ΗΥ215
Λύσεις 3ης σειράς ασκήσεων

1. **Σειρά Fourier και Μετασχηματισμός Fourier**

(α′) Είναι

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1dt = \frac{t}{T_0}\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{T_0} \longrightarrow X_0 = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}.$$

Όσο η περίοδος μεγαλώνει, τοσο ο συντελεστής X_0 μικραίνει. Είναι λογικό, γιατί το X_0 είναι το εμβαδό του σήματος επί $1/T_0$, οπότε οσο το $1/T_0$ μικραίνει, τόσο το X_0 μικραινει, γιατι το εμβαδό του σήματος $\int_0^{T_0} x(t)dt$ ειναι πάντα σταθερό.

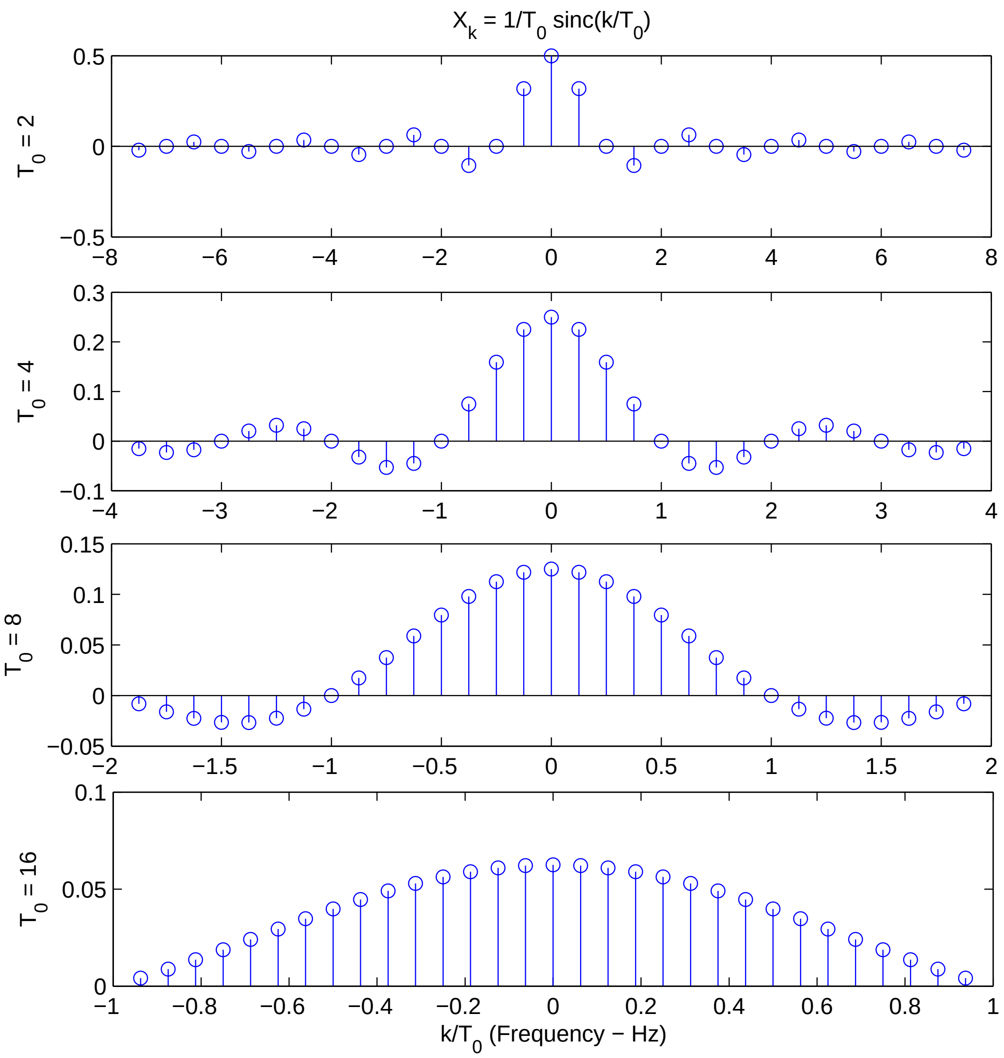
(β′) Έχουμε

$$\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\
&= \frac{1}{T_0}\frac{1}{-j2\pi k f_0}e^{-j2\pi k f_0 t}\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{-j2\pi k}\Big(e^{-j\pi k f_0} - e^{j\pi k f_0}\Big) \\
&= \frac{1}{\pi k}\Big(\frac{e^{j\pi k f_0} - e^{-j\pi k f_0}}{2j}\Big) \\
