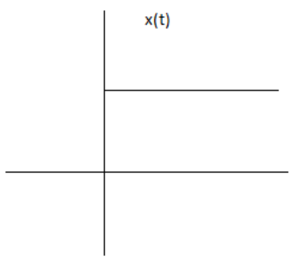
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

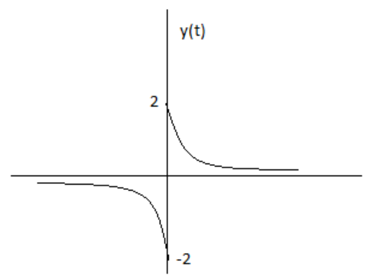
ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά Για Μηχανικούς - Εαρινό Εξάμηνο 2014
Διδάσκων: Ι. Στυλιανού

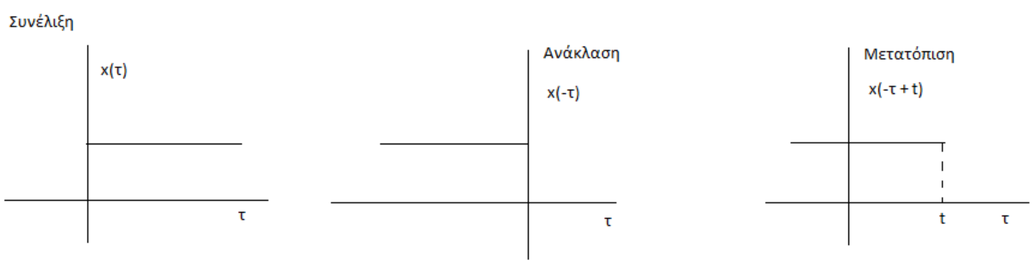
ΛΥΣΕΙΣ ΤΕΤΑΡΤΗΣ ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. **Συνέλιξη**

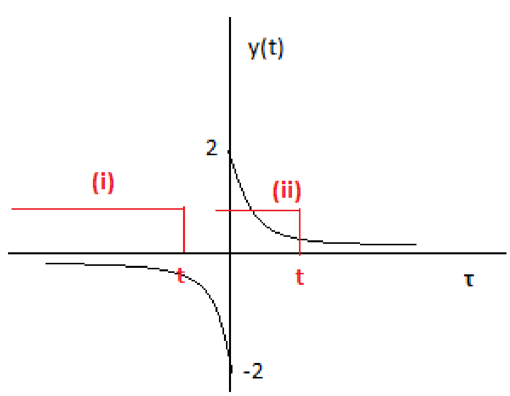
(α΄) Σχεδίαση σημάτων







Συνέλιξη



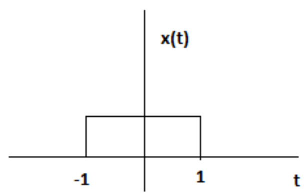
i.

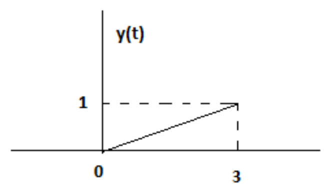
$$
\begin{aligned}
t<0: C_{xy} &= \int_{-\infty}^{t} 1(-2e^{2\tau}d\tau) = \left[-2\frac{1}{2}e^{2\tau}\right]_{-\infty}^{t} = \left[-e^{2\tau}\right]_{-\infty}^{t} \\
&= -e^{2t} + \lim_{t\to-\infty} e^{2t} = -e^{2t}
\end{aligned}
$$

ii.

