ΗΥ215: 2η Σειρά Ασκήσεων

Παρασκευή 7 Μαρτίου 2014

Παράδοση: Παρασκευή 21 Μαρτίου 2014

Απορίες: hy215-list@csd.uoc.gr

1. **Εξερευνώντας την ιδέα του Fourier**

   Ο J. Fourier πρότεινε την αναπαράσταση ενός περιοδικού σήματος ως άθροισμα συνημιτόνων, πιθανότατα άπειρων το πλήθος, με συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες μιας θεμελιώδους. Για παράδειγμα, θεωρήστε την αναπαράσταση ενός περιοδικού σήματος $x(t)$ ως άθροισμα συνημιτόνων διαφορετικών συχνοτήτων:

   $$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k)$$

   (α′) Αν το $x(t)$ έχει περίοδο T_0, τότε ποιά είναι η συχνότητα του 8ου συνημιτόνου;

   (β′) Έστω ότι

   $$y(t) = 2 + 2\cos(2\pi t) - 3\cos(6\pi t + \pi/4)$$

   Είναι το σήμα περιοδικό; Αν ναι, ποιά η περίοδός του, T_0; Ποιές τιμές έχουν τα A_k και τα ϕ_k του $y(t)$, όπως αυτά ορίζονται στη σχέση του $x(t)$;

   (γ′) Έστω ότι

   $$w(t) = 2 + 2\cos(2\pi t) - 3\cos(20t + \pi/4)$$

   Είναι το σήμα περιοδικό; Εξηγείστε.

2. **Φάσματα Πλάτους και Φάσης**

   Έστω το σήμα

   $$x(t) = x_1(t)x_2(t) = \{3 + 2\sin(2\pi t - \pi/8)\}\cos(2\pi 4t)$$

   (α′) Γράψτε το $x(t)$ ως

   $$x(t) = A_1\cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2\cos(2\pi f_2 t + \phi_2) + A_3\cos(2\pi f_3 t + \phi_3)$$

   όπου $f_1 < f_2 < f_3$.

   (β′) Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης του $x_1(t)$, καθώς και του $x_2(t)$.

   (γ′) Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης του $x(t)$, χρησιμοποιώντας το άθροισμα που αναπτύξατε στο πρώτο ερώτημα. Συγκρίνετε τα φάσματα του $x(t)$ με τα φάσματα των $x_1(t), x_2(t)$. Τι παρατηρείτε;

3. **Ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier - I**

   Εστω το περιοδικό σήμα, με περίοδο T_0

$$x(t) = 2 - \frac{2}{T_0}t, \;\; 0 \leq t \leq T_0$$

   (α′) Αναπτύξτε το σε σειρά Fourier.

   (β′) Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης για τους πρώτους 5 όρους της σειράς Fourier.

   Βοήθεια: Σας δινεται οτι $\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\Big(x - \frac{1}{a}\Big)$.

4. **Ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier - II**

   Έστω το σήμα

$$x(t) = \sin^3(27\pi t)$$

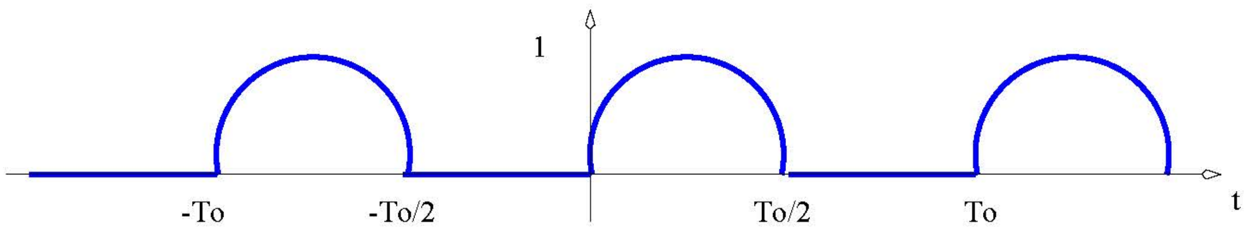
   Αναπτύξτε το σήμα σε σειρά Fourier. Ποιά είναι η περίοδος του σήματος;

5. **Ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier - III**

   Έστω το σήμα του Σχήματος 1

$$x(t) = \begin{cases} \sin(2\pi f_0 t), & 0 \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} < t \leq T_0 \end{cases}$$

   Αναπτύξτε το σήμα σε σειρά Fourier. Προσέξτε τον όρο X_k για $k = 1$! Διαχωρίστε τον υπολογισμό



Σχήμα 1: *Σήμα Άσκησης 5*

   του από τους όρους X_k, για $k \neq 0$.

