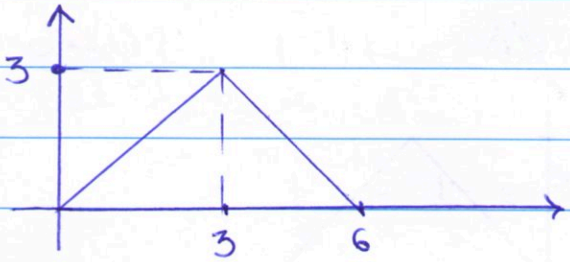
HY-215 : 6η Σειρά Ασκήσεων

ΛΥΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1 : Μετασχηματισμός Laplace

$$x(t) = \begin{cases} t & , 0 \le t < 3 \\ 6-t & , 3 \le t \le 6 \\ 0 & , t<0 \, , t>6 \end{cases}$$



από ορισμό

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \underbrace{\int_0^3 t\, e^{-st} dt}_{1} + \int_3^6 (6-t) e^{-st} dt$$

$$1 \Rightarrow \int t\, e^{-st} dt = -\frac{1}{s}\int t (e^{-st})' dt = -\frac{1}{s}\left[t\, e^{-st} - \int t' e^{-st} dt\right]$$

$$= -\frac{1}{s}\left[t \cdot e^{-st} - \int e^{-st} dt\right] = -\frac{1}{s}\left[t e^{-st} + \frac{1}{s} e^{-st}\right]$$

$$= -\frac{1}{s} t \cdot e^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{-st}$$

$$X(s) = \left[-\frac{1}{s} t e^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{-st}\right]_0^3 + \int_3^6 6 e^{-st} dt - \int_3^6 t\, e^{st} dt =$$

$$= \left[-\frac{1}{s} t e^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{st} \right]_0^3 + 6 \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_3^6$$

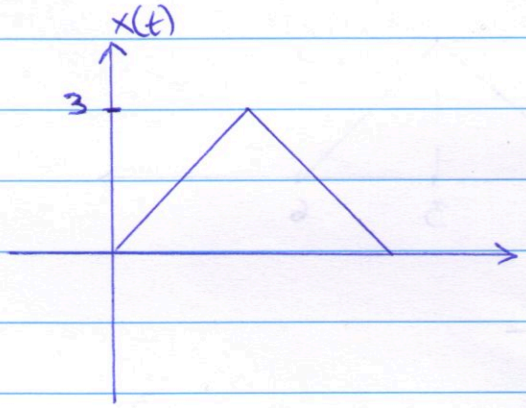
$$+ \left[+\frac{1}{s} t e^{-st} + \frac{1}{s^2} e^{-st} \right]_3^6 = \ldots$$

$$= e^{-3s} \left(-\frac{3}{\cancel{s}} + \frac{6}{\cancel{s}} - \frac{3}{\cancel{s}} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} \right) + \frac{1}{s^2} e^{-6s} + \frac{1}{s^2}$$

$$- \frac{2}{s^2} e^{-3s} + \frac{1}{s^2} e^{-6s} + \frac{1}{s^2}$$

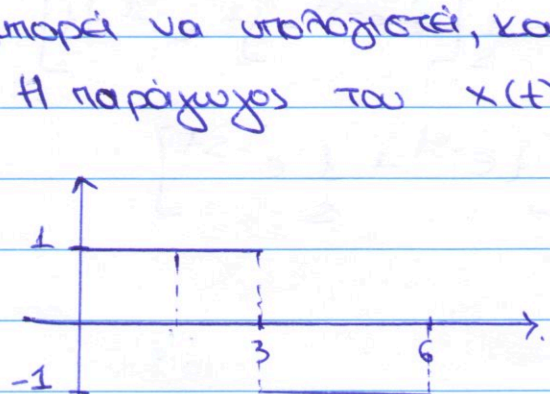
<u>από ιδιότητες</u>

αρχικά έχουμε :

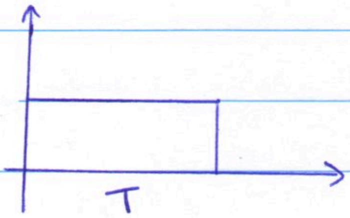


όμως απ' το σχήμα αυτό δεν είναι εύκολο να υπολογιστεί ο μετ. Laplace X(s). Απ' την παράγωγο του x(t) προκύπτει ένα ευκολότερο σχήμα του οποίου ο μ. Laplace μπορεί να υπολογιστεί, και έπειτα χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της παραγώγισης:

