα δείγματά του.**

ii. **Για την παραπάνω συχνότητα, βρείτε το σήμα διακριτού χρόνου, $\mathbf{w[n]} = \mathbf{w}(\frac{\mathbf{2}\pi}{\mathbf{\Omega_s}}\mathbf{n})$.**

Λύση:

(α′) Η βασική περίοδος T_0 του σήματος είναι προφανώς $T_0 = 8$. Ας επιλέξουμε την περίοδο από 0 ως 8. Το σήμα αυτό μπορεί να συντεθεί από κάποια βασικά, γνωστά μας σήματα (τετραγωνικός και τριγωνικός παλμός, και συνάρτηση Δέλτα). Άρα

$$x_{T_0}(t) = rect\Big(\frac{t-3}{2}\Big) + tri\Big(\frac{t-3}{1}\Big) + 2\delta(t-6)$$

Ο μετασχ. Fourier δίνεται εύκολα από γνωστα μας ζεύγη:

$$\begin{aligned} X_{T_0}(\omega) &= 2sinc\Big(\frac{2\omega}{2\pi}\Big)e^{-j3\omega} + sinc^2\Big(\frac{\omega}{2\pi}\Big)e^{-j3\omega} + 2e^{-j6\omega} \\ &= 2sinc\Big(\frac{\omega}{\pi}\Big)e^{-j3\omega} + sinc^2\Big(\frac{\omega}{2\pi}\Big)e^{-j3\omega} + 2e^{-j6\omega} \\ &= e^{-j3\omega}\Big(2sinc\Big(\frac{\omega}{\pi}\Big) + sinc^2\Big(\frac{\omega}{2\pi}\Big) + 2e^{-j3\omega}\Big) \end{aligned} \tag{1}$$

(β′) Έχουμε δει ότι άλλο ένα εργαλείο υπολογισμού των σειρών Fourier, είναι μέσω του μετασχηματισμού Fourier. Υπολογίζουμε το μετασχ. Fourier ΜΙΑΣ περιόδου του σήματος, και μετά τον *δειγματοληπτούμε* ανά ακέραια πολλαπλάσια του $\frac{2\pi}{T_0}$, δηλ. του ω_0. Με άλλα λόγια, μπορούμε από το φάσμα του μετασχ. Fourier, να βρούμε τους συντελεστές Fourier για οποιαδήποτε περίοδο του αντίστοιχου περιοδικού σήματος! Αυτό που συμβαίνει είναι ότι απλά δειγματοληπτούμε σε διαφορετικές αποστάσεις το φάσμα του μετασχηματισμού Fourier. Άρα θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} X[k] &= \frac{1}{T_0}X_{T_0}(\omega)\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{T_0}} = \frac{1}{T_0}e^{-j3\omega}\Big(2sinc\Big(\frac{\omega}{\pi}\Big) + sinc^2\Big(\frac{\omega}{2\pi}\Big) + 2e^{-j3\omega}\Big)\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{T_0}=\frac{k\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{T_0}e^{-j3k\pi/4}\left(2sinc\Big(\frac{k\pi/4}{\pi}\Big) + sinc^2\Big(\frac{k\pi/4}{2\pi}\Big) + 2e^{-j3k\pi/4}\right) \\ &= \frac{1}{8}e^{-j3k\pi/4}\left(2sinc\Big(\frac{k}{4}\Big) + sinc^2\Big(\frac{k}{8}\Big) + 2e^{-j3k\pi/4}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

(γ′) Έχουμε

$$Z(\omega) = \omega Y(\omega) \Longleftrightarrow jZ(\omega) = j\omega Y(\omega) \longleftrightarrow jz(t) = \frac{d}{dt}y(t) \Longleftrightarrow z(t) = -j\frac{d}{dt}y(t) \tag{3}$$

Άρα το $z(t)$ δεν είναι άλλο από την παράγωγο του $y(t)$, πολλαπλασιασμένη με $-j$. Το $y(t)$ προφανώς περιγράφεται ως

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{A}{T}t, & -T \leq t \leq T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

και άρα, δεδομένου ότι έχουμε ασυνέχειες στα άκρα του σήματος, θα είναι

$$\frac{d}{dt}y(t) = -A\delta(t+T) + \frac{A}{T}rect\Big(\frac{t}{2T}\Big) - A\delta(t-T)$$

και τελικά

$$z(t) = -j\frac{d}{dt}y(t) = jA\Big(\delta(t+T) - \frac{1}{T}rect\Big(\frac{t}{2T}\Big) + \delta(t-T)\Big) \tag{4}$$

(δ΄) Θα είναι

i.

$$Y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt\Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)dt = \int_{-T}^{T}\frac{A}{T}tdt = \frac{A}{T}\frac{t^2}{2}\Big|_{-T}^{T} = 0 \tag{5}$$

ii.

