ΗΥ215: 3η Σειρά Ασκήσεων

Παρασκευή 21 Μαρτίου 2014

Παράδοση: Παρασκευή 4 Απριλίου 2014

Απορίες: hy215-list@csd.uoc.gr

1. **Σειρά Fourier και Μετασχηματισμός Fourier**

   Στο μάθημα είδατε ότι ο μετασχ. Fourier είναι μια προέκταση των σειρών Fourier, όταν η περίοδος T_0 του περιοδικού σήματος τείνει στο άπειρο ($T_0 \to +\infty$). Θεωρήστε μια σειρά από τετραγωνικούς παλμούς $x(t)$ με περίοδο $T_0 = 2$ sec, με τον παλμό σε μια περίοδο να γράφεται ως $x_{T_0}(t) = rect(t)$, δηλ. εχει διάρκεια από -0.5 ως 0.5 sec και μοναδιαίο πλάτος. Έστω ότι η περίοδος T_0 αυξάνει σταδιακά σε $4, 8$ και 16 sec.

   (α′) Βρείτε τον συντελεστή X_0 της σειράς Fourier για κάθε μια τιμή του T_0 και δείξτε/εξηγήστε πώς μεταβαλλεται για τις τιμές του T_0.

   (β′) Βρειτε τους συντελεστές Fourier X_k και σχεδιάστε προσεκτικά το φάσμα πλάτους για κάθε τιμή του T_0, για τους πρώτους $10 - 15$ όρους κάθε φορά. Εξηγείστε τι παρατηρείτε.

   (γ′) Αν αφήνατε το T_0 να γίνει πολύ μεγάλο, τι περιμένετε να συμβεί στους συντελεστές Fourier; Εξηγήστε.

   (δ′) Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του παλμού $x_{T_0}(t)$. Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους του με προσοχή. Τι παρατηρείτε; Υπάρχει κάποια ομοιότητα σε σχέση με το φάσμα πλάτους που υπολογίσατε νωρίτερα για τη σειρά Fourier;

   Απάντηση:

   $$X_k = \frac{1}{T_0} sinc\Big(\frac{k}{T_0}\Big)$$

2. **Μετασχηματισμός Fourier - I**

   Να υπολογίσετε τον μετασχ. Fourier του σήματος:

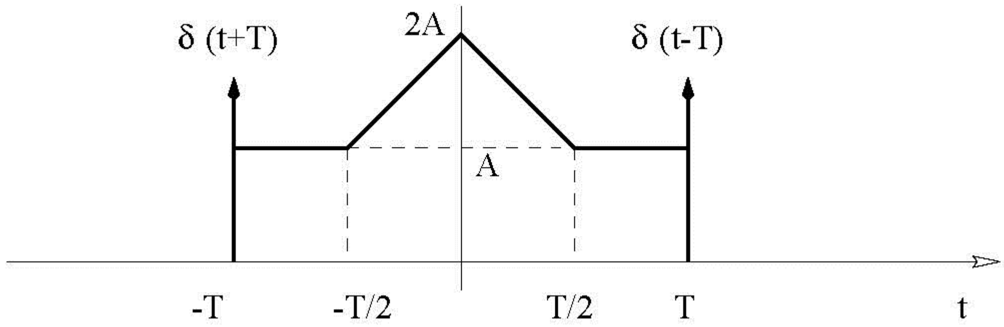
   $$x(t) = \begin{cases} |t|, & |t| \le 1/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

   Απάντηση:

   $$\frac{1}{2} sinc(f) - \frac{1}{4} sinc^2\Big(\frac{f}{2}\Big)$$

3. **Μετασχηματισμός Fourier - II**

Τα σχέδια για το παλάτι των Βερσαλλιών φαίνονται στο Σχήμα 1. :-)



Σχήμα 1: Το παλάτι των Βερσαλλιών

(α′) Υπολογίστε το μετασχ. Fourier των σχεδίων. Χρησιμοποιήστε γνωστά σας σήματα για να γράψετε το παλάτι ως γραμμικό συνδυασμό αυτών και να βρείτε πολύ εύκολα το μετασχηματισμό με χρήση της ιδιότητας της γραμμικότητας και της μετατόπισης.

