

ΗΥ215: 6η Σειρά Ασκήσεων

Τετάρτη 21 Μαΐου 2014

Παράδοση: Πέμπτη 29 Μαΐου 2014

Απορίες: hy215-list@csd.uoc.gr

1. Μετασχηματισμός Laplace

Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Laplace της παρακάτω συνάρτησης με 2 τρόπους (ορισμό και ιδιότητες).

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 3 \\ 6 - t, & 3 \leq t \leq 6 \\ 0, & t < 0, t > 6 \end{cases}$$

2. Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης για $\sigma > -2$.

$$X(s) = \frac{(s+1)(s^2 - 6s + 5)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

3. Μετασχ. Laplace και Συστήματα

Ένα σύστημα περιγράφεται από την παρακάτω συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 5}{(s+3)(s+5)^2}$$

- (α') Να σχεδιάσετε τους πόλους και τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς.
- (β') Να βρεθεί η μοναδιαία απόκριση του συστήματος για τις διάφορες περιοχές σύγκλισης.
- (γ') Αν η συνάρτηση μεταφοράς περιγράφει ένα αιτιατό και ευσταθές σύστημα, ποιά είναι η περιοχή σύγκλισης και ποια η μοναδιαία απόκριση του συστήματος;
- (δ') Δεδομένου ότι υπάρχει ο Μετασχηματισμός Fourier του συστήματος, ποιά είναι η μοναδιαία απόκριση του συστήματος;
- (ε') Να βρείτε την έξοδο $y(t)$ του συστήματος για βηματική είσοδο $x(t) = \epsilon(t)$.
- (ς') Να υπολογίσετε την αρχική συνθήκη $h(0^+)$ και το όριο $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$.

4. Μετασχ. Laplace και Διαφορικές Εξισώσεις

Ένα αιτιατό σύστημα περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = x(t)$$

- (α') Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του συστήματος.
- (β') Να σχεδιαστούν οι πόλοι και τα μηδενικά. Ποιό είναι το πεδίο σύγκλισης;
- (γ') Να υπολογιστεί η μοναδιαία απόκριση του αιτιατού συστήματος.
- (δ') Υπολογίστε την έξοδο του συστήματος για είσοδο $x(t) = 60e^{-2t}\epsilon(t)$.
- (ε') Αν δεν θεωρήσετε μηδενικές αρχικές συνθήκες, αλλά $y(0) = 1$ και $y'(0) = 0$, βρείτε την νέα απόκριση συχνότητας.

5. Μετασχ. Laplace και Αντίστροφα Συστήματα - I

Ένα σύστημα με μοναδιαία απόκριση $h(t)$ έχει αντίστροφο σύστημα $h_{inv}(t)$ όταν ικανοποιείται η σχέση

$$h(t) * h_{inv}(t) = \delta(t)$$

- (α') Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $H_{inv}(s)$ για το αντίστροφο σύστημα.
- (β') Μας ενδιαφέρουν συστήματα που έχουν ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα. Αυτό ισχύει μόνο αν τα συστήματα αυτά έχουν τους πόλους και τα μηδενικά στο αριστερό ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου. Τέτοια συστήματα ονομάζονται εναλλακτικά ως *Συστήματα Ελάχιστης Φάσης*. Έστω η διαφορική εξίσωση που περιγράφει ένα σύστημα $h(t)$:

$$\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{d}{dt}x(t) - 2x(t)$$

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, $H(s)$, καθώς και του αντιστρόφου του. Υπάρχει ένα ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα για το σύστημα $h(t)$;

- (γ') Θεωρήστε το αιτιατό σύστημα

$$H(s) = \frac{s+2}{s+1}$$

Ποιό από τα παρακάτω δυο συστήματα είναι έγκυρο αντίστροφο σύστημα για το $H(s)$; Εξηγήστε το γιατί.

- i. $H_{inv}(s) = \frac{s+1}{s+2}$, $\Re\{s\} > -2$
- ii. $H_{inv}(s) = \frac{s+1}{s+2}$, $\Re\{s\} < -2$

6. Μετασχ. Laplace και Αντίστροφα Συστήματα - II

Η έξοδος ενός συστήματος πολλαπλής διαδρομής (multipath system) $y(t)$ μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της εισόδου $x(t)$ ως

$$y(t) = x(t) + \alpha x(t - T_d)$$

όπου α και T_d η σχετική ισχύς και η χρονική καθυστέρηση της δεύτερης διαδρομής, αντίστοιχα.

- (α') Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του συστήματος.
- (β') Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $H_{inv}(s)$ του αντίστροφου συστήματος.

(γ') Εκφράστε τη συνάρτηση μεταφοράς του αντίστροφου συστήματος ως ένα άπειρο άθροισμα όρων.

Βοήθεια:

$$\frac{1}{1-a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n, \quad |a| < 1$$

(δ') Βρείτε τη μοναδιαία απόκριση $h_{inv}(t)$ του αντίστροφου συστήματος.