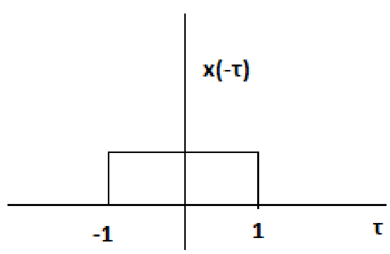
$$
\begin{aligned}
t\geq 0: C_{xy} &= \int_{-\infty}^{0} -2e^{2\tau}d\tau + \int_{0}^{t} 2e^{-\tau}d\tau = \left[-e^{2t}\right]_{t=0} + \left[\frac{2}{-1}e^{-\tau}\right]_{0}^{t} = -e^{0} - 2e^{-t} + 2e^{0} \\
&= -1 - 2e^{-t} + 2 = 1 - 2e^{-t}
\end{aligned}
$$

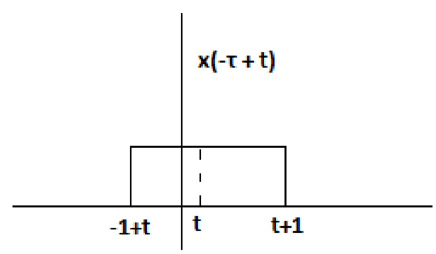
(β′) Σχεδίαση των σημάτων

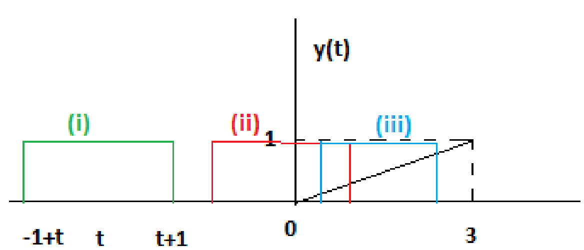




Συνέλιξη







i.

$$t+1<0 \rightarrow t<-1$$
$$C_{xy}=0$$

ii.

$$\left.\begin{array}{r}-1+t \leq 0, \\ t+1>0,\end{array}\right\} \quad -1<t \leq 1$$

$$C_{xy} = \int_0^{t+1} 1\frac{1}{3}\tau d\tau = \left[\frac{1}{6}\tau^2\right]_0^{t+1} = \frac{1}{6}(t+1)^2$$

iii.

$$\left.\begin{array}{r}-1+t>0, \\ t+1 \leq 3,\end{array}\right\} \quad -1<t \leq 2$$

$$C_{xy} = \int_{t-1}^{t+1} \frac{1}{3}\tau d\tau = \left[\frac{1}{6}\tau^2\right]_{t-1}^{t+1} = \frac{1}{6}\left[(t+1)^2-(t-1)^2\right] = \frac{1}{3}2t = \frac{2}{3}t$$

iv.

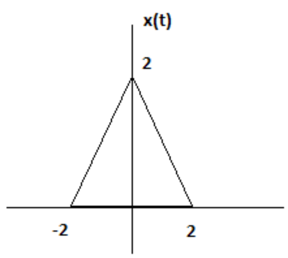
$$\left.\begin{array}{r}t+1>3, \\ t-1 \leq 3,\end{array}\right\} \quad 2<t \leq 4$$

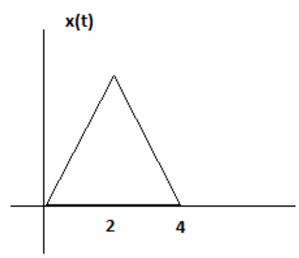
$$C_{xy} = \int_{t-1}^{3} \frac{1}{3}\tau d\tau = \left[\frac{1}{6}\tau^2\right]_{t-4}^{3} = -\frac{1}{6}(t-1)^2+\frac{9}{6} = \frac{3}{2}-\frac{1}{6}(t-1)^2$$

v.

$$C_{xy}=0, t-1>3 \rightarrow t>4$$

(γ') Σχεδίαση





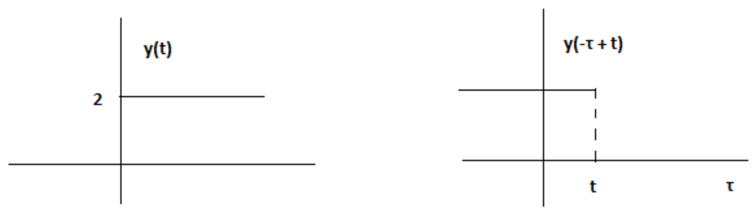
Συνέλιξη

i.