&= \frac{1}{\pi k}\sin(\pi k f_0) = \frac{1}{\pi k}\sin(\frac{\pi k}{T_0}) \\
&= \frac{\sin(\frac{\pi k}{T_0})}{T_0\frac{\pi k}{T_0}} \\
&= \frac{1}{T_0}sinc\Big(\frac{k}{T_0}\Big).
\end{aligned}$$

Στο σχήμα 1, βλέπουμε ότι όσο αυξάνει το T_0, τόσο περισσοτερες φασματικές γραμμές συγκεντρώνονται μέσα σε ενα συγκεκριμένο συχνοτικό διάστημα. Για παραδειγμα, για $T_0 = 2$ έχουμε μόλις 5 φασματικές γραμμές στο διάστημα $[-1, 1]$, ενώ για $T_0 = 16$, έχουμε 31 φασματικές γραμμές στο ίδιο διάστημα.

(γ′) Αν $T_0 \to +\infty$, τότε τα X_k θα περιγράφουν ένα μη-περιοδικό σήμα και πλέον τα kf_0 θα γινονταν ένας συνεχής άξονας f, οπότε θα σχηματίζουν μία συνεχή συνάρτηση του f, δηλαδή την $X(f)$.

(δ′) Είναι $x_{T_0}(t) = rect\Big(\frac{t}{1}\Big) \longleftrightarrow X_{T_0}(f) = sinc(f)$. Προφανώς, το φάσμα του $rect(t)$ προσεγγίζεται από το φάσμα του X_k, όταν το T_0 μεγαλώνει απεριόριστα. Δειτε το σχήμα 2.

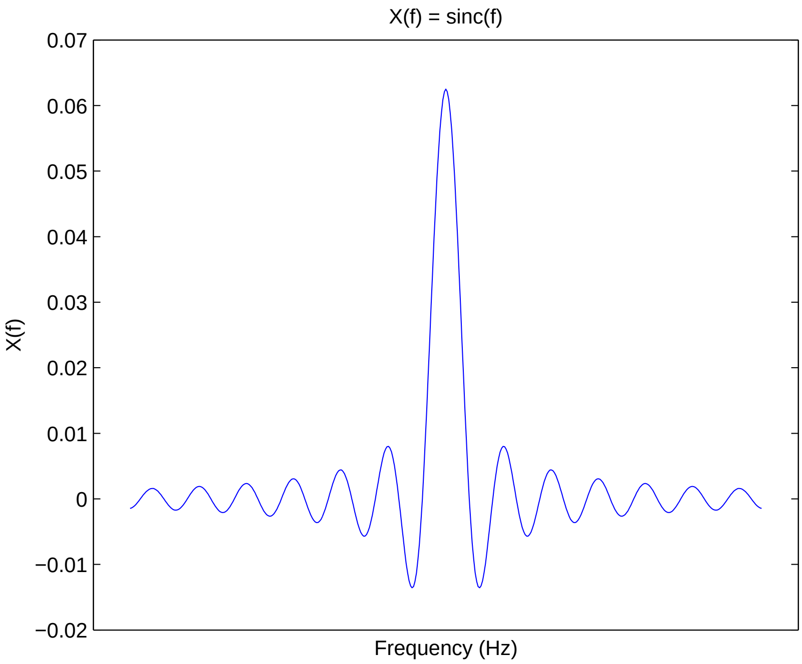


Σχήμα 1: Φάσματα πλάτους X_k.