6. **Συντελεστές Fourier**

Σας δίνονται οι συντελεστές Fourier

$$X_k = j\frac{1}{2k}$$

(α′) Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης του σήματος για $k = \pm1, \pm2, \pm3, \pm4$.

(β′) Οι συντελεστές αυτοί ανταποκρίνονται στη σειρά Fourier ενός σήματος, $x(t)$. Αυτό το σήμα είναι πραγματικό; Φανταστικό; Μιγαδικό;

(γ′) Υπολογίστε τους συντελεστές Fourier του σήματος $\frac{d}{dt}x(t)$, δηλ. της παραγώγου του σήματος $x(t)$.

Βοήθεια: Παραγωγίστε ως προς t τον τυπο του αναπτύγματος σε εκθετική σειρά Fourier. Προσπαθήστε να διαχωρίσετε τους νέους συντελεστές από τα μιγαδικά εκθετικά σήματα.

7. **Σειρές Fourier στην πράξη! - MATLAB (bonus 10%)**

(α′) Στο μάθημα, δείξατε ότι το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \frac{T_0}{2} \\ -1, & \frac{T_0}{2} < t \le T_0 \end{cases}$$

αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως

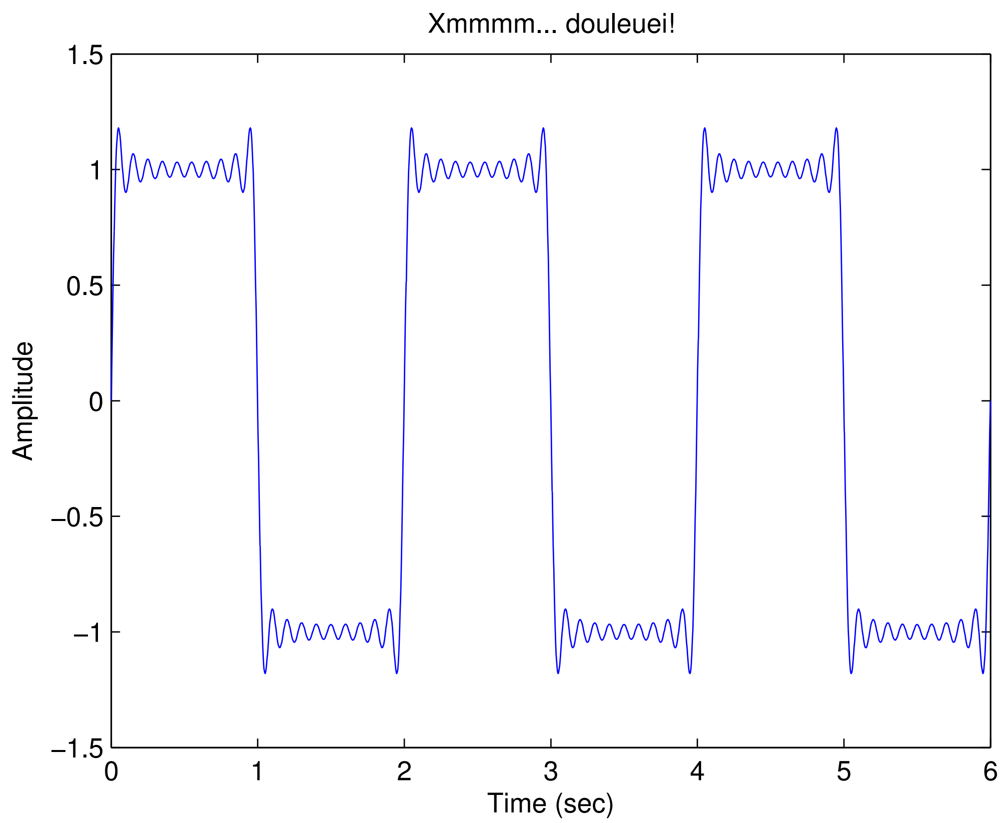
$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin[2\pi(2k+1)f_0 t] \\ &= \frac{4}{\pi}(\sin(2\pi f_0 t) + \frac{1}{3}\sin(2\pi 3 f_0 t) + \frac{1}{5}\sin(2\pi 5 f_0 t) + \cdots) \end{aligned}$$