$$t \leq 0 \quad : \quad C_{xy}=0$$

ii.

$$0 \leq t \leq 2 \quad : \quad C_{xy}=\int_0^t \tau d\tau=\left[\frac{1}{2}\tau^2\right]_0^t=\frac{1}{2}t^2$$

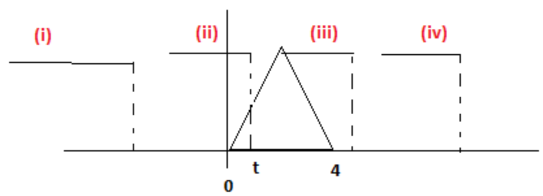


iii.

$$\begin{aligned} 2 < t \leq 4 : C_{xy} &= \int_0^2 \tau d\tau + \int_2^t (-\tau+4) d\tau = \left[\frac{1}{2}\tau^2\right]_0^2 - \left[\frac{1}{2}(-\tau+4)^2\right]_2^t \\ &= 2 - \frac{1}{2}(-t+4)^2 + \frac{1}{2}(-2+4)^2 = 4 - \frac{1}{2}(-t+4)^2 \end{aligned}$$

iv.

$$t > 4 \quad : \quad C_{xy} = \int_0^2 \tau d\tau + \int_2^4 (-\tau+4) d\tau = \left[4 - \frac{1}{2}(-t+4)^2\right]_{t=4} = 4$$



(δ′) Σχεδίαση

Συνέλιξη

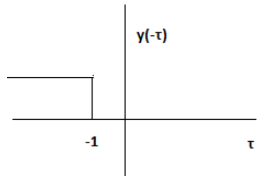
i.

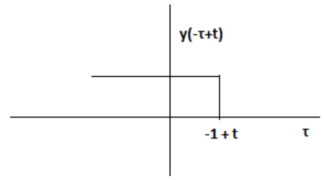
$$t \leq 3 : C_{xy} = \int_{-\infty}^{-1+t} 2(-1) d\tau = \left[-2 - \frac{1}{2}\tau\right]_{-\infty}^{-1+t} = -(t-1)^2 + \lim_{\tau \to -\infty} \tau = -\infty$$

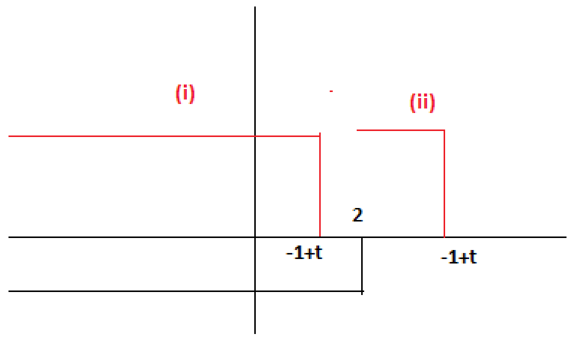
ii.

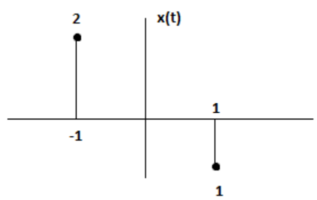
$$t > 3 : C_{xy} = \int_{-\infty}^{2} 2(-1) d\tau = [-2\tau]_{-\infty}^{2} = -4 + \lim_{\tau \to -\infty} \tau = -\infty$$

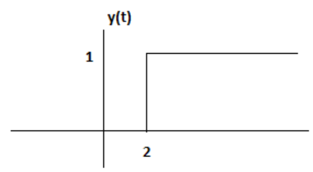
(ε′)



