ΗΥ215: 1η Σειρά Ασκήσεων

Τρίτη 25 Φεβρουαρίου 2014

Παράδοση: Παρασκευή 7 Μαρτίου 2014

Απορίες: hy215-list@csd.uoc.gr

1. **Άλγεβρα μιγαδικών αριθμών I**

   Θεωρήστε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = 2 + 2j, w = 2 - 2j, v = -2 + 2j, u = -2 - 2j$.

   (α′) Στο μιγαδικό επίπεδο, βρείτε το σημείο (x, y) που αντιστοιχεί στο μιγαδικό z και μετά ζωγραφίστε το διάνυσμα $\vec{z}$ που ενώνει το σημείο (x, y) με την αρχή των αξόνων. Ποιό είναι το μέτρο και η φάση του z (ή του $\vec{z}$); Υπολογίστε τα αριθμητικά, και δείξτε σε τι αντιστοιχούν επάνω στο μιγαδικό επίπεδο.

   (β′) Κάντε το ίδιο για τους υπόλοιπους μιγαδικούς αριθμούς, w, v, u. Σχεδιάστε τα αντίστοιχα σημεία και διανύσματα στο μιγαδικό επίπεδο, και βρείτε το άθροισμά τους, $z + w + v + u$ αναλυτικά (με χρήση άλγεβρας) και γραφικά (προσθέτοντας τα διανύσματα στο επίπεδο).

   (γ′) Βρείτε τους λόγους $z/w, w/v, u/z$. Βρείτε το πραγματικό και φανταστικό τους μέρος, καθώς και το μέτρο και τη φάση τους.

2. **Άλγεβρα μιγαδικών αριθμών II**

   Θεωρήστε μια συνάρτηση του $z = 1 + 1j$,

   $$w = e^z$$

   (α′) Βρείτε το $\ln(w)$.

   (β′) Βρειτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του w.

   (γ′) Βρείτε το $w + w^*$, όπου w^* είναι ο συζυγής του w.

   (δ′) Βρειτε το μέτρο, $|w|$, και τη φάση, $\angle w$, του w.

   (ε′) Βρείτε το $|\ln(w)|^2$.

   (ϛ′) Βρειτε το $\cos(1)$ ως συνάρτηση του w, με χρήση της εξίσωσης του Euler.

3. **Άλγεβρα μιγαδικών αριθμών III**

   (α′) Ο συζυγής μιγαδικός του $z = x + yj$ είναι ο $z^* = x - yj$. Με χρήση αυτών των καρτεσιανών αναπαραστάσεων, δειξτε ότι

i. $zz^* = x^2 + y^2$

ii. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{z^*}{|z|^2}$

(β′) Δείξτε οτι είναι πολύ ευκολότερο να βρείτε τα παραπάνω αποτελέσματα με χρήση των πολικών αναπαραστάσεων, $z = |z|e^{j\theta}$, όπου $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ είναι το μέτρο του μιγαδικού z, και $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ είναι η φάση του. Έτσι, θα δείτε ότι όποτε θέλουμε να βρούμε γινόμενο ή πηλίκο μιγαδικών αριθμών, η πολική μορφή είναι πιο βολική για τις πράξεις μας.

(γ′) Όταν ομως θέλουμε να βρούμε αθροίσματα ή διαφορές μιγαδικών αριθμών, η καρτεσιανή αναπαράσταση είναι πιο βολική. Δειξτε ότι για δυο μιγαδικούς αριθμούς $z = x + jy$ και $w = v + uj$, ισχύει

$$(z + w)^* = z^* + w^*$$

Αντιθέτως, δείξτε ότι η ισότητα

$$(zw)^* = z^* w^*$$

αποδεικνύεται ευκολότερα με χρήση πολικής μορφης των μιγαδικών.