Η παράγωγος του x(t) είναι :



Ο Laplace του



είναι $\frac{1}{s}(1-e^{-sT})$

οπότε από ιδιότητα της παραγώγου έχουμε:

$$L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - \overset{0}{x(0^-)} = sX(s) \Rightarrow X(s) = \frac{L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}}{s} \quad (1)$$

και από το σχήμα:

$$L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \frac{1}{s}(1-e^{-s3}) - \frac{1}{s}(1-e^{-3s})e^{-3s} =$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-3s} - \frac{1}{s}e^{-3s} + \frac{1}{s}e^{-6s} \quad (2).$$

από (1),(2) $\Rightarrow$

$$X(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2}e^{-3s} + \frac{1}{s}e^{-6s}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2 : ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Laplace

$$X(s) = \frac{(s+1)(s^2-6s+5)}{s^3+6s^2+11s+6}$$

Horner

$s^3 + 6s^2 + 11s + 6 \quad \longleftarrow$ ρίζα -1

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & 6 & 11 & 6 & -1 \\
\downarrow & -1 & -5 & -6 & \\
\hline
1 & 5 & 6 & 0 &
\end{array}$$

Το πηλίκο είναι s^2+5s+6

$$X(s) = \frac{s^2-6s+5}{s^2+5s+6}$$

$$\begin{array}{rrr|l}
s^2 & -6s & +5 & s^2+5s+6 \\
\cline{4-4}
-s^2 & -5s & -6 & 1 \\
\cline{1-3}
0 & -11s & -1 &
\end{array}$$

$$X(s) = 1 + \frac{(-11s-1)}{s^2+5s+6} = 1 + \frac{(-11s-1)}{(s+2)(s+3)} =$$

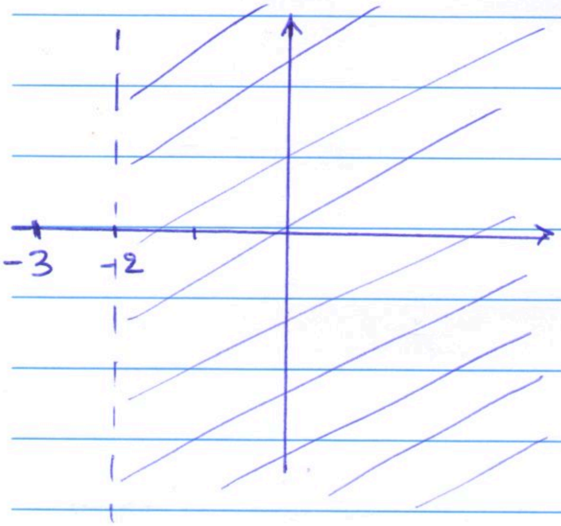
$$= 1 + \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

$$A = \frac{-11s - 1}{\cancel{(s+2)}(s+3)}\Bigg|_{s=-2} = \frac{22-1}{-2+3} = 21$$

$$B = \frac{-11s - 1}{(s+2)\cancel{(s+3)}} \cdot \cancel{(s+3)}\Bigg|_{s=-3} = \frac{33-1}{-1} = -32$$

$$X(s) = 1 + \frac{21}{s+2} + \frac{-32}{s+3}$$

$$x(t) = \delta(t) + 21 \cdot e^{-2t} u(t) - 32 e^{-3t} u(t)$$



ΑΣΚΗΣΗ 3 : Μετασχ. Laplace και Συστήματα

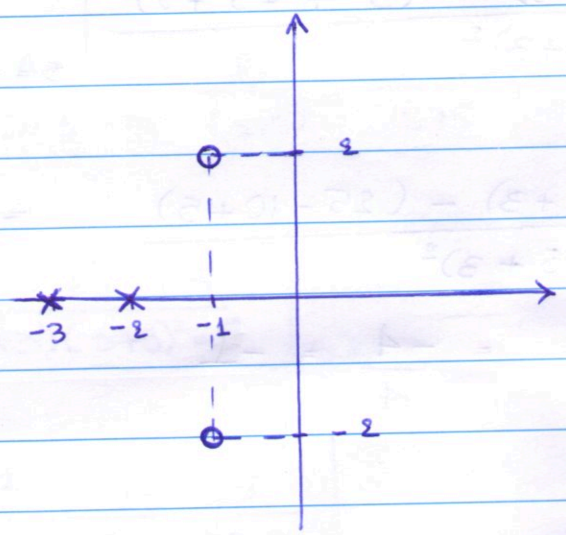
$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 5}{(s+3)(s+5)^2}$$