2. **Μετασχηματισμός Fourier - I**

Το σήμα μας είναι

$$x(t) = \begin{cases} |t|, & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} -t, & -\frac{1}{2} \leq t \leq 0 \\ t, & 0 < t \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



Σχήμα 2: $X(f) = sinc(f)$.

$$
\begin{aligned}
X(f) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |t| e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} -te^{-j2\pi ft} dt + \int_{0}^{\frac{1}{2}} te^{-j2\pi ft} dt \\
&= -\left(\frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} \left(t + \frac{1}{j2\pi f} \right) \right) \Bigg]_{-\frac{1}{2}}^{0} + \left(\frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} \left(t + \frac{1}{j2\pi f} \right) \right) \Bigg]_{0}^{\frac{1}{2}} \\
&= -\left(\frac{1}{-j2\pi f} \frac{1}{j2\pi f} - \frac{e^{j\pi f}}{-j2\pi f} \left(\frac{1}{j2\pi f} - \frac{1}{2} \right) \right) + \left(-\frac{e^{-j\pi f}}{j2\pi f} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{j2\pi f} \right) + \frac{1}{j2\pi f} \frac{1}{j2\pi f} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi^2 f^2} - \frac{e^{j\pi f}}{j2\pi f} \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \frac{e^{j\pi f}}{j2\pi f} - \frac{1}{2} \frac{e^{-j\pi f}}{j2\pi f} + \frac{e^{-j\pi f}}{4\pi^2 f^2} - \frac{1}{4\pi^2 f^2} \\
&= \frac{1}{2\pi^2 f^2} + \frac{e^{j\pi f}}{2\pi^2 f^2} + \frac{1}{2} \frac{e^{j\pi f}}{j2\pi f} - \frac{1}{2} \frac{e^{-j\pi f}}{j2\pi f} + \frac{e^{-j\pi f}}{4\pi^2 f^2} \\
&= -\frac{1}{2\pi^2 f^2} + \frac{1}{4\pi^2 f^2} (e^{j\pi f} + e^{-j\pi f}) + \frac{1}{2\pi f} \left(\frac{e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}}{2j} \right) \\
&= -\frac{1}{2\pi^2 f^2} + \frac{1}{4\pi^2 f^2} 2\cos(\pi f) + \frac{1}{2\pi f} \sin(\pi f) \\
&= \frac{1}{2\pi f} \sin(\pi f) + \frac{1}{2\pi^2 f^2} (\cos(\pi f) - 1) \\
&= \frac{1}{2} sinc(f) - \frac{1}{2} 2\sin^2 \left(\frac{\pi f}{2} \right) \frac{1}{\pi^2 f^2} \\
&= \frac{1}{2} sinc(f) - \frac{1}{4} sinc^2 \left(\frac{f}{2} \right).
\end{aligned}
$$

3. **Μετασχηματισμός Fourier - II**

(α′) Μπορούμε να σπάσουμε το σήμα στα παρακάτω γνωστα μας σήματα με τους ακόλουθους μετασχηματισμούς:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= Arect\left(\frac{t}{2T}\right) \longleftrightarrow X_1(f) = 2ATsinc(2fT) \\ x_2(t) &= Atri\left(\frac{t}{T/2}\right) \longleftrightarrow X_2(f) = \frac{AT}{2}sinc^2\left(\frac{fT}{2}\right) \\ x_3(t) &= \delta(t+T) + \delta(t-T) \longleftrightarrow X_3(f) = e^{j2\pi fT} + e^{-j2\pi fT} = 2\cos(2\pi fT) \end{aligned}$$

Αρα $X(f) = X_1(f) + X_2(f) + X_3(f) = 2ATsinc(2fT) + \frac{AT}{2}sinc^2\left(\frac{fT}{2}\right) + 2\cos(2\pi fT)$.