(δ′) Αν τα παραπάνω δε σας πείθουν :-) θεωρήστε τον πολλαπλασιασμό δυο μιγαδικών

$$\begin{aligned} z &= r\cos(\theta) + jr\sin(\theta) \\ w &= \rho\cos(\phi) + j\rho\sin(\phi) \end{aligned}$$

Βρείτε τις πολικές μορφές τους και μετά βρειτε το zw με χρήση καρτεσιανής και πολικής μορφής. Γράψτε ποιά προτιμάτε από τις δυο, ως προς την ευκολία τους.

4. **Διανύσματα και μιγαδικοί αριθμοί**

Με χρήση των διανυσματικών αναπαραστάσεων των μιγαδικών αριθμών ειναι πολύ εύκολο να δείξουμε ορισμένες ενδιαφέρουσες ανισότητες.

(α′) Είναι αληθές ότι για έναν μιγαδικό $z = x + yj$ ισχύει ότι $|x| \leq |z|$; Δείξτε το γεωμετρικά στο μιγαδικό επίπεδο, αναπαριστωντας το z ως διάνυσμα.

(β′) Η πολύ γνωστη *τριγωνική ανισότητα* ορίζει ότι για κάθε μιγαδικούς (ή πραγματικούς) αριθμούς z και u, ισχύει ότι

$$|z + u| \leq |z| + |u|$$

Δείξτε ενα γεωμετρικό παράδειγμα που την επαληθευεί.

5. **Εξίσωση Euler και ορθογωνικότητα ημιτόνων**

Η εξίσωση του Euler[1]

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

είναι πολύ χρήσιμη όχι μόνο στην παραγωγή της πολικής και καρτεσιανής μορφής των μιγαδικών αριθμών αλλά και σε πολλά άλλα προβλήματα, μερικά εκ των οποίων θα δούμε σε αυτήν την άσκηση.

(α′) Έστω ότι θέλετε να βρείτε την τριγωνομετρική ταυτότητα που αντιστοιχει στο

$$\sin(a)\sin(b)$$

αλλά δεν τη θυμάστε απ′ έξω (ούτε έχετε internet για να το google-άρετε :-)). Χρησιμοποιήστε την εξίσωση του Euler για να εκφράσετε τα ημίτονα με όρους μιγαδικών εκθετικών, πολλαπλασιάστε τα, και χρησιμοποιήστε ξανά την εξίσωση Euler για να ''μαζέψετε'' τα εκθετικά πάλι πίσω σε ημίτονα.

(β′) Όπως θα δούμε στη συνέχεια του μαθήματος, δυο *περιοδικά* σήματα $x(t)$ και $y(t)$ με περίοδο T_0 είναι *ορθογώνια* αν το ολοκλήρωμα του γινομένου τους σε μια περίοδο T_0 ισούται με 0, δηλ.

$$\int_{T_0} x(t)y(t)dt = 0$$

Για παράδειγμα, έστω $x(t) = \cos(\pi t)$ και $y(t) = \sin(\pi t)$. Πρώτα, αποδείξτε οτι τα δυο αυτά σήματα επαναλαμβάνονται κάθε $T_0 = 2$, δηλ. δείξτε οτι

$$\begin{aligned} x(t+2) &= x(t) \\ y(t+2) &= y(t) \end{aligned}$$

Έτσι, το $T_0 = 2$ είναι η περίοδός τους. Έπειτα, χρησιμοποιήστε την αναπαράσταση ενός συνημιτόνου ως άθροισμα εκθετικών, δηλ. την

$$\cos(at) = \frac{e^{jat} + e^{-jat}}{2}$$

για να εκφράσετε το γινόμενο στο ολοκλήρωμα με όρους εκθετικών, και να υπολογίσετε τελικά το ολοκλήρωμα.

[1] Η εξίσωση του Euler, σε μια πιο απλή μορφή που συνήθως εμφανίζεται ($e^{j\pi} + 1 = 0$), θεωρείται μια από τις ομορφότερες μαθηματικές εξισώσεις ολων των εποχών. Κι αυτό γιατί συνδυάζει τρεις βασικές πράξεις - πρόσθεση, ύψωση σε δύναμη, και πολλαπλασιασμό - και τέσσερις θεμελιώδεις αριθμούς όλων των επιστημών - $\pi, e, 0, 1$.

