ΗΥ215
Λύσεις 2ης σειράς ασκήσεων

1. **Εξερευνώντας την ιδέα του Fourier**

   (α′) Αφού το σήμα είναι περιοδικό, τότε $f_k = kf_0$. Αν θεωρήσουμε ότι η σταθερά δε λαμβάνεται υπόψην, άρα το μέτρημα ξεκινά από το ημίτονο της 1ης αρμονικής, τότε η συχνότητα του 8ου συνημιτόνου είναι $f_k = 8f_0 = \frac{8}{T_0}$.

   (β′) Το σήμα είναι περιοδικό, γιατί
   $$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{1/3} = 3 \tag{1}$$
   που είναι λόγος ακεραίων. Η περίοδός του είναι $T_0 = \text{ΕΚΠ}\{1, 1/3\} = 1$ sec. Προφανώς, $f_0 = \frac{1}{T_0} = 1$ Hz, και άρα η σειρά Fourier έχει όρους που έχουν συχνότητες πολλαπλάσιες της $f_0 = 1$. Δεδομένου ότι τα A_k είναι θετικά πάντα, με χρήση των σχέσεων του Euler για τη μετατροπή των αρνητικών προσημων σε θετικά, θα είναι $A_1 = 2, A_3 = 3,\ f_1 = f_0 = 1, f_3 = 3f_0 = 3$ Hz, και $\phi_1 = 0, \phi_3 = -3\pi/4$.

   (γ′) Σε αυτην την περίπτωση το σήμα δεν είναι περιοδικό, γιατί
   $$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{\pi/10} = \frac{10}{\pi} \tag{2}$$
   που δεν είναι λόγος ακεραίων, άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.

2. **Φάσματα Πλάτους και Φάσης**

   (α′) Θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \{3 + 2\sin(2\pi t - \pi/8)\}\cos(2\pi 4t) \\
&= 3\cos(2\pi 4t) + 2\cos(2\pi 4t)\sin(2\pi t - \pi/8) \\
&= 3\cos(2\pi 4t) + \left(e^{j2\pi 4t} + e^{-j2\pi 4t}\right)\left(\frac{1}{2j}e^{j2\pi t}e^{-j\pi/8} - \frac{1}{2j}e^{-j2\pi t}e^{j\pi/8}\right) \\
&= 3\cos(2\pi 4t) + \frac{1}{2j}e^{j2\pi 4t}e^{j2\pi t}e^{-j\pi/8} - \frac{1}{2j}e^{j2\pi 4t}e^{-j2\pi t}e^{j\pi/8} \\
&+ \frac{1}{2j}e^{-j2\pi 4t}e^{j2\pi t}e^{-j\pi/8} - \frac{1}{2j}e^{-j2\pi 4t}e^{-j2\pi t}e^{j\pi/8} \\
&= 3\cos(2\pi 4t) + \frac{1}{2j}e^{j2\pi 5t}e^{-j\frac{\pi}{8}} - \frac{1}{2j}e^{j2\pi 3t}e^{j\frac{\pi}{8}} + \frac{1}{2j}e^{-j2\pi 3t}e^{-j\frac{\pi}{8}} - \frac{1}{2j}e^{-j2\pi 5t}e^{j\frac{\pi}{8}} \\
&= 3\cos(2\pi 4t) + \frac{1}{2j}e^{j(2\pi 5t - \frac{\pi}{8})} - \frac{1}{2j}e^{j(2\pi 3t + \frac{\pi}{8})} + \frac{1}{2j}e^{-j(2\pi 3t + \frac{\pi}{8})} - \frac{1}{2j}e^{-j(2\pi 5t - \frac{\pi}{8})}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 3\cos(2\pi 4t) + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j(2\pi 5t-\frac{\pi}{8})} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j(2\pi 3t+\frac{\pi}{8})} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{-j(2\pi 3t+\frac{\pi}{8})} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j(2\pi 5t-\frac{\pi}{8})} \\
&= 3\cos(2\pi 4t) + \frac{1}{2}e^{j(2\pi 5t-\frac{5\pi}{8})} + \frac{1}{2}e^{j(2\pi 3t+\frac{5\pi}{8})} + \frac{1}{2}e^{-j(2\pi 3t+\frac{5\pi}{8})} + \frac{1}{2}e^{-j(2\pi 5t-\frac{5\pi}{8})} \\
&= 3\cos(2\pi 4t) + \cos\left(2\pi 3t + \frac{5\pi}{8}\right) + \cos\left(2\pi 5t - \frac{5\pi}{8}\right) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

