ΗΥ215: 5η Σειρά Ασκήσεων

Δευτέρα Τρίτη 29 Απριλίου 2014

Παράδοση: Πέμπτη 15 Μαΐου 2014

Απορίες: hy215-list@csd.uoc.gr

1. **Ιδιότητες Στατιστικής Συνάρτησης Αυτοσυσχέτισης**

   Αποδείξτε τις δυο ακόλουθες ιδιότητες της στατιστικής συνάρτησης αυτοσυσχέτισης:

   (α') Αν η $X(t)$ έχει μια σταθερή συνιστώσα ίση με A, τότε η στατιστική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης θα έχει μια σταθερή συνιστώσα ίση με A^2.

   (β') Αν η $X(t)$ έχει μια ημιτονοειδή συνιστώσα, τότε η στατιστική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης θα έχει επίσης μια ημιτονοειδή συνιστώσα, με ίδια συχνότητα.

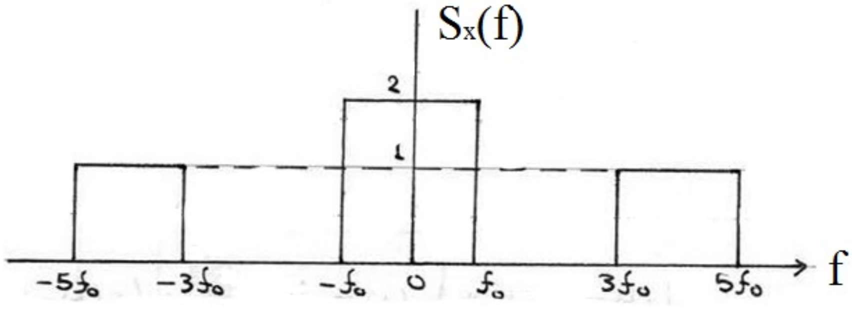
   <u>Βοήθεια:</u>

   (α') Εκφράστε την $X(t)$ ως $X(t) = A + Y(t)$, με $Y(t)$ μια τυχαία διαδικασία με μέση τιμή 0.

   (β') Εκφράστε την $X(t)$ ως $X(t) = A\cos(2\pi f t + \theta) + Z(t)$, με $Z(t)$ μια τυχαία διαδικασία, $A\cos(2\pi f t + \theta)$ η ημιτονοειδής συνιστώσα της $X(t)$, και θ μια τυχαία φάση.

2. **Στάσιμη με την ευρεία έννοια τυχαία διαδικασία - Ι**

   Έστω μια στασιμη με την ευρεια έννοια τυχαία διαδικασία $X(t)$ με Φασματική Πυκνότητα Ισχύος $S_x(f)$, οπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Να βρεθεί η στατιστική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_x(\tau)$ της $X(t)$.



Σχήμα 1: Φασματική Πυκνότητα Ισχύος στάσιμης με την ευρεία έννοια διαδικασίας Άσκησης 2.

<u>Απάντηση:</u>

$$R_x(\tau) = \frac{8}{T_0} sinc\Big(\frac{2\tau}{T_0}\Big)\cos^2\Big(\frac{4\pi\tau}{T_0}\Big)$$

$$\Bigg(\text{ή αλλιώς } R_x(\tau) = \frac{10}{T_0} sinc\Big(\frac{10\tau}{T_0}\Big) - \frac{6}{T_0} sinc\Big(\frac{6\tau}{T_0}\Big) + \frac{4}{T_0} sinc\Big(\frac{2\tau}{T_0}\Big)\Bigg)$$

3. **Στάσιμη με την ευρεία έννοια τυχαία διαδικασία - II**

   Έστω τυχαία διαδικασία $X(t)$ που δίνεται από τη σχέση

$$X(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

   όπου ω και θ είναι σταθερές και A είναι τυχαία μεταβλητή αγνώστου κατανομής. Να διερευνηθεί αν η $X(t)$ ειναι στασιμη με την ευρεία έννοια.

4. **Στάσιμη με την ευρεία έννοια τυχαία διαδικασία - III**

   Έστω η τυχαία διαδικασία

$$Y(t) = AX(t)\cos(2\pi f_c t + \theta)$$

   με $X(t)$ επίσης τυχαία διαδικασία, στάσιμη με την ευρεία έννοια, με $E[X(t)] = 0$, αυτοσυσχέτιση $R_x(\tau)$ και φάσμα ισχύος $\Phi_x(f)$. Το πλάτος A και η συχνότητα f_c είναι σταθερές, και η φάση θ είναι τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 2\pi)$. Αν $X(t)$ και θ είναι στατιστικά ανεξάρτητες μεταξύ τους, να βρεθούν:

   (α΄) Η μέση τιμή $E[Y(t)]$

   (β΄) Η στατιστική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_y(\tau)$

   (γ΄) Η φασματική πυκνότητα ισχυος $\Phi_y(f)$

   Απάντηση:

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \frac{A^2}{2} R_x(\tau)\cos(2\pi f_c \tau) \\ \Phi_y(f) &= \frac{A^2}{4}\Phi_x(f - f_c) + \frac{A^2}{4}\Phi_x(f + f_c) \end{aligned}$$

5. **Στάσιμη με την ευρεία έννοια τυχαία διαδικασία - IV**

   Να δειξετε ότι αν η $X(t)$ είναι στάσιμη με την ευρεία έννοια, τότε

$$E\Big[\big(X(t+\tau) - X(t)\big)^2\Big] = 2(R_x(0) - R_x(\tau))$$

   όπου $R_x(\tau)$ ειναι η στατιστική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της $X(t)$.

6. **Στατιστική Ετεροσυσχέτιση**

   Δυο τυχαίες διαδικασίες $X(t), Y(t)$ δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} X(t) &= A\cos(2\pi f t + \theta) \\ Y(t) &= A\sin(2\pi f t + \theta) \end{aligned}$$

όπου A και f είναι σταθερές, και θ είναι μια τυχαία μεταβλητή, ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0, 2\pi)$. Να βρεθεί η στατιστική συνάρτηση ετεροσυσχέτισης των $X(t), Y(t)$, που δίνεται ως

$$R_{xy}(t, t+\tau) = E[X(t)Y(t+\tau)]$$

να δείξετε ότι εξαρτάται μόνο από το τ, και να δειχθεί ότι $R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau)$.

7. **Εργοδικότητα**

   Έστω η τυχαία διαδικασία

$$X(t) = \sum_k A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k)$$

   με ϕ_k τυχαια μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[-\pi, \pi)$. Τα A_k, f_k θεωρούνται σταθερά. Να δείξετε οτι:

   (α′) η $X(t)$ είναι στάσιμη με την ευρεία έννοια.

   (β′) η $X(t)$ είναι εργοδική.

   (γ′) η φασματική πυκνότητα ισχυος της διαδικασίας $X(t)$ είναι

$$\Phi_x(f) = \sum_k \frac{A_k^2}{4}\Big(\delta(f - f_k) + \delta(f + f_k)\Big)$$

   Χρησιμες ίσως σας φανούν οι ταυτότητες

$$\begin{aligned}
\cos(\theta)\cos(\phi) &= \frac{1}{2}\Big(\cos(\theta-\phi) + \cos(\theta+\phi)\Big) \\
\sin(\theta) - \sin(\phi) &= 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)
\end{aligned}$$