(α) ρίζες του αριθμητή : (μηδενικά)

$s^2 + 2s + 5 = 0$

$\Delta = 4 - 20 = -16$

$$s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$



(β) $$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 5}{(s+3)(s+5)^2} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{(s+5)^2} + \frac{\Gamma}{s+5}$$

$$A = \left. \frac{s^2 + 2s + 5}{\cancel{(s+3)}(s+5)^2} \right|_{s=-3} = \frac{(-3)^2 + 2(-3) + 5}{(-3+5)^2} = \frac{8}{4} = 2$$

$$B = \left.\frac{s^2+2s+5}{(s+3)\cancel{(s+5)^2}}\right|_{s=-5} = \frac{25-10+5}{-5+3} = \frac{20}{-2} = -10$$

$$\Gamma = \frac{d}{ds}\left\{\left.\frac{s^2+2s+5}{(s+3)\cancel{(s+5)^2}}\right|_{s=-5}\right. =$$

$$= \left.\frac{(s^2+2s+5)'(s+3)-(s^2+2s+5)(s+3)'}{(s+3)^2}\right|_{s=-5}$$

$$= \left.\frac{(2s+2)(s+3)-(s^2+2s+5)}{(s+3)^2}\right|_{s=-5} =$$

$$= \frac{(-10+2)(-5+3)-(25-10+5)}{(-5+3)^2} =$$

$$= \frac{-8(-2)-20}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$H(s) = \frac{2}{s+3} + \frac{-10}{(s+5)^2} + \frac{-1}{s+5}$$

(i) $\sigma < -5$: $h(t) = -2e^{-3t}u(-t) + 10te^{-5t}u(-t) + e^{-5t}u(-t)$

(ii) $-5 < \sigma < -3$: $h(t) = -2e^{-3t}u(-t) - 10te^{-5t}u(t) - e^{-5t}u(t)$

(iii) $\sigma > -3$: $h(t) = 2e^{-3t}u(t) - 10te^{-5t}u(t) - e^{-5t}u(t)$

(γ) αιτιατό + ευσταθές $\Rightarrow$ δεξιόπλευρο + ROC περιλαμβάνει τον άξονα των φανταστικών

Άρα $\sigma > -3$

$h(t) \to$ (iii) $2e^{-3t}u(t) - 10te^{-5t}u(t) - e^{-5t}u(t)$

(δ) Υπάρχει ο μετασχ. Fourier. Άρα ίδιο με γ.

(ε) $Y(s) = H(s)X(s) = \dfrac{s^2+2s+5}{(s+3)(s+5)^2} \cdot \dfrac{1}{s} =$

$= \dfrac{A}{s+3} + \dfrac{B}{(s+5)^2} + \dfrac{\Gamma}{s+5} + \dfrac{\Delta}{s}$

$$A = \left.\frac{s^2+2s+5}{\cancel{(s+3)}(s+5)^2 \cdot s}\right|_{s=-3} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

$$B = \left.\frac{s^2+2s+5}{(s+3)\cancel{(s+5)^2} \cdot s}\right|_{s=-5} = \frac{-10}{-5} = 2$$

$$\Gamma = \left.\frac{d}{ds}\left\{\frac{s^2+2s+5}{(s+3)(s+5)^2 s}\right.\right|_{s=-5} = \left.\frac{d}{ds}\left\{\frac{s^2+2s+5}{s^2+3s}\right.\right|_{s=-5}$$

$$= \frac{(s^2+2s+5)'(s^2+3s) - (s^2+2s+5)(s^2+3s)'}{(s^2+3s)^2} =$$

$$= \frac{(2s+2)(s^2+3s) - (s^2+2s+5)(2s+3)}{(s^2+3s)^2}\Bigg|_{s=-5}$$

$$= \frac{-8(25-15) - (25-10+5)(-10+3)}{(25-15)^2} = \frac{-80-20(-7)}{10^2}$$

$$= \frac{6\cancel{0}}{10\cancel{0}} = \frac{3}{5} \qquad \Delta = \frac{s^2+2s+5}{(s+3)(s+5)^2\cancel{s}}\Bigg|_{s=0} = \frac{5}{3 \cdot 25} =$$