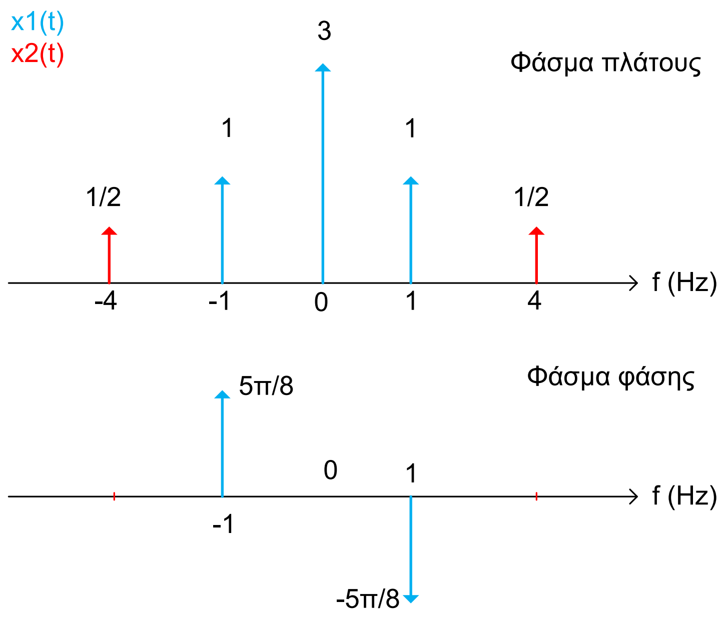
(β′) Είναι

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \{3 + 2\sin(2\pi t - \pi/8)\} = 3 + 2\Big(\frac{1}{2j}e^{j2\pi t}e^{-j\pi/8} - \frac{1}{2j}e^{j2\pi t}e^{j\pi/8}\Big) \\
&= 3 + \frac{1}{j}e^{j2\pi t}e^{-j\pi/8} - \frac{1}{j}e^{j2\pi t}e^{j\pi/8} \\
&= 3 + e^{-j\pi/2}e^{j2\pi t}e^{-j\pi/8} + e^{j\pi/2}e^{j2\pi t}e^{j\pi/8} \\
&= 3 + e^{j2\pi t}e^{-j5\pi/8} + e^{-j2\pi t}e^{j5\pi/8} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

και

$$
x_2(t) = \cos(2\pi 4t) = \frac{1}{2}e^{j2\pi 4t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 4t} \qquad (5)
$$

Το φάσμα πλάτους και φάσης των $x_1(t), x_2(t)$ φαίνονται στο σχήμα 1, στο ίδιο γράφημα, με αλλο χρώμα, για συντομία.

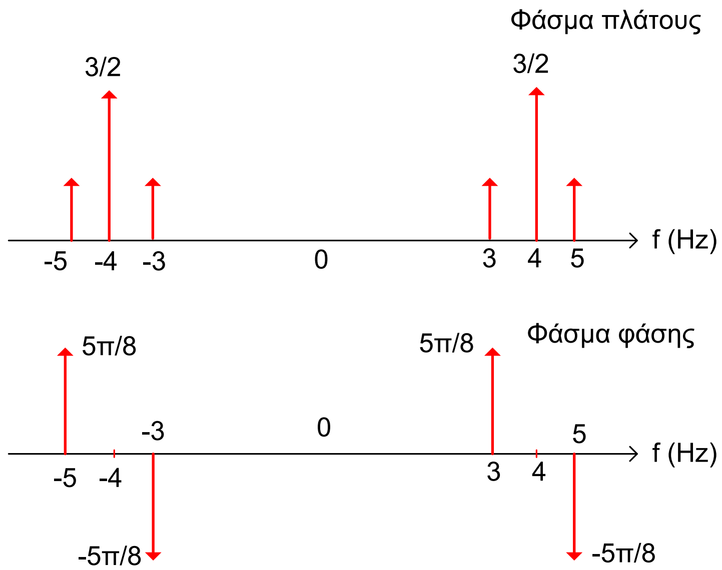


Σχήμα 1: Φάσματα πλάτους και φάσης των $x_1(t), x_2(t)$.