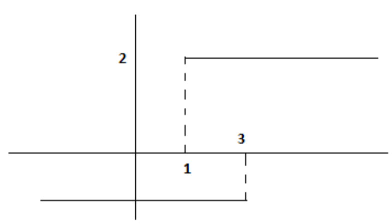






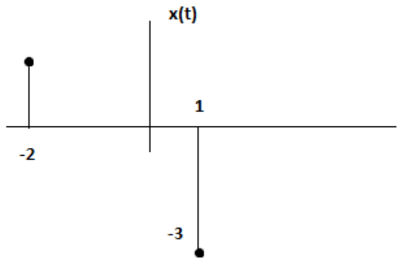


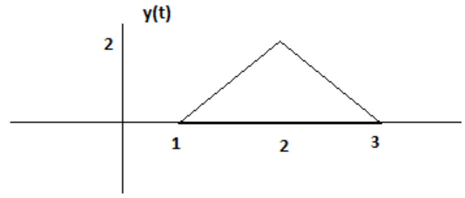
$$
\begin{aligned}
x(t) \star y(t) &= [2\delta(t+1) - \delta(t-1)] \star \epsilon(t-2) \\
&= 2\delta(t+1) \star \epsilon(t-2) - \delta(t-1) \star \epsilon(t-2) \\
&= 2\delta(t-(-1)) \star \epsilon(t-2) - \delta(t-1) \star \epsilon(t-2) \\
&= 2\epsilon(t-1) - \epsilon(t-3)
\end{aligned}
$$

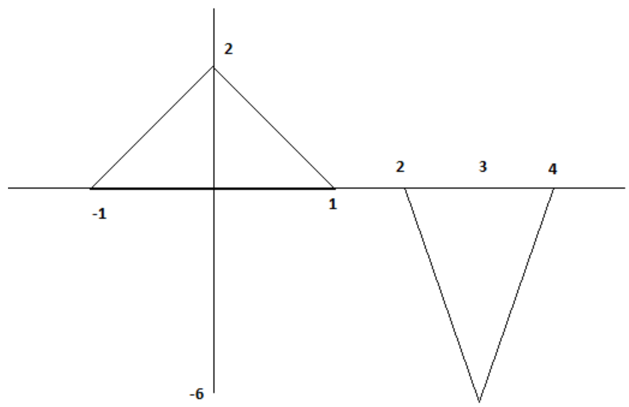


(F')

$$
\begin{aligned}
x(t) \star y(t) &= 2tri(t-2) \star \delta(t+2) + 2tri(t-2) \star (-3\delta(t-1)) \\
&= 2tri(t) - 6tri(t-3)
\end{aligned}
$$







2. **Συνέλιξη και Συστήματα**

$$h(t) = (2e^{-3t} - e^{-2t})\epsilon(t) = 2e^{-3t}\epsilon(t) - e^{-2t}\epsilon(t)$$

$$\begin{aligned} F\left\{h(t)\right\} =& H(f) = F\left\{2e^{-3t}\epsilon(t)\right\rangle + F\left\{-2^{-2t}\epsilon(t)\right\} \\ =& \frac{1}{3+j2\pi f} - \frac{1}{2+j2\pi f} \end{aligned}$$

(α΄)

$$x(t) = e^{-t}\epsilon(t) \to X(f) = \frac{1}{1+j2\pi f}$$

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

$$Y(f) = \left(\frac{1}{3+j2\pi f} - \frac{1}{2+j2\pi f}\right)\frac{1}{1+j2\pi f}$$

Θέτω $x = j2\pi f$

$$Y(x) = \left(\frac{2}{3+x} - \frac{1}{2+x}\right)\frac{1}{1+x} = \frac{2}{(3+x)(1+x)} - \frac{1}{(2+x)(1+x)}$$

- $$\frac{2}{(3+x)(1+x)} = \frac{A}{3+x} + \frac{B}{1+x}$$
  $$A = \frac{2}{(3+x)(1+x)}|_{x=-3} = \frac{2}{-1} = -1$$
  $$B = \frac{2}{(3+x)(1+x)}|_{x=-1} = \frac{2}{2} = 1$$