6. **Αθροίσματα ημιτόνων ίδιας συχνότητας**

Βρείτε το άθροισμα

$$x(t) = 2\cos\left(2\pi 10t + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}\cos\left(2\pi 10t - \frac{3\pi}{4}\right)$$

στη μορφή

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

<u>Βοήθεια:</u> Χρησιμοποιήστε ότι αν

$$x(t) = \Re\{(z_1 + z_2)e^{j2\pi f_0 t}\}$$

τότε

$$x(t) = \Re\{Ae^{j2\pi f_0 t}\}$$

με

$$A = \sqrt{(\Re\{z_1\} + \Re\{z_2\})^2 + (\Im\{z_1\} + \Im\{z_2\})^2}e^{-j\tan^{-1}\frac{\Im\{z_1\}+\Im\{z_2\}}{\Re\{z_1\}+\Re\{z_2\}}}$$

7. **Σήματα σειρήνας - Chirp signals - MATLAB (bonus 10%)**

Το να ακούσει κανείς απλά ημίτονα δεν είναι και πολύ ενδιαφέρον. Τεχνικές διαμόρφωσης ή άλλου είδους τεχνικές χρησιμοποιούνται και μας δίνουν πιο ενδιαφέροντες ήχους. Τα σήματα σειρήνας, τα οποία είναι ημίτονα με χρονικά μεταβαλλόμενες συχνότητες, αποτελούν ένα κομμάτι από αυτούς τους πιο ενδιαφέροντες ήχους που αναφέραμε. Για παράδειγμα, έστω το παρακάτω σήμα σειρήνας

$$x(t) = A\cos(2\pi f_c t + s(t))$$

(α′) Έστω $A = 1, f_c = \frac{1}{\pi}$ και $s(t) = t^2/4$. Χρησιμοποιήστε το MATLAB για να απεικονίσετε το σημα $x(t)$ στο διάστημα $0 \le t \le 40$, με βήμα 0.05, με χρήση της συνάρτησης plot. Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση sound του MATLAB για να το ακούσετε (γράψτε help sound για να δείτε πως συντάσσεται και θεωρήστε την πιο απλή της σύνταξη).

(β′) Έστω $A = 1, f_c = \frac{1}{\pi}$ και $s(t) = -2\sin(t)$. Χρησιμοποιήστε το MATLAB για να απεικονίσετε το σημα $x(t)$ στο διάστημα $0 \le t \le 40$, με βήμα 0.05, με χρήση της συνάρτησης plot. Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση sound του MATLAB για να το ακούσετε.

(γ′) Η συχνότητα αυτού του είδους των σημάτων δεν είναι τόσο ξεκάθαρη, γιατί αλλάζει συνεχώς, κάθε χρονική στιγμή. Η *στιγμιαία συχνότητα* $IF(t)$ είναι η παράγωγος του ορίσματος του συνημιτόνου, ως προς t, επί $\frac{1}{2\pi}$. Για παράδειγμα, για ένα απλό συνημίτονο $A\cos(2\pi f_c t)$, η στιγμιαία συχνότητα δίνεται ως $IF(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}(2\pi f_c t) = \frac{1}{2\pi}2\pi f_c = f_c$. Έτσι, η στιγμιαία συχνότητα συμπίπτει με τη συχνότητα όπως την ορίσατε στο μάθημα. Όμως σε σήματα σειρήνας, αυτή η σύμπτωση δεν ισχύει. Υπολογίστε (στο χαρτί) τις στιγμιαίες συχνότητες των δυο σημάτων παραπάνω. Σχεδιάστε τις στο MATLAB. Έχουν νόημα ως συχνότητες (με τη φυσική σημασία της έννοιας); Εξηγήστε.