$$= \frac{5}{75} = \frac{1}{15}$$ Επειδή η είσοδος είναι $x(t)=u(t)$, ROC : $\sigma > 0$ οπότε :

$$y(t) = -\frac{2}{3}e^{-3t}u(t) + 2te^{-5t}u(t) + \frac{3}{5}e^{-5t}u(t) + \frac{1}{15}u(t)$$

(στ) $h(0^+) \underset{\text{αρχικής τιμής}}{\overset{\text{θεώρημα}}{=\!=\!=}} \lim_{s\to+\infty} sH(s) =$

$$= \lim_{s\to+\infty} s\frac{s^2+2s+5}{(s+3)(s+5)^2} = \lim_{s\to+\infty}\frac{s^3+2s^2+5s}{(s+3)(s^2+10s+25)} =$$

$$= \lim_{s\to+\infty}\frac{s^3+2s^2+5s}{s^3+13s^2+55s+75} =$$

$$= \lim_{s\to+\infty}\frac{(s^3+2s^2+5s)'}{(s^3+13s^2+55s+75)'} = \lim_{s\to+\infty}\frac{3s^2+4s+5}{3s^2+13s+55}$$

$$= \dots = \lim_{s\to+\infty}\frac{6s+4}{6s+13} = \dots = \lim_{s\to+\infty} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\lim_{t\to+\infty} h(t) = \lim_{s\to 0} sH(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s\cdot(s^2+2s+5)}{(s+3)(s+5)^2} = \frac{0}{3\cdot 25} = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 4: Μετασχ. Laplace και Διαφορικές Εξισώσεις

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = x(t)$$

(a) Αρχικά θεωρούμε μηδενικές συνθήκες:

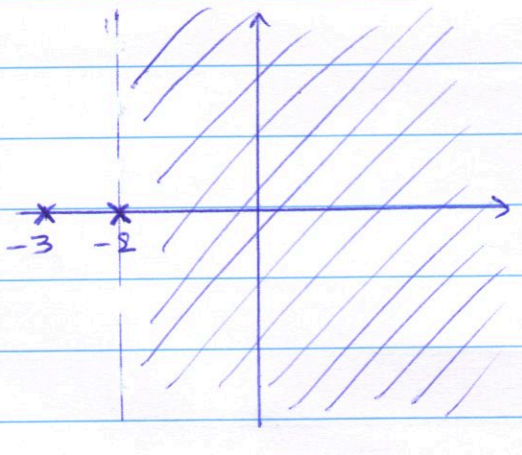
$$s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0) + 5(sY(s) - y(0^-)) + 6Y(s) = X(s)$$

$$s^2Y(s) + 5sY(s) + 6Y(s) = X(s)$$

$$Y(s)(s^2+5s+6) = X(s)$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2+5s+6} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

(B) σύστημα αιτιατό. Επομένως



(γ) $H(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$

$A = \left.\frac{1}{(s+2)(s+3)}\right|_{s=-2} = 1$

$B = \left.\frac{1}{(s+2)(s+3)}\right|_{s=-3} = -1$

$H(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{-1}{s+3}, \quad \sigma > -2$

$h(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t)$

(δ) $x(t) = 60e^{-2t}u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{60}{s+2}, \quad \sigma > -2$

$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{60}{(s+2)^2} - \frac{60}{(s+2)(s+3)} =$

$= \frac{60}{(s+2)^2} + \frac{A'}{s+2} + \frac{B'}{s+3} = \frac{60}{(s+2)^2} + \frac{-60}{s+2} + \frac{60}{s+3}$

$A' = \left.\frac{-60}{(s+2)(s+3)}\right|_{s=-2} = -60$

(γ) $H(s) = \dfrac{A}{s+2} + \dfrac{B}{s+3}$

$$A = \left.\frac{1}{\cancel{(s+2)}(s+3)}\right|_{s=-2} = 1$$

$$B = \left.\frac{1}{(s+2)\cancel{(s+3)}}\right|_{s=-3} = -1$$

$$H(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{-1}{s+3} \quad , \quad \sigma > -2$$

$$h(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t)$$

(δ) $x(t) = 60\, e^{-2t} u(t) \longleftrightarrow X(s) = \dfrac{60}{s+2} \quad , \sigma > -2$