- $$\frac{1}{(2+x)(1+x)} = \frac{\Gamma}{2+x} + \frac{\Delta}{1+x}$$
  $$\Gamma = \frac{1}{(3+x)(1+x)}|_{x=-2} = \frac{1}{-1} = -1$$
  $$\Delta = \frac{1}{(3+x)(1+x)}|_{x=-1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$Y(x) = \frac{-1}{3+x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x} + \frac{1}{1+x}$$

Άρα
$$Y(t) = -e^{-3t}u(t) + e^{-1t}u(t) - e^{-2t}u(t) + e^{-t}u(t)$$

(β')

$$
\begin{aligned}
x(t) =& e^{-2t}u(t) \\
X(f) =& \frac{1}{2 + j2\pi f}
\end{aligned}
$$

Θέτω $x = j2\pi f$

$$
\begin{aligned}
Y(x) =& \frac{2}{(3+x)(2+x)} - \frac{1}{(2+x)^2} = \frac{2A}{3+x} + \frac{2B}{2+x} - \frac{1}{(2+x)^2} \\
A =& \frac{1}{(3+x)(2+x)}|_{x=-3} = -1 \\
B =& \frac{1}{(3+x)(2+x)}|x = -2 = 1 \\
Y(x) =& \frac{-2}{3+x} + \frac{2}{2+x} - \frac{1}{(2+x)^2} \\
y(t) =& -2e^{-3t}u(t) + 2e^{-2t}u(t) - te^{-2t}u(t)
\end{aligned}
$$

(γ')

$$x(t) = -\,e^t\epsilon(-t+1) = -e^t\epsilon(-(t-1)) = -e^{t-1}e\epsilon(-(t-1)) = e[-e^{t-1}\epsilon(-(t-1))]$$
$$F\left\{x(t)\right\} = -e\frac{1}{1-j2\pi f}e^{-j2\pi f}$$

Θέτω $x = j2\pi f$

$$\begin{aligned}
Y(x) =& -\,e\frac{1}{1-x}e^{-x}\left(\frac{2}{3+x}-\frac{1}{2+x}\right) = -ee^{-x}\left[\frac{2}{(3+x)(1-x)}-\frac{1}{(1-x)(2+x)}\right]\\
=& -\,ee^{-x}\left(\frac{A}{3+x}+\frac{B}{1-x}-\frac{\Gamma}{1-x}-\frac{\Delta}{2+x}\right)\\
A =& \frac{2}{(3+x)(1-x)}|_{x=-3} = \frac{1}{2}\\
B =& \frac{2}{(3+x)(1-x)|_{x=1}} = \frac{1}{2}\\
\Gamma =& \frac{1}{(1-x)(2+x)}|_{x=1} = \frac{1}{3}\\
\Delta =& \frac{1}{(1-x)(2+x)}|_{x=-2} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$Y(x) = \frac{-\frac{1}{2}ee^{-x}}{3+x}+\frac{-\frac{1}{2}ee^{-x}}{1-x}+\frac{\frac{1}{3}ee^{-x}}{1-x}+\frac{\frac{1}{3}ee^{-x}}{2+x}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
Y(f) =& -\,\frac{1}{2}e\frac{e^{-j2\pi f}}{3+j2\pi f}-\frac{1}{2}e\frac{e^{-j2\pi f}}{1-j2\pi f}+\frac{1}{3}e\frac{e^{-j2\pi f}}{1-j2\pi f}+\frac{1}{3}e\frac{e^{-j2\pi f}}{2+j2\pi f}\\
y(t) =& -\,\frac{1}{2}ee^{-3(t-1)}u(t-1)-\frac{1}{2}ee^{t-1}u(-t+1)+\frac{1}{3}ee^{t-1}u(-t+1)+\frac{1}{3}ee^{-2(t-1)}u(t-1)\\
=& -\,\frac{1}{2}e^{-3t+4}u(t-1)-\frac{1}{2}e^{t}u(-t+1)+\frac{1}{3}e^{t}u(-t+1)+\frac{1}{3}e^{-2t+3}u(t-1)
\end{aligned}$$