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)e^{j\omega t}d\omega\Big|_{t=0} = 2\pi y(t)\Big|_{t=0} = 2\pi y(0) = 0 \tag{6}$$

iii.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega &= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|y(t)|^2 dt = 2\pi\int_{-T}^{T}\Big(\frac{A}{T}\Big)^2 t^2 dt = 2\pi\Big(\frac{A}{T}\Big)^2\frac{t^3}{3}\Big|_{-T}^{T} \\ &= 2\pi\Big(\frac{A}{T}\Big)^2\frac{2T^3}{3} = 2\pi\frac{2A^2T^3}{3T^2} = \frac{4\pi A^2 T}{3}\end{aligned} \tag{7}$$

(ε΄) Θα έχουμε:

i. η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας ισούται με $\Omega_s = 2\Omega_{max}$, όπου Ω_{max} η μέγιστη συχνότητα του σήματος. Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι η $\Omega_s = 80\pi$. Άρα η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι ίση με

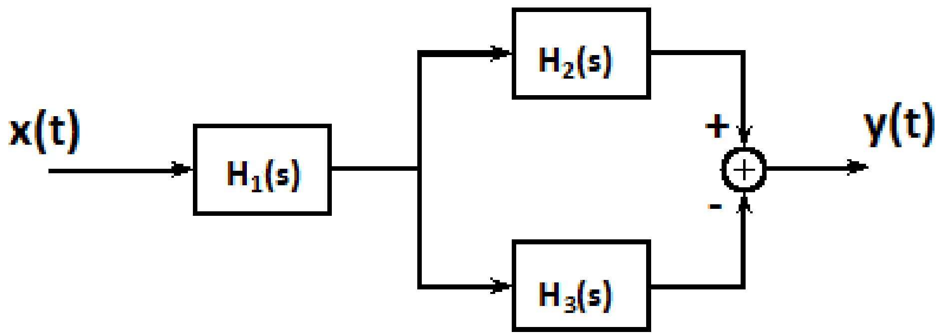
$$\Omega_s = 160\pi \tag{8}$$

ii. Το σήμα διακριτού χρόνου ισούται με

$$\begin{aligned} w[n] &= w(nT_s) = w\Big(\frac{2\pi}{\Omega_s}n\Big) = w\Big(\frac{1}{80}n\Big) \\ &= 2\cos\Big(50\pi\frac{1}{80}n\Big) - \cos\Big(60\pi\frac{1}{80}n\Big) - \frac{1}{2}\sin\Big(120\pi\frac{1}{80}n + \pi/2\Big) \\ &= 2\cos\Big(\frac{5\pi}{8}n\Big) - \cos\Big(\frac{3\pi}{4}n\Big) - \frac{1}{2}\sin\Big(\frac{3\pi}{2}n + \pi/2\Big)\end{aligned} \tag{9}$$

που είναι και το ζητούμενο.

2. **Έστω το ευσταθές σύστημα, $\mathbf{H(s)}$, του Σχήματος 3, όπου**



Σχήμα 3: Σύστημα

$$\mathbf{H_1(s)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(s-1)(s-2)}}, \quad \mathbf{H_2(s)} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s+2}}, \quad \mathbf{H_3(s)} = \frac{\mathbf{s-1}}{\mathbf{s+1}}$$

(α′) **Βρείτε το συνολικό συστημα $\mathbf{H(s)}$ και το πεδίο σύγκλισής του, $\mathbf{R_H}$.**

(β′) **Βρειτε την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος, $\mathbf{h(t)}$.**

(γ′) **Εξετάστε, χωρίς γνώση του συνολικού συστήματος, πότε τα συστήματα $\mathbf{H_i(s)}$ είναι ευσταθή, αιτιατα, και αντιστρέψιμα.**

(δ′) **Βρειτε τις επιμέρους κρουστικές αποκρίσεις των συστημάτων $\mathbf{h_i(t)}$, έχοντας γνώση της ευστάθειας του συνολικού συστήματος.**

(ε′) **Γράψτε το $\mathbf{H(s)}$ ως γινόμενο δυο συστημάτων: ενός συστήματος Ελάχιστης Φάσης $\mathbf{H_{min}(s)}$, και ενός συστήματος All-pass, $\mathbf{H_{ap}(s)}$.**

(ϛ′) **Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του συνολικού συστήματος, $\mathbf{H(\omega)}$, και δείξτε ότι $\mathbf{H(\omega) \leq \frac{1}{2}}$.**

(ζ′) **Υπολογίστε και σχεδιάστε την απόκριση πλάτους, $|\mathbf{H_3(\omega)}|$, του συστήματος $\mathbf{H_3(s)}$.**