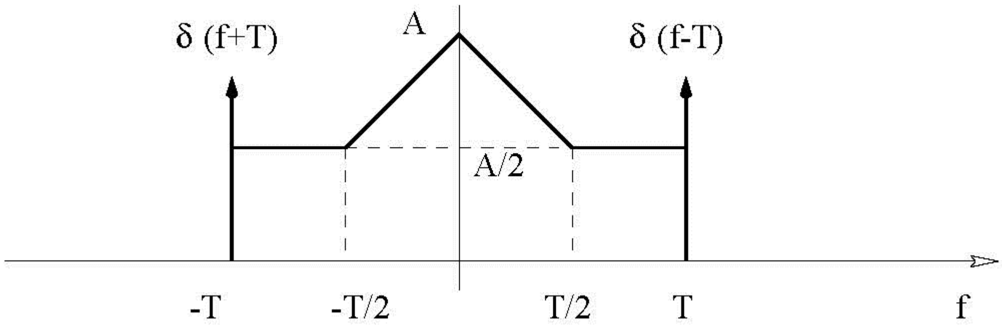
(β′) Γνωριζουμε ότι όσο πιο πολύ εκτείνεται ενα σήμα στο χώρο της συχνότητας, τόσο πιο μεγάλο είναι το εύρος ζώνης του. Το εύρος ζώνης είναι ανάλογο με το κόστος κατασκευής και συντήρησης. Οι Γάλλοι πολίτες κατάλαβαν ότι το παραπάνω κτήριο έχει πολύ υψηλό κόστος κατασκευής, και έτσι θα τους έκανε πολύ φτωχότερους (λόγω υψηλής φορολόγησης για τη συντήρηση του κτηρίου). Κατα τη διάρκεια της Γαλλικής επανάστασης (1789), και με την καθοδηγηση του Fourier, αφαίρεσαν ένα μέρος από το παλάτι, ώστε το φάσμα πλάτους να μειώνεται σημαντικά οσο αυξάνεται η συχνότητα (για τον περιορισμό του ευρους ζώνης και άρα του κόστους). Ποιό μέρος του παλατιού αφαίρεσαν;

<u>Απάντηση:</u>

$$X(f) = 2ATsinc(2fT) + \frac{AT}{2}sinc^2\Big(\frac{fT}{2}\Big) + 2\cos(2\pi fT)$$

4. **Μετασχηματισμός Fourier - III**

Οι Ιάπωνες αντέγραψαν τα σχέδια του παλατιού της Άσκησης 3 αλλά εκαναν ένα λαθάκι κατά την αντιγραφή, αντί για t έβαλαν f!! Το αντίγραφό τους φαίνεται στο Σχήμα 2. Σημειώστε ότι η αλλαγή στην κλίμακα είναι Ιαπωνική καινοτομία, μια και ό,τι φτιάχνουν το κάνουν λίγο πιο μικρο από τα αυθεντικά (άρα δεν είναι το λάθος στο πλάτος του σχήματος). Μόλις ο Αυτοκράτορας ειδε τα σχέδια, διέταξε να φτιάξουν γρήγορα το παλάτι στο χρόνο με χρήση αντίστροφου μετασχ. Fourier! Μάλιστα, για τιμωρία,