(γ') Είναι

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{3}{2}e^{j2\pi 4t} + \frac{3}{2}e^{-j2\pi 4t} \\
&+ \frac{1}{2}e^{j(2\pi 5t - \frac{5\pi}{8})} + \frac{1}{2}e^{j(2\pi 3t + \frac{5\pi}{8})} \\
&+ \frac{1}{2}e^{-j(2\pi 3t + \frac{5\pi}{8})} + \frac{1}{2}e^{-j(2\pi 5t - \frac{5\pi}{8})}
\end{aligned} \tag{6}
$$

Το φάσμα πλάτους και φάσης του $x(t)$ φαίνεται στο σχήμα 2. Παρατηρούμε οτι το φάσμα του σήματος $x_1(t)$ έχει μεταφερθεί γύρω από τη συχνότητα του σήματος $x_2(t)$.



Σχήμα 2: Φάσματα πλάτους και φάσης του $x(t)$.

3. **Ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier - I**

(α') Είναι

$$
\begin{aligned}
X_0 &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\left(2 - \frac{2}{T_0}t\right)dt \\
&= \frac{1}{T_0}\left(2t - \frac{t^2}{T_0}\right)\Big|_0^{T_0} \\
&= \frac{1}{T_0}\left(2T_0 - \frac{T_0^2}{T_0}\right) = 1
\end{aligned} \tag{7}
$$

και

$$
\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\left(2 - \frac{2}{T_0}t\right)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\
&= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} 2e^{-j2\pi k f_0 t}dt - \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\frac{2}{T_0}te^{-j2\pi k f_0 t}dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} e^{-j2\pi k f_0 t}dt - \frac{2}{T_0^2}\int_0^{T_0} te^{-j2\pi k f_0 t}dt \\
&= \frac{2}{T_0}\frac{1}{-j2\pi k f_0}e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_0^{T_0} - \frac{2}{T_0^2}\frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{(-j2\pi k f_0)}\Big(t - \frac{1}{(-j2\pi k f_0)}\Big)\Big|_0^{T_0} \\
&= -\frac{1}{j\pi k}e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_0^{T_0} + \frac{2}{T_0^2}\frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{j2\pi k f_0}\Big(t + \frac{1}{j2\pi k f_0}\Big)\Big|_0^{T_0} \\
&= -\frac{1}{j\pi k}e^{-j2\pi k} + \frac{1}{j\pi k} + \frac{2}{T_0^2}\frac{e^{-j2\pi k f_0 T_0}}{j2\pi k f_0}\Big(T_0 + \frac{1}{j2\pi k f_0}\Big) - \frac{2}{T_0^2}\frac{1}{j2\pi k f_0}\frac{1}{j2\pi k f_0} \\
&= -\frac{1}{j\pi k} + \frac{1}{j\pi k} + \frac{2}{j2\pi k T_0}\Big(T_0 + \frac{1}{j2\pi k f_0}\Big) + \frac{1}{2\pi^2 k^2} \\
&= \frac{2}{j2\pi k T_0}\Big(T_0 + \frac{1}{j2\pi k f_0}\Big) + \frac{1}{2\pi^2 k^2} \\
&= \frac{1}{j\pi k} - \frac{2}{4\pi^2 k^2} + \frac{1}{2\pi^2 k^2} \\
&= \frac{1}{j\pi k} - \frac{1}{2\pi^2 k^2} + \frac{1}{2\pi^2 k^2} \\
&= \frac{1}{j\pi k} \\
&= \frac{1}{\pi k}e^{-j\pi/2} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