Λύση:

(α′) Το συνολικό σύστημα θα είναι

$$\begin{aligned}
H(s) &= H_1(s)\Big(H_2(s) - H_3(s)\Big) \\
&= \frac{1}{(s-1)(s-2)}\Big(\frac{s}{s+2} - \frac{s-1}{s+1}\Big) \\
&= \frac{1}{(s-1)(s-2)}\frac{s(s+1)-(s-1)(s+2)}{(s+2)(s+1)} \\
&= \frac{1}{(s-1)(s-2)}\frac{s^2+s-(s^2-s+2s-2)}{(s+1)(s+2)} \\
&= \frac{1}{(s-1)(s-2)}\frac{2}{(s+1)(s+2)} \\
&= \frac{2}{(s-1)(s+1)(s-2)(s+2)} \qquad (10)
\end{aligned}$$

και επειδή το συνολικό σύστημα είναι ευσταθές, το πεδίο σύγκλισης θα είναι το

$$R_H = \{-1 < \Re\{s\} < 1\} \tag{11}$$

(β′) Το συνολικό σύστημα $H(s)$ μπορεί να γραφτεί ως

$$H(s) = \frac{2}{(s-1)(s+1)(s-2)(s+2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{s+2}$$

με

$$\begin{aligned} A &= H(s)(s-1)|_{s=1} = \frac{2}{(s+1)(s-2)(s+2)}|_{s=1} = -\frac{1}{3} \\ B &= H(s)(s+1)|_{s=-1} = \frac{2}{(s-1)(s-2)(s+2)}|_{s=-1} = \frac{1}{3} \\ C &= H(s)(s-2)|_{s=2} = \frac{2}{(s-1)(s+1)(s+2)}|_{s=2} = \frac{1}{6} \\ D &= H(s)(s+2)|_{s=-2} = \frac{2}{(s-1)(s+1)(s-2)}|_{s=-2} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

και άρα

$$H(s) = -\frac{1}{3}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{6}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{6}\frac{1}{s+2}$$

και επειδή το πεδίο σύγκλισης R_H μπορεί να γραφεί ως

$$R_H = \{-1 < \Re\{s\} < 1\} = \{\Re\{s\} > -2\} \cap \{\Re\{s\} > -1\} \cap \{\Re\{s\} < 1\} \cap \{\Re\{s\} < 2\}$$

θα έχουμε

$$\begin{aligned} H(s) \longleftrightarrow h(t) &= \frac{1}{3}e^{t}u(-t) + \frac{1}{3}e^{-t}u(t) - \frac{1}{6}e^{2t}u(-t) - \frac{1}{6}e^{-2t}u(t) \\ &= \Big(\frac{1}{3}e^{t} - \frac{1}{6}e^{2t}\Big)u(-t) + \Big(\frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-2t}\Big)u(t) \end{aligned} \tag{12}$$

(γ′) Για το $H_1(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s-2)}$, βλέπουμε οτι έχει πόλους στις θέσεις $p = 1, 2$, άρα για να είναι ευσταθές, πρέπει να ισχύει $\Re\{s\} < 1$. Για να ειναι αιτιατό, πρέπει $\Re\{s\} > 2$. Το αντίστροφό του είναι το

$$H_1^{inv}(s) = (s-1)(s-2) \tag{13}$$

το οποίο είναι ευσταθές και αιτιατό σε ολο το $s-$επίπεδο.

Για το $H_2(s) = \dfrac{s}{s+2}$, βλέπουμε ότι έχει πόλους στη θέση $s = -2$, και άρα είναι ευσταθές όταν $\Re\{s\} > -2$, και το ίδιο πρέπει να ισχύει για να είναι και αιτιατό. Το αντίστροφό του είναι το

$$H_2^{inv}(s) = \frac{s+2}{s} \tag{14}$$

το οποίο έχει δυο δυνατά πεδία σύγκλισης, $\Re\{s\} > 0$ και $\Re\{s\} < 0$. Προσέξτε, σε περίπτωση που το $H_2(s)$ έχει πεδίο σύγκλισης $R_{H_2} = \{\Re\{s\} < -2\}$, είναι δηλαδή ασταθές και αντι-αιτιατό, τότε ορίζεται αντίστροφο σύστημα μόνον όταν αυτό έχει πεδίο σύγκλισης το $R_{H_2^{inv}} = \{\Re\{s\} < 0\}$, γιατι σε αντίθετη περίπτωση δεν υπάρχει επικάλυψη με το πεδίο σύγκλισης του $H_2(s)$.