(β′) Ο όρος $2\cos(2\pi fT)$ εκτείνεται από το $-\infty$ ως το $+\infty$ στις συχνότητες, με σταθερό πλάτος 2. Οι άλλοι δυο όροι, επειδή είναι $sinc()$, φθίνουν όσο οι συχνότητες $f \to \pm\infty$. Άρα αυτός ο όρος $2\cos(2\pi fT)$ πρέπει να αφαιρεθεί, και στο χρόνο αυτό το σήμα ανταποκρίνεται στα δύο Diracs, οπότε αφαιρέθηκαν τα $\delta(t-T)$ και $\delta(t+T)$.

4. **Μετασχηματισμός Fourier - III**

Σπάζοντας τα σήματα στη συχνότητα αυτή τη φορά, και με την ιδιότητα της δυικότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned} X_1(f) &= \delta(f+T) + \delta(f-T) \longleftrightarrow x_1(t) = e^{-j2\pi Tt} + e^{j2\pi Tt} = 2\cos(2\pi Tt) \\ X_2(f) &= \frac{A}{2}tri\left(\frac{f}{T/2}\right) \longleftrightarrow x_2(t) = \frac{A}{2}\frac{T}{2}sinc\left(\frac{Tt}{2}\right) \\ X_3(f) &= \frac{A}{2}rect\left(\frac{f}{2T}\right) \longleftrightarrow x_3(t) = \frac{A}{2}2Tsinc(2tT) \end{aligned}$$

και άρα

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = 2\cos(2\pi Tt) + \frac{AT}{4}sinc^2\left(\frac{Tt}{2}\right) + ATsinc(2fT).$$

5. **Μετασχηματισμός Fourier - IV**

Εμφανώς, το σήμα μας αποτελείται από δυο τρίγωνα στο χώρο της συχνότητας, μετατοπισμένα στις συχνότητες $\pm f_0$, με διάρκεια Δ και πλάτος A. Άρα:

$$\begin{aligned} X(f) &= Atri\left(\frac{f-f_0}{\Delta/2}\right) + Atri\left(\frac{f+f_0}{\Delta/2}\right) \longleftrightarrow \\ x(t) &= \frac{A\Delta}{2}sinc^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A\Delta}{2}sinc^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)e^{-j2\pi f_0 t} \\ &= \frac{A\Delta}{2}sinc^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)2\cos(2\pi f_0 t) \\ &= A\Delta sinc^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)\cos(2\pi f_0 t). \end{aligned}$$

6. **Μετασχηματισμός Fourier - V**

(α′) Είναι

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{-at}\epsilon(t), a > 0 \\
X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}\epsilon(t)e^{-j2\pi ft}dt \\
&= \int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{-j2\pi ft}dt \\
&= \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t}dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{-(a+j2\pi f)}e^{-(a+j2\pi f)t}\Big]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{-(a+j2\pi f)}\left(\lim_{t\to+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} - e^0\right) \\
&= \frac{1}{-(a+j2\pi f)}(0-1) \\
&= \frac{1}{a+j2\pi f}.
\end{aligned}$$

(β′) Έχουμε

$$X(f) = \frac{1}{a+j2\pi f} = \frac{a-j2\pi f}{|a+j2\pi f|^2} = \frac{a-j2\pi f}{a^2+4\pi^2f^2} = \frac{a}{a^2+4\pi^2f^2} - j\frac{2\pi f}{a^2+4\pi^2f^2}.$$

(γ′) Είναι

$$|X(f)| = \frac{1}{|a+j2\pi f|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+4\pi^2f^2}}.$$

Το μέτρο του M.F φαινεται στο σχήμα 3.