3. **Συσχέτιση - Ι**

(α') Είναι $x(t) = e^{-t}u(t)$ και $y(t) = e^{2t}u(-t)$

$\phi_{xy}(\tau) \leftrightarrow X(f)Y(-f)$ **(1)** ή $\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)y(t-\tau)dt$ **(2)**

Από την **(1)**:

$$\begin{aligned}
\tau < 0 \quad &: \quad \phi_{xy} = 0\\
\tau \geq 0 \quad &: \quad \int_0^\tau x^*(t)y(t-\tau)dt = \int_0^2 e^{-t}e^{2t}dt = \int_0^\tau e^t dt = [e^t]_0^\tau = e^\tau - 1
\end{aligned}$$

(β') Είναι $x(t) = \frac{1}{2}e^{-(t+2)}u(t+2)$ και $y(t) = 2rect\left(\frac{t-2}{2}\right)$

i.

$$\begin{aligned}
3+\tau < -2 \quad &\rightarrow \quad \tau < -5\\
\phi_{xy} \quad &= \quad 0
\end{aligned}$$

ii.

$$\left.\begin{array}{l}1+\tau<-2,\\ 3+\tau\geq -2,\end{array}\right\} \quad -5\leq\tau<-3$$

$$\phi_{xy} = \int_{-2}^{\tau+3} 2\frac{1}{2}e^{-(t+2)}dt = \left[\frac{1}{-1}e^{-(t+2)}\right]_{-2}^{\tau+3} = -e^{-(\tau+3+2)} + e^{-(-2+\tau)} = -e^{-(\tau+5)} + 1$$

iii.

$$\begin{aligned}\tau+1\geq -2 \quad &\rightarrow \quad \tau\geq -3\\ \phi_{xy} \quad &= \quad \int_{1+\tau}^{3+\tau} 2\frac{1}{2}e^{-(t+2)}dt = \left[-e^{-(t+2)}\right]_{1+\tau}^{3+\tau} = -e^{-(3+\tau+2)} + e^{-(1+\tau+2)}\\ &= \quad -e^{-(5+\tau)} + e^{-(3+\tau)}\end{aligned}$$

$$\phi_{xy} = \begin{cases} 0 & \tau<-5\\ -e^{-\tau}e^{-5}+1 & -5\leq\tau<-3\\ e^{-\tau}(e^{-3}-e{-}5) & \tau\geq -3.\end{cases}$$

4. **Συσχέτιση - II**

(α')

$$\begin{aligned}\phi_{xy} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)y(t+\tau)d\tau = F\{\phi_{xy}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)y(t+\tau)d\tau e^{-j2\pi ft}dt\\ \text{θέτω } t'=t+\tau \quad &\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)y(t')e^{-j2\pi f(t'-\tau)}d\tau dt' = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)e^{j2\pi f\tau}d\tau y(t')e^{-j2\pi ft'}dt'\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t')e^{-j2\pi ft'}dt' \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)e^{j2\pi f\tau}d\tau = Y(f)X^*(f)\end{aligned}$$

διότι

$$\begin{aligned}X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau\\ X^*(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)e^{j2\pi f\tau}d\tau\end{aligned}$$

(β')

$$\begin{aligned}\phi_{xy}(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)y(-t+\tau)d\tau\\ \phi_{xy}^*(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(-t+\tau)^*d\tau\\ \text{θέτω } t'=-t+\tau \quad &\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t'+t)y(t')dt' = \int_{-\infty}^{\infty} y(t')x(t'+t)dt' = \phi_{yx}(t)\end{aligned}$$