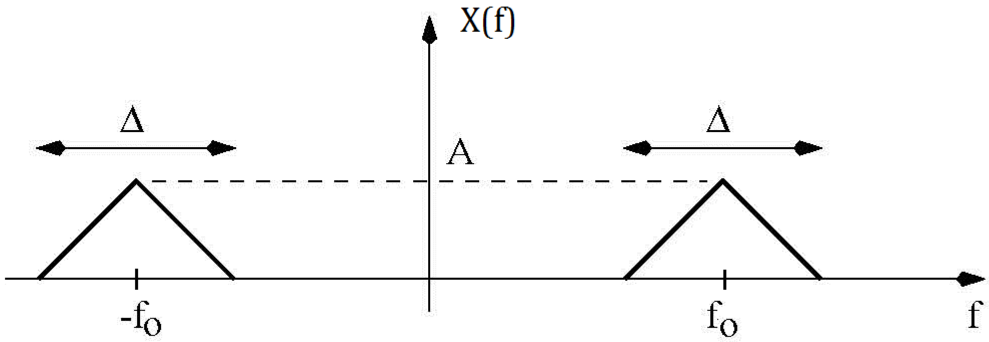


Σχήμα 2: Το αντίγραφο του παλατιού των Βερσαλλιών

τους απαγόρεψε να χρησιμοποιήσουν τον ορισμό του αντίστρ. μετ. Fourier, αλλά να το κάνουν με χρήση ιδιοτητων! :-) Βρείτε τον αντίστροφο μετ. Fourier, $x(t)$, του σήματος του Σχήματος 2.

5. **Μετασχηματισμός Fourier - IV**

Να βρεθει ο αντίστροφος μετ. Fourier του σήματος του Σχήματος 3.



Σχήμα 3: Μετασχηματισμός Fourier Άσκησης 5

Απάντηση:

$$x(t) = A\Delta sinc^2\Big(\frac{\Delta}{2}t\Big)\cos(2\pi f_0 t)$$

6. **Μετασχηματισμός Fourier - V**

(α′) Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$x(t) = e^{-\alpha t}\epsilon(t)$$

με $\alpha > 0$.

(β′) Βρειτε το πραγματικό και το φανταστικό του μέρος.

(γ′) Βρείτε το μέτρο του, $|X(f)|$, και σχεδιάστε το προσεγγιστικά για $a = 1$ και διάφορες τιμές του f.

Απάντηση:

$$X(f) = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

7. **Συναρτήσεις Δέλτα**

Έστω το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 5, & t = -2, \\ 2, & t = -1, \\ 2, & t = 1, \\ 5, & t = 2, \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α′) Σχεδιάστε το $x(t)$.

(β′) Γράψτε το $x(t)$ ως γραμμικό συνδυασμό της συνάρτησης Δέλτα.

(γ′) Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του $x(t)$.

Απάντηση:

$$X(f) = 20\cos^2(2\pi f) + 4\cos(2\pi f) - 10$$

8. **Μετασχηματισμός Fourier στο MATLAB - bonus 10%**

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε MATLAB για να επιβεβαιώσουμε το αποτέλεσμα της Άσκησης 6. Ο μετασχ. Fourier ειναι ένα ολοκλήρωμα. Ας το δούμε λοιπόν γενικά πρώτα. :-)

(α′) Έστω οτι θέλουμε να επιβεβαιώσουμε στο MATLAB ένα ολοκλήρωμα. Ένας σπουδαίος μαθηματικός, ο B. Riemann, έδειξε ότι ένα ολοκλήρωμα μπορεί να προσεγγιστεί από ένα άθροισμα ως

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\delta_i$$

Τι μας λέει το παραπάνω;

i. Χωρίζουμε το διάστημα ολοκλήρωσης $[a, b]$ σε N μέρη, με μήκος δ_i το καθένα. Εστω δ το μεγαλύτερο από αυτά τα μήκη.

ii. Επιλέγουμε ένα σημείο x_i σε κάθε ενα από αυτά τα διαστήματα.

iii. Υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης $f(x)$ στα σημεία x_i.

iv. Τώρα έχουμε N τιμές της $f(x)$ και N μήκη (αριθμούς δηλαδη) δ_i.

v. Πολλαπλασιάζουμε τις N τιμές της $f(x)$ (δηλ. τα $f(x_i)$) με τις N τιμές των δ_i, κατ' αντιστοιχία, και προσθέτουμε τα γινόμενα μεταξύ τους, παίρνοντας τελικά μια τιμή.

