ΗΥ215 – ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 5

Τυχαία σήματα

1η Άσκηση:

Αποδείξτε τις δύο ακόλουθες ιδιότητες της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης:

α) Αν $X(t)$ έχει DC συνιστώσα ίση με A, τότε η $R_X(\tau)$ θα έχει μια σταθερή συνιστώσα ίση με A^2.

β) Αν $X(t)$ έχει μια ημιτονοειδή συνιστώσα, τότε η $R_X(\tau)$ θα έχει επίσης μια ημιτονοειδή συνιστώσα της ίδιας συχνότητας.

Λύση: α) Έστω $X(t) = A + Y(t)$, όπου A σταθερά και $Y(t)$ μια τυχαία διαδικασία με μέση τιμή 0. Είναι:

$$
\begin{aligned}
R_X(\tau) &= E[X(t+\tau)X(t)] = E[(A+Y(t+\tau))(A+Y(t))] = \\
&= E[A^2 + AY(t) + AY(t+\tau) + Y(t+\tau)Y(t)] = \\
&= A^2 + AE[Y(t)] + AE[Y(t+\tau)] + E[Y(t+\tau)Y(t)] = \\
&= A^2 + R_Y(\tau).
\end{aligned}
$$

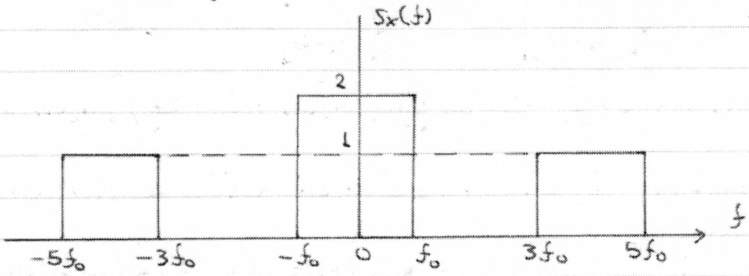
β) Έστω $X(t) = A\cos(2\pi f t + \theta) + Z(t)$, με $A\cos(2\pi f t + \theta)$ η ημιτονοειδής συνιστώσα της $X(t)$ και θ μια τυχαία φάση.

Είναι:

$$
\begin{aligned}
R_X(\tau) &= E[X(t+\tau)X(t)] = E[A^2\cos(2\pi f t + 2\pi f\tau + \theta)\cos(2\pi f t + \theta)] \\
&+ E[Z(t+\tau)A\cos(2\pi f t + \theta)] + E[A\cos(2\pi f t + 2\pi f \tau + \theta)Z(t)] \\
&+ E[Z(t+\tau)Z(t)] = \\
&= \frac{A^2}{2}\cos 2\pi f\tau + R_Z(\tau) + E[\ldots] + E[\ldots].
\end{aligned}
$$

9η Άσκηση:

Έστω μια στάσιμη με την ευρεία έννοια τυχαία διαδικασία $X(t)$ με $S_x(f)$, όπως φαίνεται παρακάτω:



Να βρεθεί η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_x(\tau)$ της $X(t)$.

Λύση: Είναι $S_x(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f-4f_0}{2f_0}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f+4f_0}{2f_0}\right) + 2\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right)$

$$\xrightarrow{F^{-1}} R_x(\tau) = 2f_0\,\mathrm{sinc}(2f_0\tau)e^{-j2\pi4f_0\tau} + 2f_0\,\mathrm{sinc}(2f_0\tau)\,e^{j2\pi4f_0\tau} +$$

$$+ 2\cdot 2f_0\,\mathrm{sinc}(2f_0\tau) =$$
$$= 2f_0\,\mathrm{sinc}(2f_0\tau)\left(e^{-j2\pi4f_0\tau} + e^{j2\pi4f_0\tau}\right) + 4f_0\,\mathrm{sinc}(2f_0\tau) =$$
$$= 2f_0\,\mathrm{sinc}(2f_0\tau)\,2\cos(2\pi4f_0\tau) + 4f_0\,\mathrm{sinc}(2f_0\tau) =$$
$$= 4f_0\,\mathrm{sinc}(2f_0\tau)\left(\cos(2\pi4f_0\tau) + 1\right) =$$
$$= 4f_0\,\mathrm{sinc}(2f_0\tau)\cdot 2\cos^2(4\pi f_0\tau) =$$
$$= 8f_0\,\mathrm{sinc}(2f_0\tau)\cos^2(4\pi f_0\tau)$$

Αλλιώς: $S_x(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{10f_0}\right) - \mathrm{rect}\left(\frac{f}{6f_0}\right) + 2\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right) \xrightarrow{F^{-1}}$

$$\xrightarrow{F^{-1}} R_x(\tau) = 10f_0\,\mathrm{sinc}(10f_0\tau) - 6f_0\,\mathrm{sinc}(6f_0\tau) + 2\cdot 2f_0\,\mathrm{sinc}(2f_0\tau) =$$
$$= 10f_0\,\mathrm{sinc}(10f_0\tau) - 6f_0\,\mathrm{sinc}(6f_0\tau) + 4f_0\,\mathrm{sinc}(2f_0\tau).$$

Άσκηση 3: Έστω τυχαία διαδικασία $X(t)$ που δίνεται από την:

$$X(t) = A\cos(\omega t + \theta),$$

όπου ω και θ είναι σταθερές και A είναι τυχαία μεταβλητή. Να διερευνηθεί αν η $X(t)$ είναι WSS.