(γ')

$$\phi^*_{xy}(-t) = \phi_{yx}(t)$$

Παίρνω τα συζυγή των δύο μελών της εξίσωσης

$$\phi_{xy}(-t) = \phi^*_{yx}(t)$$

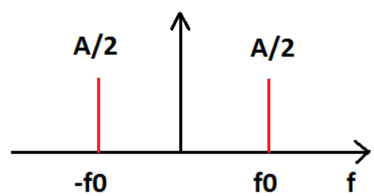
Θέτω όπου t το -t

$$\phi_{xy}(t) = \phi^*_{yx}(-t)$$

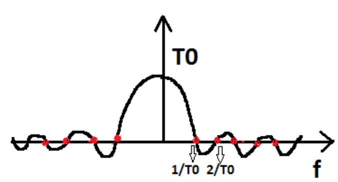
5. **Η Αρχή της Απροσδιοριστίας στην Ανάλυση Fourier**

(α')

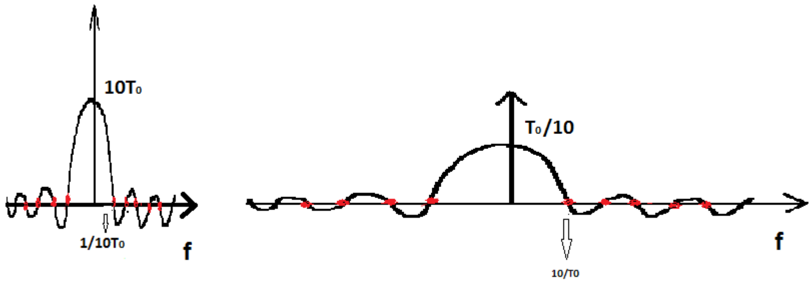
$$x(t) = Acos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} = \frac{A}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j2\pi f_0 t}$$



(β') $w(f) = rect\left(\frac{t}{T_0}\right) \leftrightarrow T_0 sinc(fT_0)$



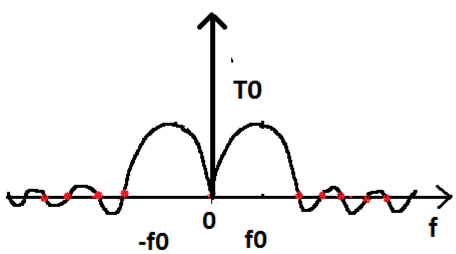
(γ') Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει η χρονική διάρκεια του παραθύρου, μειώνεται το εύρος ζώνης του κεντρικού λοβού στην συχνότητα (σχήμα αριστερά) ενώ όσο μικραίνει το χρονικό εύρος του παραθύρου αύξανει το συχνοτικό εύρος που καταλαμβάνει ο κεντρικός λοβός (σχήμα δεξιά).



(δ΄)

$$y(t) = Acos(2\pi f_0 t) rect\left(\frac{t}{T_0}\right) = w(t)\frac{A}{2}e^{-j2\pi f_0 t} + w(t)\frac{A}{2}e^{j2\pi f_0 t}$$

$$\begin{aligned} Y(f) =& \frac{A}{2}F\left\{w(t)e^{-j2\pi f_0 t}\right\} + \frac{A}{2}F\left\{w(t)e^{j2\pi f_0 t}\right\} \\ =& \frac{A}{2}W(f-f_0) + \frac{A}{2}W(f+f_0) \end{aligned}$$



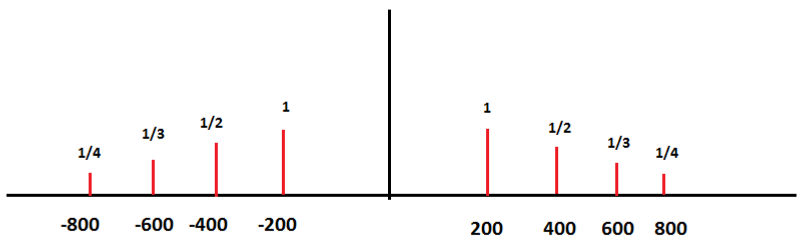
(ε΄)

$$\begin{aligned} X(f) * W(f) &= \frac{A}{2}\delta(f+f_0) * T_0 sinc(fT_0) + \frac{A}{2}\delta(f-f_0) * T_0 sinc(fT_0) \\ &= \frac{AT_0}{2}sinc(T_0(f-f_0)) + \frac{AT_0}{2}sinc(T_0(f+f_0)) \end{aligned}$$