7. **Συναρτήσεις Δέλτα**

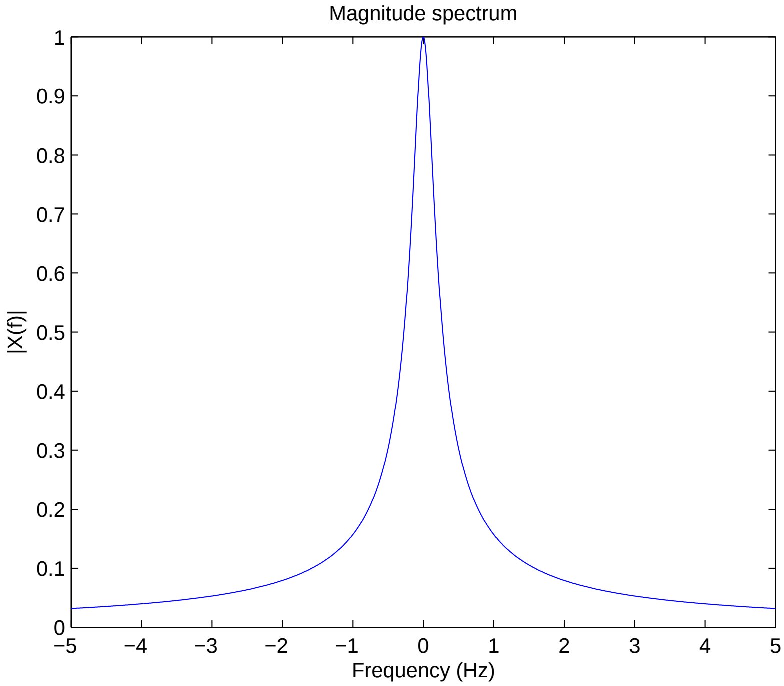
(α′) Το $x(t)$ φαίνεται στο σχήμα 4.

(β′) Έχουμε προφανώς

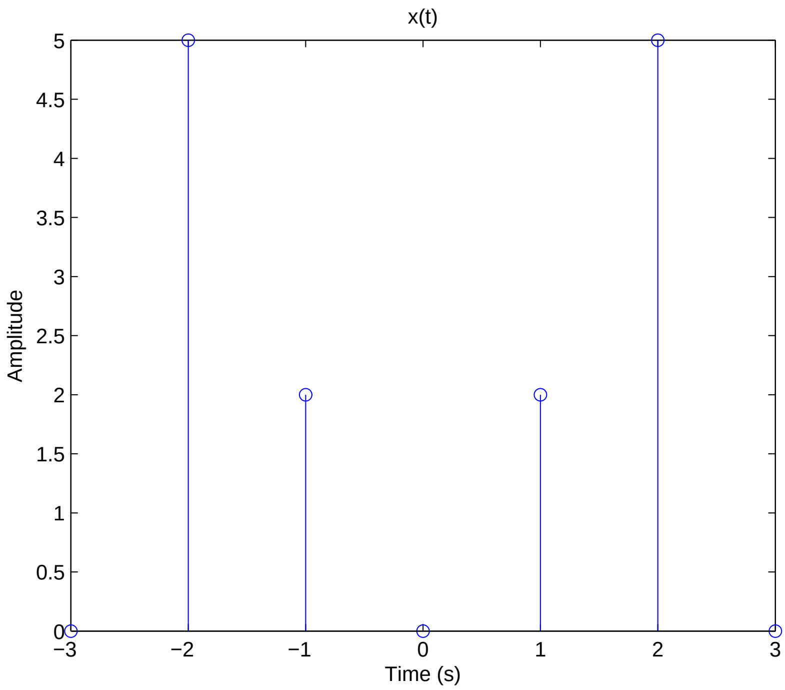
$$x(t) = 5\delta(t+2) + 2\delta(t+1) + 2\delta(t-1) + 5\delta(t-2).$$

(γ′) Ο μετ. Fourier είναι

$$\begin{aligned}
X(f) &= 5e^{+j2\pi 2f} + 2e^{+j2\pi f} + 2e^{-j2\pi f} + 5e^{-j2\pi 2f} \\
&= 5\cdot 2\cos(2\pi 2f) + 2\cdot 2\cos(2\pi f) \\
&= 10\cos(2\pi 2f) + 4\cos(2\pi f) \\
&= 10\left(2\cos^2(2\pi f) - 1\right) + 4\cos(2\pi f) \\
&= 20\cos^2(2\pi f) + 4\cos(2\pi f) - 10.
\end{aligned}$$



Σχήμα 3: $|X(f)|$ Άσκησης 6.



Σχήμα 4: $x(t)$ Άσκησης 7.