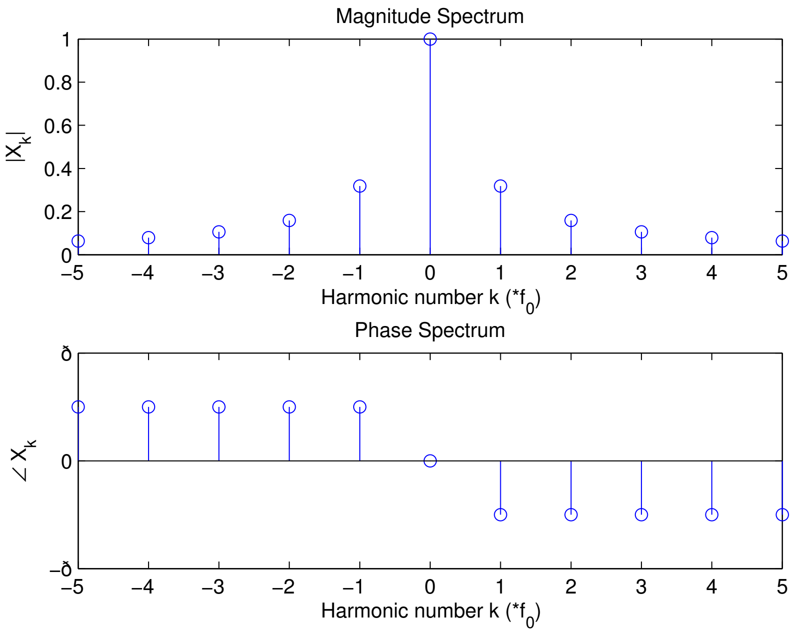
με $|X_k| = \dfrac{1}{\pi|k|}$ και $\angle X_k = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & k > 0 \\ \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, & k < 0 \end{cases}$.

Άρα,

$$
\begin{aligned}
x(t) &= X_0 + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \\
&= 1 + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{\pi k}e^{-j\pi/2}e^{j2\pi k f_0 t} \\
&= 1 + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{\pi k}e^{j(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2})} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi k}\cos\Big(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2}\Big) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \qquad (9)
\end{aligned}
$$

γιατι $A_k = 2|X_k|$ και $\phi_k = \angle X_k$.

(β΄) Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνεται στο σχήμα 3.



Σχήμα 3: Φάσματα πλάτους και φάσης της σειράς Fourier της Άσκησης 3.

4. **Ανάπτυγμα σε Σειρα Fourier - II**

Είναι

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sin^3(27\pi t) = \left(\frac{e^{j27\pi t} - e^{-j27\pi t}}{2j}\right)^3 \\
&= \frac{(e^{j27\pi t} - e^{-j27\pi t})^3}{-8j} \\
&= -\frac{1}{8j}(e^{j81\pi t} - 3e^{j54\pi t}e^{-j27\pi t} + 3e^{j27\pi t}e^{-j54\pi t} - e^{-j81\pi t}) \\
&= -\frac{1}{8j}\Big((e^{j81\pi t} - e^{-j81\pi t}) - 3(e^{j27\pi t} - e^{-j27\pi t})\Big) \\
&= -\frac{1}{4}\frac{e^{j81\pi t} - e^{-j81\pi t}}{2j} + \frac{3}{4}\frac{e^{j27\pi t} - e^{-j27\pi t}}{2j} \\
&= \frac{3}{4}\sin(27\pi t) - \frac{1}{4}\sin(81\pi t)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Άρα η περίοδός του είναι

$$
\omega_0 = \text{MK}\Delta\{27\pi, 81\pi\} = 27\pi \Longrightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{27\pi} = \frac{2}{27}\ \text{sec} \tag{11}
$$

5. **Ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier - III**

Θα έχουμε

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} \sin(2\pi f_0 t)dt \\ &= -\frac{1}{2\pi f_0}\frac{1}{T_0}\cos(2\pi f_0 t)\Big|_0^{T_0/2} \\ &= -\frac{1}{2\pi}(\cos(\pi) - \cos(0)) \\ &= \frac{1}{\pi} \end{aligned} \tag{12}$$