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{60}{(s+2)^2} - \frac{60}{(s+2)(s+3)} =$$

$$= \frac{60}{(s+2)^2} + \frac{A'}{s+2} + \frac{B'}{s+3} = \frac{60}{(s+2)^2} + \frac{-60}{s+2} + \frac{60}{s+3}$$

$$A' = \left.\frac{-60}{\cancel{(s+2)}(s+3)}\right|_{s=-2} = -60$$

$$B' = \left. \frac{-60}{(s+2)(s+3)} \right|_{s=-3} = 60$$

$$y(t) = 60te^{-2t}u(t) - 60e^{-2t}u(t) + 60e^{-3t}u(t)$$

(ε) $s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 5(sY(s) - y(0^-)) + 6Y(s) = X(s)$

$$\left.\begin{aligned} & s^2Y(s) - s + 5sY(s) - 5 + 6Y(s) = X(s) \\ & X(s) = \frac{60}{s+2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$s^2Y(s) - s + 5sY(s) - 5 + 6Y(s) = \frac{60}{s+2} \Rightarrow$$

$$Y(s)(s^2 + 5s + 6) = \frac{60}{s+2} + s + 5$$

$$Y(s) = \frac{\frac{60}{s+2} + s + 5}{s^2 + 5s + 6} = \frac{60 + (s+5)(s+2)}{(s+2)(s+2)(s+3)} =$$

$$= \frac{s^2 + 7s + 70}{(s+2)^2(s+3)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{\Gamma}{s+2}$$

$$A = \left. \frac{s^2 + 7s + 70}{(s+2)^2(s+3)} \right|_{s=-3} = \frac{9 - 21 + 70}{1} = 58$$

$$B = \left.\frac{s^2+7s+70}{(s+2)^2\,(s+3)}\right|_{s=-2} = \frac{4-14+70}{1} = 60$$

$$\Gamma = \frac{d}{ds}\left\{\frac{s^2+7s+70}{(s+2)^2(s+3)}\right\}\Bigg|_{s=-2} = \left.\frac{(2s+7)(s+3)-(s^2+7s+70)}{(s+3)^2}\right|_{s=-2}$$

$$= \frac{3\cdot 1-(4-14+70)}{1} = -57$$

$$Y(s) = \frac{58}{s+3} + \frac{60}{(s+2)^2} - \frac{57}{s+2}$$

$$y(t) = 58\,e^{-3t}u(t) + 60t\cdot e^{-2t}u(t) - 57\,e^{-2t}u(t)$$

ΑΣΚΗΣΗ 5: Μετασχ. Laplace και Αντίστροφα Συστήματα-I

(α) $H(s)\cdot H_{inv}(s) = 1$

$$H_{inv}(s) = \frac{1}{H(s)}$$

(β) Θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες

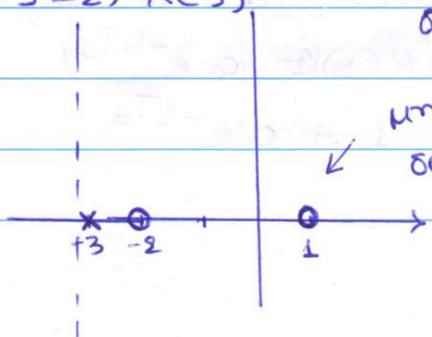
$$sY(s) + 3Y(s) = s^2X(s) + sX(s) - 2X(s)$$

$$Y(s)\,(s+3) = (s^2+s-2)\,X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2+s-2}{s+3}$$