Η παραπάνω σχέση επίσης μας λέει οτι για να ειναι το ολοκλήρωμα ίσο με αυτό το άθροισμα που βρήκαμε, θα πρέπει να χωρίσουμε το διάστημα $[a, b]$ κατά τέτοιο τροπο ώστε το μεγαλύτερο διάστημα από τα δ_i, δηλαδη το δ, να είναι πολύ μικρό. Η παραπάνω σχέση δηλαδη ισχύει αυστηρά μόνον όταν $\lim_{\delta \to 0}$.

Πολλές πράξεις βεβαια, αλλά η ισότητα έχει το κόστος της! :-) Ευτυχώς, ολες αυτές τις πράξεις τις κάνει το MATLAB για μας. Το μόνο κακό είναι οτι τις κάνει πολύ γρήγορα και δεν προλαβαίνουμε ούτε έναν καφέ να πιούμε, και το αποτέλεσμα έχει ήδη υπολογιστεί! :-)

Έστω λοιπόν ότι το ολοκλήρωμά μας είναι το

$$\int_0^{2\pi} \sin^{10}(t) dt$$

Ας χωρίσουμε το διάστημά μας, $[0, 2\pi]$, σε 6001 σημεία:

```
delta = 2*pi/6000;
t = 0:delta:2*pi;
```

Αυτό μας δίνει $\delta = 0.00104719$. Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος με βάση τη σχέση του Riemann είναι απλά

```
oloklhrwma = delta * sum( sin(t).^10 );
```

(β΄) Στο θέμα μας πίσω τώρα... για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα του μετασχ. Fourier στο MATLAB, θα πρεπει να πάρουμε δειγματα από τον άξονα του χρονου και τον άξονα της συχνότητας, ώστε να κατασκευάσουμε το γινόμενο και να το ολοκληρώσουμε[1]. Θυμηθείτε, στο MATLAB, όλα είναι διανύσματα ή πίνακες, άρα έχουν διακριτές τιμές. Είδατε παραπάνω οτι το συνεχές διάστημα $[0, 2\pi]$ το χωρίσαμε σε πολλά σημεια για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα. Έτσι θα κάνουμε και τώρα. Η δειγματοληψία στο χρόνο θα είναι:

```
dt = 1/100;       % To bhma mas
D = 20;           % H diarkeia tou shmatos sto xrono
t = 0:dt:D;       % O a3onas tou xronou
```

[1] Το MATLAB φυσικά έχει δική του συνάρτηση που υπολογίζει τον μετ. Fourier ενός σήματος, και λέγεται fft. Παρ' όλα αυτά, εμείς θα φτιάξουμε τη δική μας, για να έχουμε απόλυτο έλεγχο και γιατι η fft απαιτεί κάποιες γνώσεις παραπάνω για να τη χρησιμοποιήσετε.

Η δειγματοληψία στη συχνότητα θα είναι:

```
df = 1/D;          % To bhma mas sth syxnothta
f = -5*pi:df:5*pi;  % O a3onas twn syxnothtwn [-5pi, 5pi]
```

Ας θεωρησουμε ότι οι παραπάνω συχνότητες $[-5\pi, 5\pi]$ μας ενδιαφέρουν μόνο και ότι σε αυτό το διάστημα θα υπολογίσουμε τον μετασχ. Fourier. Άρα ουσιαστικά θα βλέπουμε τον μετασχ. Fourier μόνο στο διάστημα $[-5\pi, 5\pi]$. Γνωριζοντας τα δείγματα του χρόνου και της συχνότητας μπορούμε να κατασκευάσουμε τους λεγόμενους *πίνακες ανάλυσης και σύνθεσης* του μετασχ. Fourier:

```
M = exp(-j*2*pi*t'*f);
Minv = exp(j*2*pi*f'*t);
```