και

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} \sin(2\pi f_0 t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\ &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} \Big(-\frac{1}{2\pi f_0}\cos(2\pi f_0 t)\Big)' e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\ &= -\frac{1}{2\pi f_0 T_0}\cos(2\pi f_0 t)e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_0^{T_0/2} + \frac{1}{2\pi f_0 T_0}\int_0^{T_0/2}\cos(2\pi f_0 t)(e^{-j2\pi k f_0 t})'dt \\ &= -\frac{1}{2\pi}\cos(\pi)e^{-j\pi k} + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{T_0/2} j2\pi k f_0\cos(2\pi f_0 t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{-j\pi k} + \frac{1}{2\pi} - jkf_0\int_0^{T_0/2}\cos(2\pi f_0 t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{-j\pi k} + \frac{1}{2\pi} - jkf_0\int_0^{T_0/2}\Big(\frac{1}{2\pi f_0}\sin(2\pi f_0 t)\Big)' e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{-j\pi k} + \frac{1}{2\pi} - \frac{jk}{2\pi}\sin(2\pi f_0 t)e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_0^{T_0/2} + \frac{jk}{2\pi}\int_0^{T_0/2}\sin(2\pi f_0 t)(e^{-j2\pi k f_0 t})'dt \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{-j\pi k} + \frac{1}{2\pi} + \frac{jk}{2\pi}\int_0^{T_0/2}\sin(2\pi f_0 t)(-j2\pi k f_0)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{-j\pi k} + \frac{1}{2\pi} + k^2 f_0\int_0^{T_0/2}\sin(2\pi f_0 t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{-j\pi k} + \frac{1}{2\pi} + k^2\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2}\sin(2\pi f_0 t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{-j\pi k} + \frac{1}{2\pi} + k^2 X_k \\ &= \frac{1}{2\pi}(e^{-j\pi k} + 1) + k^2 X_k \end{aligned} \tag{13}$$

Άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned} X_k = \frac{1}{2\pi}(e^{-j\pi k} + 1) + k^2 X_k \quad &\iff \quad X_k - k^2 X_k = \frac{1}{2\pi}(e^{-j\pi k} + 1) \\ &\iff \quad X_k(1 - k^2) = \frac{1}{2\pi}(e^{-j\pi k} + 1) \\ &\iff \quad X_k = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-j\pi k} + 1}{1 - k^2} \end{aligned} \tag{14}$$

Όμως ξέρουμε ότι $e^{-j\pi k} = (-1)^k$, άρα

$$X_k = \frac{1}{2\pi}\frac{(-1)^k+1}{1-k^2} \tag{15}$$

Βλέπουμε ομως ότι η παραπάνω έκφραση δεν ορίζεται για $k = \pm 1$, άρα πρέπει να υπολογίσουμε το X_1 ξεχωριστα (προφανώς, επειδή το σήμα μας είναι πραγματικό, $X_{-1} = X_1^*$). Θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} \sin(2\pi f_0 t)e^{-j2\pi f_0 t}dt \\
&= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} \Big(\sin(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 t) - j\sin^2(2\pi f_0 t)\Big)dt \\
&= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} \sin(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 t)dt - \frac{1}{T_0}j\int_0^{T_0/2} \sin^2(2\pi f_0 t)dt \\
&= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} \frac{1}{2}\sin(4\pi f_0 t)dt - \frac{1}{T_0}j\int_0^{T_0/2} \sin^2(2\pi f_0 t)dt \\
&= \frac{1}{2T_0}\int_0^{T_0/2} \Big(-\frac{1}{4\pi f_0}\cos(4\pi f_0 t)\Big)'dt - \frac{1}{T_0}j\int_0^{T_0/2} \frac{1-\cos(4\pi f_0 t)}{2}dt \\
&= -\frac{1}{8\pi}\cos(4\pi f_0 t)\Big|_0^{T_0/2} - \frac{1}{2T_0}jt\Big|_0^{T_0/2} + \frac{1}{2T_0}j\frac{1}{4\pi f_0}\sin(4\pi f_0 t)\Big|_0^{T_0/2} \\
&= -\frac{1}{8}(\cos(2\pi)-\cos(0)) - \frac{1}{2T_0}j\frac{T_0}{2} + \frac{j}{8\pi}(\sin(2\pi)-\sin(0)) \\
&= -\frac{j}{4} \\
&= \frac{1}{4}e^{-j\pi/2}
\end{aligned} \tag{16}$$

Άρα:

$$X_k = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi(1-k^2)}, & k \text{ άρτιο} \\ 0, & k \text{ περιττό}, k \neq \pm 1 \\ \dfrac{1}{4}e^{-j\pi/2}, & k = \pm 1 \end{cases} \tag{17}$$