Λύση: Είναι $E[X(t)] = E[A\cos(\omega t+\theta)] = \cos(\omega t+\theta)\,E[A]$.
Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι η $E[X(t)]$ δεν είναι σταθερή εκτός αν $E[A]=0$.
Επίσης, $R_X(t,t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = E[A^2\cos(\omega t+\theta)\cos(\omega(t+\tau)+\theta)] =$
$= \frac{1}{2}\left[\cos\omega\tau + \cos(2\omega t + 2\theta + \omega\tau)\right]E[A^2]$. Βλέπουμε ότι η αυτοσυσχέτιση της $X(t)$ δεν είναι συνάρτηση μόνο της χρονικής διαφοράς τ, άρα η διεργασία δεν είναι WSS.

Άσκηση 4. Έστω η τυχαία διαδικασία $Y(t) = AX(t)\cos(\omega_c t+\theta)$, με $X(t)$ τυχαία διαδικασία, στάσιμη, με $E[X(t)]=0$, αυτοσυσχέτιση $R_X(\tau)$ και φάσμα ισχύος $\Phi_X(f)$. Το πλάτος A και η συχνότητα ω_c είναι σταθερές, και η φάση θ είναι τυχαία μεταβλητή με ομοιογενή κατανομή στο $[0,2\pi)$. Αν $X(t)$ και θ είναι ανεξάρτητες, να βρεθεί:

α) $E[Y(t)] = ?$ β) $R_Y(\tau) = ?$ γ) $\Phi_Y(f) = ?$

Λύση: α) $E[Y(t)] = E[AX(t)\cos(\omega_c t+\theta)] \overset{\text{ανεξ}}{=} A E[X(t)]\cdot E[\cos(\omega_c t+\theta)] =$
$= 0$, επειδή $X(t)$, θ ανεξάρτητες.
β) $R_Y(\tau) = E[Y(t)Y(t+\tau)] = E[A^2X(t)X(t+\tau)\cos(\omega_c t+\theta)\cos(\omega_c(t+\tau)+\theta)] =$
$= \frac{A^2}{2}E[X(t)X(t+\tau)]\,E[\cos(\omega_c\tau) + \cos(2\omega_c t + \omega_c\tau + 2\theta)] =$

$= \frac{A^2}{2} R_x(\tau)\cos(\omega_c\tau) = R_Y(\tau)$. Επειδή η μέση τιμή είναι σταθερή και η αυτοσυσχέτιση της $Y(t)$ εξαρτάται μόνο από τη χρονική διαφορά τ, η $Y(t)$ είναι WSS.

γ) Είναι $\Phi_Y(f) = F\{R_Y(\tau)\} = \frac{A^2}{2} F\{R_X(\tau)\cos\omega_c\tau\} =$

$= \frac{A^2}{2} F\{R_X(\tau)\} * F\{\cos(\omega_c\tau)\} = \frac{A^2}{2}\Phi_X(f) * \left(\frac{1}{2}\delta(f-f_c) + \frac{1}{2}\delta(f+f_c)\right)$

$= \frac{A^2}{4}\Phi_X(f-f_c) + \frac{A^2}{4}\Phi_X(f+f_c)$.

Άσκηση 6: Δυο τυχαίες διαδικασίες $X(t), Y(t)$ δίνονται από τις:

$$X(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$
$$Y(t) = A\sin(\omega t + \theta)$$

όπου A και ω είναι σταθερές και θ είναι τυχαία μεταβλητή, ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0, 2\pi)$. Να βρεθεί η στατιστική ετεροσυσχέτιση των $X(t), Y(t)$ και να δειχθεί ότι:

$$R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau).$$

Λύση: Είναι $R_{XY}(t, t+\tau) = E[X(t)Y(t+\tau)] =$

$= E[A^2\cos(\omega t+\theta)\sin(\omega(t+\tau)+\theta)] =$

$= \frac{A^2}{2} E[\sin(2\omega t + \omega\tau + 2\theta) - \sin(-\omega\tau)] =$

$= \frac{A^2}{2}\sin\omega\tau = R_{XY}(\tau)$. (1)

Επίσης, $R_{YX}(t, t+\tau) = E[Y(t)X(t+\tau)] =$

$= E[A^2\sin(\omega t+\theta)\cos(\omega(t+\tau)+\theta)] =$

$= \frac{A^2}{2} E[\sin(2\omega t + \omega\tau + 2\theta) + \sin(-\omega\tau)] =$

$= -\frac{A^2}{2}\sin\omega\tau = R_{YX}(\tau)$ (2).

Από (1), (2), βλέπουμε ότι ισχύει $R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau)$.