Για το $H_3(s) = \dfrac{s-1}{s+1}$, βλέπουμε ότι έχει έναν πόλο στη θέση $s=-1$, άρα για να είναι ευσταθές πρέπει να ισχυει $\Re\{s\} > -1$, ενώ το ίδιο πρέπει να ισχύει και για αιτιατότητα. Το αντίστροφό του είναι το

$$H_3^{inv}(s) = \frac{s+1}{s-1} \tag{15}$$

το οποίο έχει δυο δυνατά πεδία σύγκλισης, $\Re\{s\} > 1$ και $\Re\{s\} < 1$. Κι εδώ προσέξτε, όπως και πριν, σε περίπτωση που το $H_3(s)$ έχει πεδίο σύγκλισης $R_{H_3} = \{\Re\{s\} < -1\}$, είναι δηλαδή ασταθές και αντι-αιτιατό, τότε ορίζεται αντίστροφο σύστημα μόνον όταν αυτό έχει πεδίο σύγκλισης το $R_{H_3^{inv}} = \{\Re\{s\} < 1\}$, γιατι σε αντίθετη περίπτωση δεν υπάρχει επικάλυψη με το πεδίο σύγκλισης του $H_3(s)$.

(δ΄) Δεδομένου ότι το συνολικό σύστημα είναι ευσταθές, και ότι προκύπτει από τομές των επιμέρους συστημάτων, τα επιμέρους συστήματα πρέπει να είναι ευσταθή. Άρα τα πεδια σύγκλισης θα ειναι

$$R_{H_1} = \{\Re\{s\} < 1\}, \quad R_{H_2} = \{\Re\{s\} > -2\}, \quad \text{και} \quad R_{H_3} = \{\Re\{s\} > -1\} \tag{16}$$

Άρα θα είναι

$$\begin{aligned}
H_1(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)}, \quad \Re\{s\} < 1 \longleftrightarrow h_1(t) &= L^{-1}\Big\{\frac{-1}{s-1} + \frac{1}{s-2}\Big\} \\
&= e^t u(-t) - e^{2t} u(-t) \qquad (17) \\
H_2(s) = \frac{s}{s+2}, \quad \Re\{s\} < -2 \longleftrightarrow h_2(t) &= L^{-1}\Big\{s\frac{1}{s+2}\Big\} \\
&= \frac{d}{dt} e^{2t} u(-t) \\
&= 2e^{2t} u(-t) - \delta(t) \qquad (18) \\
H_3(s) = \frac{s-1}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1 \longleftrightarrow h_3(t) &= L^{-1}\Big\{\frac{s-1}{s+1}\Big\} \\
&= L^{-1}\Big\{s\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+1}\Big\} \\
&= \Big(\frac{d}{dt} e^{-t} u(t)\Big) - e^{-t} u(t) \\
&= \delta(t) - e^{-t} u(t) - e^{-t} u(t) \\
&= \delta(t) - 2e^{-t} u(t) \qquad (19)
\end{aligned}$$

(ε΄) Υπενθυμίζεται οτι το $H(s)$ είναι το

$$H(s) = \frac{2}{(s-1)(s+1)(s-2)(s+2)}$$

Βλέπουμε ότι έχει πόλους στις θέσεις $p = \pm 1, \pm 2$. Το σύστημα Ελάχιστης Φάσης θα πάρει τους πόλους που βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο, άρα θα είναι

$$H_{min}(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

ενώ το σύστημα All-pass θα πάρει τους εναπομείναντες πόλους. Όμως, επειδή τα All-pass συστήματα έχουν ίδιο αριθμό πόλων και μηδενικών, και μάλιστα είναι συμμετρικοί ως προς τον άξονα $j\omega$, το All-pass σύστημα θα είναι της μορφής

$$H_{ap}(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s-1)(s-2)}$$

Όμως πρέπει τα δυο μηδενικά του All-pass συστήματος στο $z = -1, -2$ να ακυρωθούν από το σύστημα Ελάχιστης Φάσης (βάζοντας δυο πόλους εκεί), ώστε το γινόμενο $H_{min}(s)H_{ap}(s)$ να μας δίνει το $H(s)$. Άρα τελικά

$$H_{min}(s) = \frac{2}{(s+1)^2(s+2)^2} \tag{20}$$

και

$$H_{ap}(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s-1)(s-2)} \tag{21}$$

και έτσι, πράγματι,

$$H(s) = H_{min}(s)H_{ap}(s) = \frac{2}{(s+1)^2(s+2)^2}\frac{(s+1)(s+2)}{(s-1)(s-2)} = \frac{2}{(s-1)(s+1)(s-2)(s+2)}$$