Ας δημιουργήσουμε και σχεδιάσουμε το σημα μας, για $\alpha = 2$:

```
a = 0.2;
x = exp(-a*t);
plot(t,x);
```

Για να υπολογίσουμε τον μετασχ. Fourier, θα δουλέψουμε όπως για το ολοκλήρωμα Riemann παραπάνω, δηλ.

```
X = dt*x*M;
```

Ας συγκρίνουμε το φάσμα πλάτους του παραπάνω με το θεωρητικό που βρήκατε στην Άσκηση 6.

```
Xtheoretic = 1./(a + j*2*pi*f);
plot(f, abs(X)); hold on; plot(f, abs(Xtheoretic), 'm--'); hold off;
```

Μοιάζουν τα δυο φάσματα πλάτους; Σε ποιά συχνότητα το φάσμα πλάτους έχει τιμή $\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$;

9. **Ομαλότητα και συχνοτικό περιεχόμενο - MATLAB - bonus 10%**

Η ομαλότητα ενός σήματος καθορίζει το συχνοτικό του περιεχόμενο. Όσο πιο ομαλό είναι ενα σήμα στο χρόνο, τόσο χαμηλότερα θα είναι τα πλάτη των συχνοτήτων του στο φάσμα. Θεωρήστε τα σήματα:

$$\begin{aligned} x(t) &= \epsilon\Big(t+\frac{1}{2}\Big) - \epsilon\Big(t-\frac{1}{2}\Big) \\ y(t) &= (1+\cos(\pi t))\Big(\epsilon\Big(t+\frac{1}{2}\Big) - \epsilon\Big(t-\frac{1}{2}\Big)\Big) \end{aligned}$$

(α') Σχεδιάστε τα σήματα $x(t), y(t)$ στο χαρτί σας. Μπορειτε να αποφανθείτε για το ποιό είναι πιο ομαλό; Επιλέξτε ενα από τα δυο σύμφωνα με το ένστικτό σας (ή και τις γνώσεις σας :-)).

(β′) Σχεδιάστε τα στο MATLAB. Χρησιμη θα σας φανεί η συνάρτηση rectpuls, που σχεδιάζει ένα μοναδιαίο τετραγωνικό παράθυρο που ορίζεται στο $[-0.5, 0.5]$. Για παράδειγμα,

```
t = -5:0.01:5;
x = rectpuls(t);
plot(t,x);
```

ο παραπάνω κώδικας σχεδιάζει ένα τετραγωνικό παλμό διάρκειας 1 sec, δηλ. από $t = -0.5$ ως $t = 0.5$, στο διάστημα $[-5, 5]$.

(γ′) Βρείτε το μετασχ. Fourier των σημάτων στο χαρτι σας. Χρησιμοποιήστε γνωστες ιδιότητες. Σχεδιάστε προσεκτικά το φασμα πλάτους τους.

(δ′) Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους τους στο MATLAB. Χρησιμοποιήστε καταλληλα τον κώδικα της προηγούμενης άσκησης. Χρησιμοποιήστε τις εντολές hold on, hold off όπως σας δείχνουμε στην προηγούμενη άσκηση για να τυπώσετε τα φάσματα το ένα πάνω στο άλλο.

(ε′) Ποιό από τα δυο σήματα έχει υψηλότερα πλάτη στις συχνότητές του; Μπορειτε να πείτε ποιό σήμα είναι ομαλότερο; Αν μπερδεύεστε, κανονικοποιήστε τα σήματα ως προς την ενέργειά τους ως

```
x = x./sqrt(sum(x.^2));
y = y./sqrt(sum(y.^2));
```

και ξανακάντε το μετασχ. Fourier στο MATLAB. Σχεδιάστε ξανά τα φάσματα πλάτους των μετασχ. Fourier των σημάτων, το ενα πάνω στο άλλο. Τώρα μήπως μπορείτε να δείτε τη διαφορά; Ποιό σήμα είναι ομαλότερο;