Οι παρακάτω γραμμές κώδικα υπολογίζουν μια προσέγγιση του σήματος $x(t)$ χρησιμοποιώντας τη σειρα Fourier με 10 όρους. Αναλύστε το πρόγραμμα γραμμή-γραμμή, για να το κατανοήσετε. Για απορίες, στείλτε e-mail στη λίστα.

```
T0 = 2;           % Periodos shmatos (se sec) (epilegw opoia 8elw)
d = T0/600;       % Posa shmeia ana periodo 8elw?
D = 3;            % Poses periodous 8elw na exw?
N = 10;           % Posous orous sth seira Fourier na ypologisw?
A0 = 0;           % O prwtos oros einai mhden sto paradeigma mas
k = 0:N-1;        % 8elw N orous ths seiras
Ak = 4/pi * 1./(2*k+1);      % Oi 10 prwtoi oroi ths seiras
t = 0:d:D*T0;                % O xronos t
```

```
w0 = 2*pi/T0;                  % H kyklikh syxnothta (w0 = 2*pi*f0)
x = A0 + Ak*sin( ((2*k' + 1)*w0) * t);   % To shma!!! :)
plot(t,x);                     % Optikopoihsh!
xlabel('Time (sec)');          % Gia omorfia :)
ylabel('Amplitude');           % Gia omorfia :)
title('Xmmmm... douleuei!'); % Gia omorfia :)
```

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: *Σειρά Fourier στο MATLAB*

(β΄) Βρείτε το αναπτυγμα σε σειρά Fourier στο MATLAB, για το σήμα της Άσκησης 3 αυτής της σειράς ασκήσεων. Τροποποιήστε τον παραπάνω κώδικα ώστε να πάρετε το αποτέλεσμα που θέλετε.

8. **Beethoven και Σύνθεση Μουσικής - MATLAB (bonus** 10%**)**

Οι παρακάτω εντολές στο MATLAB δημιουργούν ένα ημιτονοειδές σήμα, διάρκειας $D = 1200$ msec (δηλ. 1.2 sec), συχνότητας $f = 200$ Hz, μηδενικής φάσης μετατόπισης ϕ, και μοναδιαίου πλάτους A, με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 11025$ Hz.

```
fs = 11025;
f = 200;
D = 1200;
t = 0:1/fs:D/1000;
sig = cos(2*pi*f*t);
```

Αν θέλουμε να το ακούσουμε, πληκτρολογούμε

```
soundsc(sig, fs);
```

Στον παρακάτω πίνακα σας δίνονται στην πρώτη στήλη οι πρώτες 13 νότες σε μορφή αριθμού πλήκτρου πιάνου, και δυο παύσεις (0) του έργου του Beethoven, Fur Elise. Στη δεύτερη στηλη είναι οι διάρκειες κάθε νότας σε msec.

```
56 160
55 160
56 160
55 160
56 160
51 160
54 160
52 160
49 320
0 160
40 160
44 160
49 160
51 320
0 160
```

(α′) Υπολογίστε τη συχνότητα σε Hz κάθε νότας στον παραπάνω πίνακα (εξαιρούνται οι παυσεις).

(β′) Συνθέστε τις παραπάνω νότες (με μηδενική φάση και μοναδιαίο πλάτος, οπως στον κώδικα παραπάνω). Προσέξτε, οι παύσεις είναι απλά ένα μηδενικό διάνυσμα διάρκειας 160 ms. Αποθηκεύστε κάθε νότα σε μια μεταβλητή-διάνυσμα, π.χ. την πρώτη νότα στη μεταβλητή $s1$, τη δεύτερη νότα στη μεταβλητή $s2$, κ.ο.κ.

(γ′) Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω μεταβλητές - διανύσματα που μόλις φτιάξατε $(s1, s2, \cdots)$, δημιουργήστε ένα μεγαλύτερο σήμα που περικλείει όλα τα παραπάνω σήματα, δηλ. ένα μεγαλύτερο σήμα που αποτελείται από τα επιμέρους σήματα το ένα δίπλα στο άλλο. Αυτό λέγεται συνένωση (concatenation). Για να το κάνετε αυτο, πολύ απλά γράφετε (έστω ότι συνενώνετε τα τρια πρώτα σήματα)

```
s = [s1 s2 s3];
```

Αν ονομάσατε το μεγαλύτερο σημα που δημιουργήσατε ως music, τότε με την εντολή

```
soundsc(music, fs);
```

μπορειτε να ακούσετε τη μουσική που μόλις συνθέσατε! :-)