(ϛ′) Επειδή το συνολικό σύστημα είναι ευσταθές, τότε ο μετασχ. Fourier υπολογίζεται μέσω του μετασχ. Laplace ως

$$\begin{aligned} H(\omega) &= H(s = \sigma + j\omega)|_{\sigma=0} \\ &= \frac{2}{(s-1)(s+1)(s-2)(s+2)}\bigg|_{s=j\omega} \\ &= \frac{2}{(j\omega-1)(j\omega+1)(j\omega-2)(j\omega+2)} \\ &= \frac{2}{(-|j\omega+1|^2)(-|j\omega+2|^2)} \\ &= \frac{2}{(-(\omega^2+1))(-(\omega^2+4))} \\ &= \frac{2}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)} \leq \frac{2}{(0+1)(0+4)} = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{22}$$

και άρα

$$H(\omega) \leq \frac{1}{2} \tag{23}$$

(ζ′) Βλέπουμε ότι το $H_3(s)$ έχει έναν πόλο στη θέση $p = -1$ και ένα μηδενικό στη θέση $z = 1$, δηλ. είναι σε συμμετρικές θέσεις ως προς τον κατακόρυφο άξονα. Άρα το σύστημα αυτό είναι ένα All-pass σύστημα, και άρα η απόκριση πλάτους θα είναι μοναδιαία, $|H_3(\omega)| = 1$, $\forall \omega$. Εναλλακτικά,

$$|H(\omega)| = \frac{|j\omega-1|}{|j\omega+1|} = \frac{\sqrt{\omega^2+1}}{\sqrt{\omega^2+1}} = 1 \tag{24}$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

3. **Έστω οτι ένα σύστημα $\mathbf{H}(\mathrm{s})$ περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση**

$$\mathbf{\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = x(t)}$$

(α΄) **Υπολογίστε την κρουστική απόκριση $\mathbf{h}(\mathbf{t})$ του συστήματος όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές και**

i. **το σύστημα είναι ευσταθές**

ii. **το σύστημα είναι αιτιατό**

(β΄) **Βρείτε την έξοδο, $\mathbf{y}(\mathbf{t})$, του ευσταθούς συστήματος, $\mathbf{H}(\mathrm{s})$, όταν η είσοδος είναι της μορφής $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{e^{-2t}u}(\mathbf{t})$.**

(γ΄) **Βρείτε το αντίστροφο σύστημα, $\mathbf{H_{inv}}(\mathrm{s})$.**

Λύση:

(α΄) Θα ειναι

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) &= x(t) \longleftrightarrow \\
s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) - sY(s) + y(0^-) - 2Y(s) &= X(s) \\
Y(s)(s^2 - s - 2) &= X(s) \\
H(s) &= \frac{1}{s^2 - s - 2}
\end{aligned}$$

και

$$H(s) = \frac{1}{s^2 - s - 2} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1}$$

με

$$\begin{aligned}
A &= H(s)(s-2)\Big|_{s=2} = \frac{1}{s+1}\Big|_{s=2} = \frac{1}{3} \\
B &= H(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{s-2}\Big|_{s=-1} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

και άρα:

i. Αν το συστημα είναι ευσταθές, τότε το πεδιο σύγκλισης θα είναι το

$$R_H = \{-1 < \Re\{s\} < 2\} = \{\Re\{s\} > -1\} \cap \{\Re\{s\} < 2\} \tag{25}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
H_{stable}(s) &= \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+1} \longleftrightarrow \\
h_{stable}(t) &= -\frac{1}{3}e^{2t}u(-t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t)
\end{aligned} \tag{26}$$

ii. Αν το σύστημα είναι αιτιατό, τότε το πεδίο σύγκλισης θα είναι το $\Re\{s\} > 2$. Άρα

$$\begin{aligned}
H_{causal}(s) &= \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+1} \longleftrightarrow \\
h_{causal}(t) &= \frac{1}{3}e^{2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t)
\end{aligned} \tag{27}$$

(β′) Η έξοδος θα ειναι της μορφης

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)}X(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)}\frac{1}{(s+2)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

με

$$\begin{aligned} A &= Y(s)(s-2)\Big|_{s=2} = \frac{1}{(s+1(s+2))}\Big|_{s=2} = \frac{1}{12} \\ B &= Y(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{(s-2)(s+2)}\Big|_{s=-1} = -\frac{1}{3} \\ C &= Y(s)(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{1}{(s-2)(s+1)}\Big|_{s=-2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

και άρα

$$Y(s) = \frac{1}{12}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+2}$$

Επειδή το σύστημα έχει πεδίο σύγκλισης

$$R_H = \{-1 < \Re\{s\} < 2\}$$

και η είσοδος

$$R_X = \{\Re\{s\} > -2\}$$

η έξοδος θα έχει πεδίο σύγκλισης

$$R_Y = \{-1 < \Re\{s\} < 2\} = \{\Re\{s\} > -1\} \cap \{\Re\{s\} < 2\} \cap \{\Re\{s\} > -2\} \tag{28}$$