Άσκηση 6 : Να δείξετε ότι αν η $X(t)$ είναι WSS, τότε:

$$E[[X(t+\tau)-X(t)]^2] = 2[R_{xx}(0)-R_{xx}(\tau)],$$

όπου $R_{xx}(\tau)$ είναι η αυτοσυσχέτιση της $X(t)$.

Λύση: Είναι $E[[X(t+\tau)-X(t)]^2] =$

$= E[X^2(t+\tau) - 2X(t+\tau)X(t) + X^2(t)] =$

$= E[X^2(t+\tau)] - 2E[X(t+\tau)X(t)] + E[X^2(t)]$ (1)

Γνωρίζουμε ότι $E[X(t+\tau)X(t)] = R_x(\tau)$. Για $\tau=0$, έχουμε ότι $R_x(0) = E[X^2(t)]$. (2).

Η (1) $\xrightarrow{(2)} E[[X(t+\tau)-X(t)]^2] = R_x(0) - 2R_x(\tau) + R_x(0) =$

$= 2R_x(0) - 2R_x(\tau) = 2(R_x(0)-R_x(\tau)).$

Άσκηση 7 : Έστω η τυχαία διαδικασία $x(t) = \sum_k A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$, με φ_k τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[-\pi,\pi)$. Τα A_k, ω_k θεωρούνται δεδομένα (σταθερά).

α) Ν.δ.ο η $x(t)$ είναι στάσιμη $2^{ης}$ τάξης.

β) Ν.δ.ο η $x(t)$ είναι εργοδική.

γ) Ποιά η φασματική πυκνότητα ισχύος της διαδικασίας;

Λύση: α) Για να είναι στάσιμη $2^{ης}$ τάξης, πρέπει να ισχύουν:

$E[x(t)] = c \in \mathbb{R}$ κ' $R_x(t_1,t_2) = R_x(|t_1-t_2|) = R_x(\tau)$.

Είναι $E[x(t)] = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_k A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)\frac{1}{2\pi}\,d\varphi_k = \sum_k A_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_k t+\varphi_k)\,d\varphi_k =$

$= \sum_k A_k \cdot 0 = 0$, γιατί $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(a+x)\,dx = 2\cos a \cdot \sin\pi = 0$.

$(*)_1: \cos\vartheta \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\cos(\vartheta-\varphi) + \cos(\vartheta+\varphi)\right).$

$(*)_2: \sin\vartheta - \sin\varphi = 2\cos\left(\frac{\vartheta+\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\vartheta-\varphi}{2}\right).$

Επίσης, $R(t_1,t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] = E\left[\sum_k A_k \cos(\omega_k t_1+\varphi_k) \sum_k A_k \cos(\omega_k t_2+\varphi_k)\right] =$

$= \sum_k A_k^2 E[\cos(\omega_k t_1+\varphi_k)\cos(\omega_k t_2+\varphi_k)] = (*)_1$

$= \sum_k \frac{A_k^2}{2}\left(E[\cos(\omega_k(t_1-t_2))] + \overset{\nearrow 0}{E[\cos(\omega_k(t_1+t_2)+2\varphi_k)]}\right) = (t_1-t_2=\tau)$

$= \sum_k \frac{A_k^2}{2}\cos(\omega_k\tau) = R_x(\tau).$

Άρα η διαδικασία είναι στάσιμη 2ης τάξης.

β) Για να είναι εργοδική, πρέπει $\bar{x} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt = E[x(t)] = 0$

κ' $\varphi_x(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau)\,dt = R_x(\tau) = \sum_k \frac{A_k^2}{2}\cos(\omega_k\tau).$

Είναι: $\bar{x} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_k A_k \frac{1}{\omega_k}\sin(\omega_k t+\varphi_k)\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = (*)_2$

$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_k \frac{A_k}{\omega_k} 2\cos\varphi_k \sin\left(\frac{\omega_k T}{2}\right) = \sum_k A_k\cdot 2\cos\varphi_k \cdot \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\frac{\sin\left(\frac{\omega_k T}{2}\right)}{\omega_k} =$

$= \sum_k A_k\cos\varphi_k \cdot \lim_{T\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\omega_k T}{2}\right)}{\frac{\omega_k T}{2}} = \sum_k A_k\cos\varphi_k \lim_{T\to\infty}\mathrm{sinc}(f_k T) = 0.$

Εντελώς ανάλογα, και με χρήση της $(*)_1$, αποδεικνύεται ότι:

$\varphi_x(\tau) = \sum_k \frac{A_k^2}{2}\cos(\omega_k\tau)$

γ) Η φασματική πυκνότητα ισχύος είναι $\Phi_x(f) = F\{\varphi_x(\tau)\} = F\{R_x(\tau)\} =$

$= F\left\{\sum_k \frac{A_k^2}{2}\cos(\omega_k\tau)\right\} = \sum_k \frac{A_k^2}{2} F\{\cos(\omega_k\tau)\} =$

$= \sum_k \frac{A_k^2}{2}\left(\frac{1}{2}\delta(f-f_k) + \frac{1}{2}\delta(f+f_k)\right) =$

$= \sum_k \frac{A_k^2}{4}\left(\delta(f-f_k) + \delta(f+f_k)\right).$