Άρα τελικά το σήμα μας θα γράφεται ως :

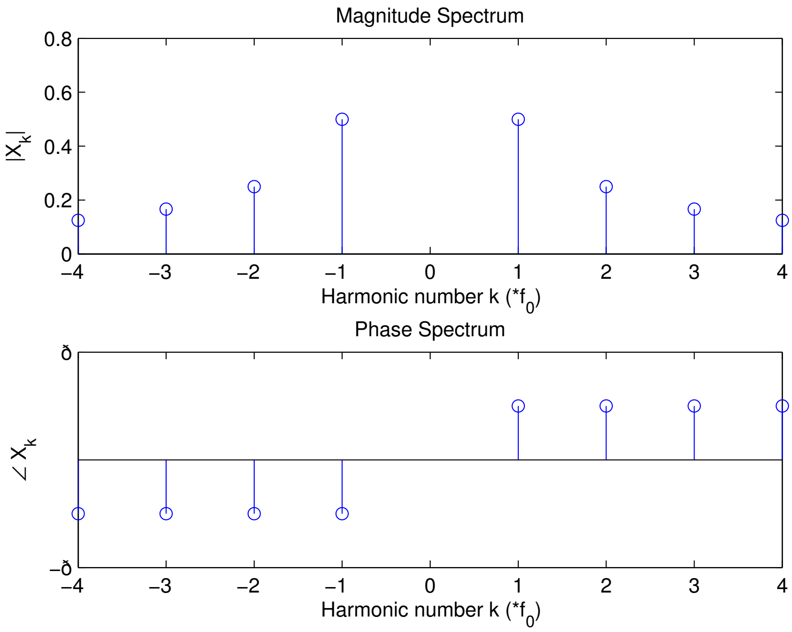
$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}e^{j\pi/2}e^{-j2\pi f_0 t} + \frac{1}{4}e^{-j\pi/2}e^{j2\pi f_0 t} + \sum_{k \text{ άρτιο}} \frac{1}{\pi(1-k^2)}e^{j2\pi k f_0 t} \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}e^{-j(2\pi f_0 t - \pi/2)} + \frac{1}{4}e^{j(2\pi f_0 t - \pi/2)} + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1-(2k)^2)}e^{j2\pi 2k f_0 t} \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}e^{-j(2\pi f_0 t - \pi/2)} + \frac{1}{4}e^{j(2\pi f_0 t - \pi/2)} + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1-4k^2)}e^{j2\pi 2k f_0 t} \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}e^{-j(2\pi f_0 t - \pi/2)} + \frac{1}{4}e^{j(2\pi f_0 t - \pi/2)} + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{\pi(4k^2-1)}e^{j\pi}e^{j2\pi 2k f_0 t} \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}e^{-j(2\pi f_0 t - \pi/2)} + \frac{1}{4}e^{j(2\pi f_0 t - \pi/2)} + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{\pi(4k^2-1)}e^{j(2\pi 2k f_0 t + \pi)}
\end{aligned} \tag{18}$$

Τέλος, μπορούμε να το γράψουμε ως μονόπλευρη σειρά Fourier ως:

$$x(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 t - \pi/2) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(4k^2-1)}\cos(4\pi k f_0 t + \pi) \tag{19}$$

6. **Συντελεστές Fourier**

(α′) Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνεται στο σχήμα 4.



Σχήμα 4: Φάσματα πλάτους και φάσης των συντελεστών Fourier της Άσκησης 6.

(β′) Επειδή ισχύει $X_k = X^*_{-k}$, το σήμα στο χρόνο στο οποίο αντιστοιχούν οι συντελεστες αυτοί είναι πραγματικό.

(γ′) Θα είναι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \frac{d}{dt}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \frac{d}{dt} e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k j2\pi k f_0 e^{j2\pi k f_0 t} \end{aligned} \tag{20}$$

άρα οι συντελεστές της σειράς Fourier που περιγράφει την παράγωγο ενός σήματος είναι οι

$$X'_k = j2\pi k f_0 X_k \tag{21}$$

Στο συγκεκριμένο παραδειγμα, ϑα είναι $X'_k = -\pi f_0$.