Άρα

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{12}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+2} \longleftrightarrow \\ y(t) &= -\frac{1}{12}e^{2t}u(-t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{4}e^{-2t}u(t) \end{aligned} \tag{29}$$

(γ′) Το αντίστροφο σύστημα του $H(s)$ θα είναι το

$$H_{inv}(s) = \frac{1}{H(s)} = s^2 - s - 2 = (s-2)(s+1) \tag{30}$$

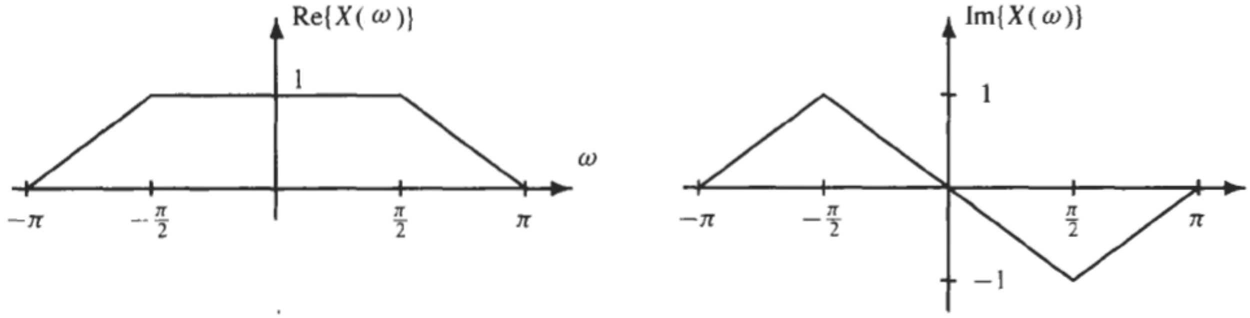
και έχει ως πεδίο σύγκλισης όλο το μιγαδικό επίπεδο.

4. **Το κέντρο βαρύτητας, $\mathbf{C}$, ενός σήματος, $\mathbf{x(t)}$, ορίζεται ως**

$$\mathbf{C} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{t x(t) dt}}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x(t) dt}}$$

(α′) **Βρείτε μια έκφραση για το $\mathbf{C}$ ως συνάρτηση του μετασχ. Fourier, $\mathbf{X}(\omega)$, του σήματος $\mathbf{x(t)}$.**

(β′) **Υπολογίστε το $\mathbf{C}$ για το σήμα που έχει πραγματικό και φανταστικό μέρος μετασχ. Fourier όπως στο Σχήμα 4.**



Σχήμα 4: Πραγματικό και Φανταστικό μέρος του Μετασχ. Fourier

(γ′) **Υπολογίστε το κέντρο βαρύτητας $\mathbf{C_x}$ του σήματος $\mathbf{x(t) = e^{-2t}u(t)}$. Έστω οτι το σήμα αυτό περνάει από το σύστημα με κρουστική απόκριση $\mathbf{h(t) = 2\delta(t-1)}$ και παράγεται η έξοδος $\mathbf{y(t)}$. Βρείτε το κέντρο βαρύτητας της εξόδου, $\mathbf{C_y}$.**

Λύση:

(α′) Παρατηρούμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} tx(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} tx(t)e^{-j\omega t}dt\Big|_{\omega=0} = F\{tx(t)\}\Big|_{\omega=0}$$

Από τους πίνακες του μετασχ. Fourier, βρίσκουμε ότι

$$tx(t) \longleftrightarrow j\frac{d}{d\omega}X(\omega)$$

και άρα

$$\int_{-\infty}^{\infty} tx(t)dt = j\frac{d}{d\omega}X(\omega)\Big|_{\omega=0}$$

Επίσης,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\Big|_{\omega=0} = X(0)$$

Άρα τελικά

$$C = \frac{j\frac{d}{d\omega}X(\omega)\Big|_{\omega=0}}{X(0)} \tag{31}$$

(β′) Προφανώς

$$X(\omega) = X_R(\omega) + jX_I(\omega) = \Re\{X(\omega)\} + j\Im\{X(\omega)\}$$

Άρα, από το Σχήμα 4, είναι

$$X(0) = X_R(0) + jX_I(0) = 1 + j0 = 1$$

και

$$j\frac{d}{d\omega}X(\omega) = j\frac{d}{d\omega}(X_R(\omega) + jX_I(\omega)) = j\frac{d}{d\omega}X_R(\omega) - \frac{d}{d\omega}X_I(\omega)$$