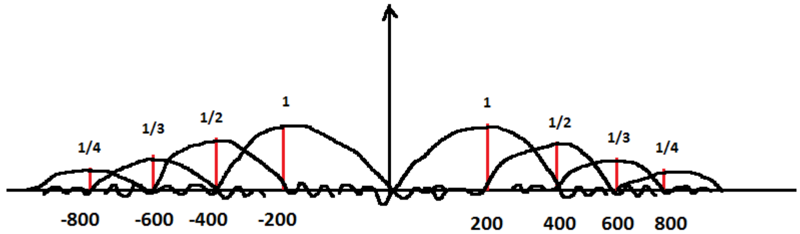
Συνέλιξη στην συχνότητα σημαίνει πολλαπλασιασμό στον χρόνο. Επομένως το ζητούμενο φάσμα είναι αυτό που φαίνεται στο προηγούμενο υποερώτημα (με πλάτος $AT_0/2$). Εξαιτίας του μικρού χρονικού εύρους του παραθύρου (όση η περίοδος του σήματος), στην συχνότητα το εύρος του λοβού ειναι αρκετά μεγάλο, επομένως το φάσμα που προκύπτει είναι αρκετά διαφορετικό απο το φάσμα του σήματος χωρίς την χρήση παραθύρου (υποερώτημα α): περιλαμβάνει πλήθος συχνοτήτων και όχι μία συχνότητα και το πλάτος έχει αυξηθεί κατα T_0, έχει δηλαδή επηρεαστεί από την χρονική διάρκεια του παραθύρου.

(ϝ′)

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=1}^{4} \frac{2}{k} cos(2\pi 200kt) = \sum_{k=1}^{4} \frac{2}{k} \frac{e^{j2\pi 200kt} + e^{-j2\pi 200kt}}{2} \\
&= \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} e^{j2\pi 200kt} + \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} e^{-j2\pi 200kt} \\
&= \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} e^{j2\pi 200kt} + \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} e^{j2\pi 200(-k)t} \\
&= \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} e^{j2\pi 200kt} + \sum_{k=-4}^{1} \frac{1}{-k} e^{j2\pi 200kt} \\
&= \sum_{k=-4, k\neq 0}^{k=4} \frac{1}{|k|} e^{j2\pi 200kt}
\end{aligned}
$$



(ζ) Το φάσμα του παραθύρου συνελίσσεται στην συχνότητα με το φάσμα του σήματος. Επομένως, το παράθυρο μετακινείται στις αντίστοιχες συχνότητες του σήματος του προηγούμενου σχήματος. Έτσι, το φάσμα που προκύπτει απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα, λαμβάνοντας υπόψην στον σχεδιασμό ότι χρονική διάρκεια παραθύρου ισούται με την θεμελιώδη περίοδος του σήματος, $T = \frac{1}{200}$



(η΄) Μικραίνοντας το παράθυρο στο χρόνο μεγαλώνουμε τον κεντρικό λοβό του παραθύρου στην συχνότητα, οπότε θα έχουμε επικάλυψη των λοβών και τα 'peaks' δεν θα ειναι ευδιάκριτα. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε σχεδιάσει την συνέλιξη του παραθύρου με δύο μόνο συχνοτικές συνιστώσες του σήματος ώστε να έιναι το σχήμα ευδιάκριτο. Παρατηρούμε ότι οι μεγαλύτεροι σε πλάτος λοβοί επικαλύπτουν την πληροφορία των διπλανών φασματικών συνιστωσών.