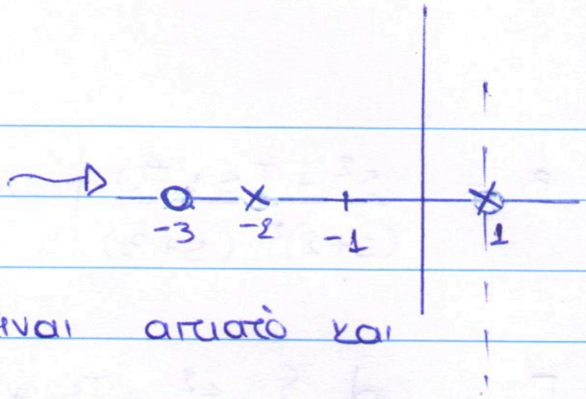
$$H(s) = \frac{s^2+s-2}{s+3}$$

$\underline{\sigma > -3}$



μηδενικό στο δεξί ημιεπίπεδο

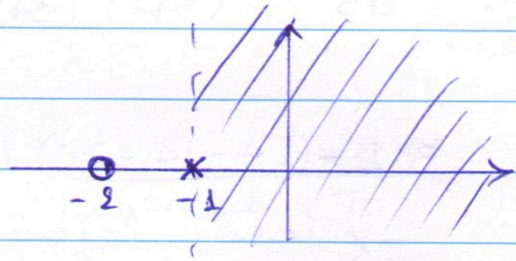
$$H_{inv}(s) = \frac{s+3}{s^2+s-2} = \frac{s+3}{(s-1)(s+2)}$$ $\longrightarrow$



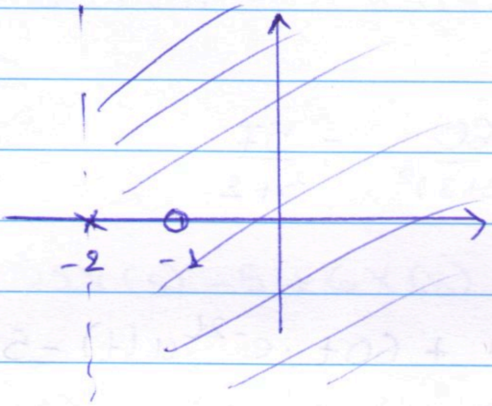
Το αντίστροφο σύστημα δεν είναι αιτιατό και ευσταθές.

(γ) $H(s) = \dfrac{s+2}{s+1}$ αιτιατό

$\sigma > -1$



$$H_{inv} = \frac{s+1}{s+2}$$



$\sigma > -2$

Το $H(s)$ είναι σύστημα ελάχιστης φάσης διότι πόλοι και μηδενικά στο αριστερό ημιεπίπεδο. Άρα θα έχει αντίστροφο H_{inv} σύστημα αιτιατό και ευσταθές. Επομένως $\sigma > -2$

ΑΣΚΗΣΗ 6: Μετασχ. Laplace και Αντίστροφα Συστήματα - ΙΙ

(a) $y(t) = x(t) + a x(t - T_d)$

$Y(s) = X(s) + a\, X(s) \cdot e^{-sT_d}$

$Y(s) = X(s)(1 + a e^{-sT_d})$

$H(s) = 1 + a e^{-sT_d}$

(β) $H(s)\,H_{inv}(s) = 1 \Rightarrow H_{inv}(s) = \dfrac{1}{1+ae^{-sT_d}}$

(γ) $H_{inv}(s) = \dfrac{1}{1-(-ae^{-sT_d})}$ θέτω $\lambda = -ae^{-sT_d}$

- $\dfrac{1}{1-\lambda} \overset{\lambda<1}{=\!=} \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n$

- αν $\lambda > 1$

$$\frac{1}{1-\lambda} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}-1} = \frac{-\frac{1}{\lambda}}{1-\frac{1}{\lambda}} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n}\lambda^{-1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-(n+1)}$$ όπου $\frac{1}{\lambda} < 1$

$$H_{inv} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} (-ae^{-sT_d})^n, & (|-ae^{-sT_d}|) < 1 \Rightarrow |a| < 1 \\ -\sum_{n=0}^{+\infty} (-ae^{-sT_d})^{-(n+1)} =, & (|ae^{-sT_d}|) > 1 \Rightarrow |a| > 1 \end{cases}$$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} (-ae^{-sT_d})^{-n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(-ae^{-sT_d})^n}$$

$$H_{mv} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-a \cdot e^{-sT_d}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-a)^n e^{-sT_d n} \\ -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(-a)^n e^{-sT_d n}} \end{cases}$$

$$n=0 \quad : \quad 1 - a e^{-sT_d} + a^2 e^{-2sT_d} + \cdots$$

$$\delta(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-a)^n \, \delta(t - nT_d) \quad , |a|<1$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-a)^{-n} \, \delta(t + nT_d) \quad , |a|>1$$