Αν παραγωγίσουμε τα γραφήματα και υπολογίσουμε το παραπάνω για $\omega = 0$, θα έχουμε

$$j\frac{d}{d\omega}X(\omega)\Big|_{\omega=0} = j\frac{d}{d\omega}X_R(\omega)\Big|_{\omega=0} - \frac{d}{d\omega}X_I(\omega)\Big|_{\omega=0} = 0 - \Big(-\frac{2}{\pi}\Big) = \frac{2}{\pi}$$

Οπότε η τιμή του C για το εν λόγω σήμα, το κέντρο βάρους του έχει τιμή

$$C = \frac{\frac{2}{\pi}}{1} = \frac{2}{\pi} \tag{32}$$

(γ′) Είναι

$$x(t) = e^{-2t}u(t) \longleftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{2 + j\omega}$$

και

$$\frac{d}{d\omega}X(\omega) = \frac{d}{d\omega}\frac{1}{2 + j\omega} = \frac{-(2 + j\omega)'}{(2 + j\omega)^2} = \frac{-j}{(2 + j\omega)^2}$$

και

$$X(0) = \frac{1}{2 + j\omega}\Big|_{\omega=0} = \frac{1}{2}$$

Άρα

$$C_x = \frac{j\frac{d}{d\omega}X(\omega)\Big|_{\omega=0}}{X(0)} = \frac{j\frac{-j}{(2+j\omega)^2}\Big|_{\omega=0}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \tag{33}$$

Επίσης,

$$h(t) = 2\delta(t - 1) \longleftrightarrow H(\omega) = 2e^{-j\omega}$$

Έχουμε ότι

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \frac{2}{2 + j\omega}e^{-j\omega}$$

και έτσι

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega}Y(\omega) &= \frac{d}{d\omega}\frac{2}{2 + j\omega}e^{-j\omega} = \frac{(2e^{-j\omega})'(2 + j\omega) - (2 + j\omega)'2e^{-j\omega}}{(2 + j\omega)^2} \\ &= \frac{-2je^{-j\omega}(2 + j\omega) - 2je^{-j\omega}}{(2 + j\omega)^2} = \frac{(2 + j\omega) + 1}{(2 + j\omega)^2}(-2je^{-j\omega}) \end{aligned}$$

και άρα

$$j\frac{d}{d\omega}Y(\omega)\Big|_{\omega=0} = j\frac{(2 + j\omega) + 1}{(2 + j\omega)^2}(-2je^{-j\omega})\Big|_{\omega=0} = \frac{(2 + j\omega) + 1}{(2 + j\omega)^2}(2e^{-j\omega})\Big|_{\omega=0} = \frac{3}{2}$$

και

$$Y(0) = \frac{2}{2 + j0}e^0 = 1$$

και τελικά

$$C_y = \frac{j\frac{d}{d\omega}Y(\omega)\Big|_{\omega=0}}{Y(0)} = \frac{3}{2} \tag{34}$$

5. **Να βρεθεί η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας για το σήμα**

$$\mathbf{x(t) = sinc\Big(\frac{at}{\pi}\Big)}$$

Λύση:
Γνωρίζουμε ότι

$$Arect\Big(\frac{t}{T}\Big) \longleftrightarrow ATsinc\Big(\frac{\omega T}{2\pi}\Big)$$

Επίσης γνωρίζουμε από την ιδιότητα της δυικότητας ότι

$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega) \quad \text{τότε} \quad X(t) \longleftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

Εφαρμόζοντας αυτή τη σχέση, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} Tsinc\Big(\frac{tT}{2\pi}\Big) &\longleftrightarrow 2\pi rect\Big(\frac{-\omega}{T}\Big) \\ sinc\Big(\frac{tT}{2\pi}\Big) &\longleftrightarrow \frac{2\pi}{T} rect\Big(\frac{-\omega}{T}\Big) \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι για $a = \frac{T}{2}$ έχουμε τη σχέση της εκφώνησης, άρα

$$sinc\Big(\frac{at}{\pi}\Big) \longleftrightarrow \frac{\pi}{a} rect\Big(\frac{-\omega}{2a}\Big) = \frac{\pi}{a} rect\Big(\frac{\omega}{2a}\Big)$$

αφού η συνάρτηση $rect()$ είναι άρτια. Προφανώς το παραπάνω $rect()$ ορίζεται στη συχνότητα στο $[-a, a]$, οπότε η μέγιστη συχνότητά του είναι η $\omega_{max} = a$. Οπότε η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας για την πλήρη αναπαράσταση του σήματος από τα δείγματά του είναι η

$$\omega_s = 2\omega_{max} = 2a \tag{35}$$

που ειναι και το ζητούμενο.

6. **Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $\mathbf{h(t) = 2e^{-t}u(t)}$ και στην είσοδό του εμφανίζεται το σήμα $\mathbf{x(t) = 4\cos(t + \pi/2)}$. Βρείτε την έξοδο $\mathbf{y(t)}$. Τι παρατηρείτε;**

Λύση:
Η είσοδος γράφεται

$$x(t) = 4\cos(t + \pi/2) = 2e^{jt}e^{j\pi/2} + 2e^{-jt}e^{-j\pi/2}$$

Θα είναι, ως γνωστόν

$$h(t) = 2e^{-t}u(t) \longleftrightarrow H(\omega) = \frac{2}{1 + j\omega}$$

Άρα το πλάτος θα είναι

$$|H(\omega)| = \frac{2}{|1 + j\omega|} = \frac{2}{\sqrt{1 + \omega^2}}$$

ενώ για τη φάση θα έχουμε

$$H(\omega) = \frac{2}{1 + j\omega} = \frac{2(1 - j\omega)}{|1 + j\omega|^2} = \frac{2}{1 + \omega^2} - j\frac{2\omega}{1 + \omega^2} = \Re\{H(\omega)\} + j\Im\{H(\omega)\}$$

Άρα το σύστημα γράφεται ως

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j \tan^{-1} \frac{\Im\{H(\omega)\}}{\Re\{H(\omega)\}}}$$

και άρα η φάση θα ειναι

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{\Im\{H(\omega)\}}{\Re\{H(\omega)\}} = \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{2\omega}{1+\omega^2}}{\frac{2}{1+\omega^2}}\right) = \tan^{-1}\Big(-\frac{\omega}{1}\Big) = -\tan^{-1}(\omega)$$

Η έξοδος θα είναι προφανώς η συνέλιξη της εισόδου, $x(t)$, με το σύστημα, $h(t)$. Όμως η είσοδος είναι της μορφης

$$x(t) = 4\cos(t + \pi/2) = 2e^{jt}e^{j\pi/2} + 2e^{-jt}e^{-j\pi/2}$$

Γνωριζουμε ότι οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις του συστήματος, και έτσι, δεδομένου ότι το σύστημα είναι πραγματικό σήμα, η έξοδος $y(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}
y(t) &= 2H(1)e^{jt}e^{j\pi/2} + 2H(-1)e^{-jt}e^{-j\pi/2} \\
&= 2H(1)e^{jt}e^{j\pi/2} + 2H^*(1)e^{-jt}e^{-j\pi/2} \\
&= |H(1)|e^{j\phi(1)}e^{jt}e^{j\pi/2} + |H(1)|e^{-j\phi(1)}e^{-jt}e^{-j\pi/2} \\
&= 2|H(1)|e^{j(t+\pi/2+\phi(1))} + 2|H(1)|e^{-j(t+\pi/2+\phi(1))} \\
&= 4|H(1)|\cos(t + \pi/2 - \pi/4) \\
&= \frac{8}{\sqrt{2}}\cos(t + \pi/4) \qquad (36)
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η έξοδος ειναι πάλι ημιτονοειδής μορφή, οπως η είσοδος, και έχει επηρεαστεί από το σύστημα τόσο στο πλάτος της (πλάτος εισόδου 4, πλάτος εξόδου $4|H(1)|$), όσο και στη φάση της (φάση εισόδου $\pi/2$, φάση εξόδου $\pi/2 + \phi(4) = \pi/2 - \pi/4 = \pi/4$).

Γενικότερα, μπορούμε να παρατηρήσουμε και να χρησιμοποιούμε έτοιμο οτι:

> **Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος ειναι της μορφής $\mathbf{x(t) = A}\cos(\omega_\mathbf{0}\mathbf{t} + \theta)$,**
> **τότε η έξοδος θα είναι της μορφής**
> $\mathbf{y(t) = A|H}(\omega_\mathbf{0})|\cos(\omega_\mathbf{0}\mathbf{t} + \theta + \phi(\omega_\mathbf{0}))$,
> **όπου $\mathbf{H}(\omega) = |\mathbf{H}(\omega)|\mathbf{e}^{\mathbf{j}\phi(\omega)}$ η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος.**

Προφανώς το παραπάνω μπορει να γενικευτεί για αθροισμα ημιτόνων ως:

> **Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος ειναι της μορφής $\mathbf{x(t)} = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{A_k}\cos(\omega_\mathbf{k}\mathbf{t} + \theta_\mathbf{k})$,**
> **τότε η έξοδος θα είναι της μορφής**
> $$\mathbf{y(t)} = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{A_k|H}(\omega_\mathbf{k})|\cos(\omega_\mathbf{k}\mathbf{t} + \theta_\mathbf{k} + \phi(\omega_\mathbf{k})),$$
> **όπου $\mathbf{H}(\omega) = |\mathbf{H}(\omega)|\mathbf{e}^{\mathbf{j}\phi(\omega)}$ η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος.**