ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Διαγώνισμα Προόδου

Διδάσκων: Γ. Στυλιανού

Διάρκεια: 2 ώρες 30 λεπτά

5 Απριλίου 2014

Θέμα 1ο (Μονάδες 15)

Δίνεται το παρακάτω περιοδικό σήμα $x(t)$:

$$x(t) = 2\cos\left(2\pi 300t - \frac{\pi}{9}\right) + \cos\left(2\pi 500t - \frac{\pi}{12}\right) - \sin\left(2\pi 600t + \frac{2\pi}{7}\right)$$

(α′) Βρειτε την περίοδο T_0 του σήματος.

(β′) Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης.

ΛΥΣΗ:

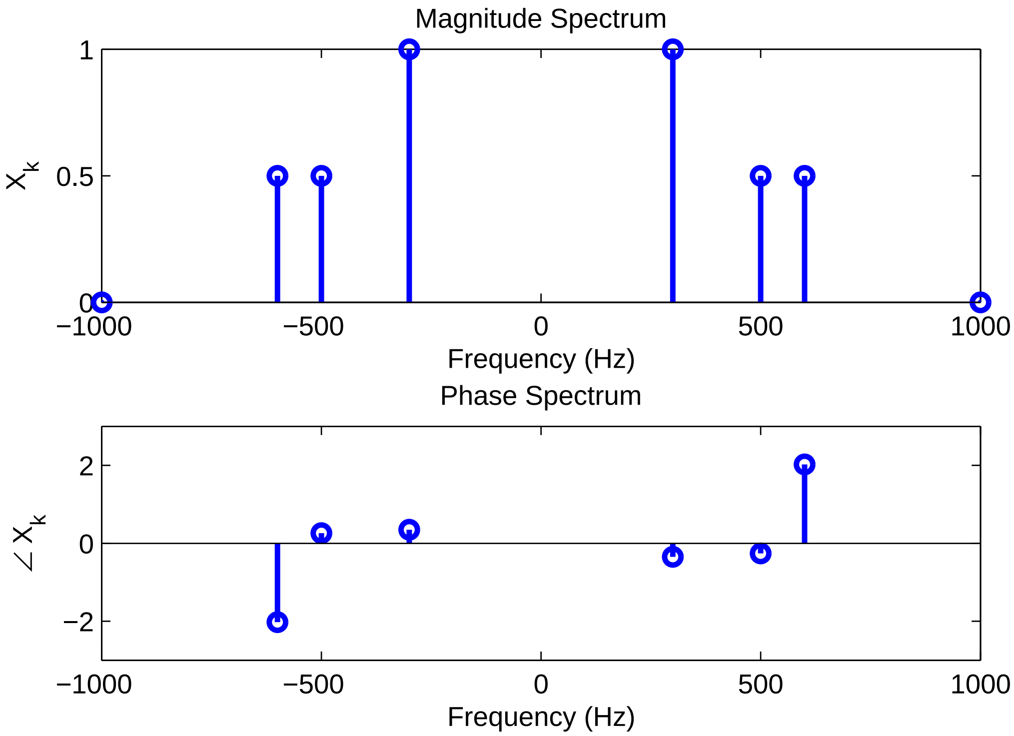
(α′) Είναι

$$f_0 = \text{ΜΚΔ}\{300, 500, 600\} = 100 \text{ Hz, άρα } T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{100} \text{ sec}$$

(β′) Είναι

$$\begin{aligned}
x(t) &= 2\cos\left(2\pi 300t - \frac{\pi}{9}\right) + \cos\left(2\pi 500t - \frac{\pi}{12}\right) - \sin\left(2\pi 600t + \frac{2\pi}{7}\right) \\
&= e^{j2\pi 300t}e^{-j\frac{\pi}{9}} + e^{-j2\pi 300t}e^{j\frac{\pi}{9}} + \frac{1}{2}e^{j2\pi 500t}e^{-j\frac{\pi}{12}} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 500t}e^{j\frac{\pi}{12}} - \\
&- \frac{1}{2j}e^{j2\pi 600t}e^{j\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{2j}e^{-j2\pi 600t}e^{-j\frac{2\pi}{7}} \\
&= e^{j2\pi 300t}e^{-j\frac{\pi}{9}} + e^{-j2\pi 300t}e^{j\frac{\pi}{9}} + \frac{1}{2}e^{j2\pi 500t}e^{-j\frac{\pi}{12}} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 500t}e^{j\frac{\pi}{12}} + \\
&+ \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j2\pi 600t}e^{j\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{-j2\pi 600t}e^{-j\frac{2\pi}{7}} \\
&= e^{j2\pi 300t}e^{-j\frac{\pi}{9}} + e^{-j2\pi 300t}e^{j\frac{\pi}{9}} + \frac{1}{2}e^{j2\pi 500t}e^{-j\frac{\pi}{12}} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 500t}e^{j\frac{\pi}{12}} \\
&+ \frac{1}{2}e^{j2\pi 600t}e^{j(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{7})} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 600t}e^{-j(\frac{2\pi}{7}+\frac{\pi}{2})} \\
&= e^{j2\pi 300t}e^{-j\frac{\pi}{9}} + e^{-j2\pi 300t}e^{j\frac{\pi}{9}} + \frac{1}{2}e^{j2\pi 500t}e^{-j\frac{\pi}{12}} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 500t}e^{j\frac{\pi}{12}} \\
&+ \frac{1}{2}e^{j2\pi 600t}e^{j\frac{11\pi}{14}} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 600t}e^{-j\frac{11\pi}{14}}
\end{aligned}$$

Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνεται στο σχήμα 1.



Σχήμα 1: Φάσμα πλάτους και φάσης Άσκησης 1

<u>Θέμα 2ο</u> (Μονάδες 30)

Έστω το περιοδικό με περιοδο T_0 σημα $x(t)$, το οποίο περιγράφεται σε μια περίοδο ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} -t+2, & 0 \leq t < T_0/2 \\ 0, & T_0/2 \leq t < T_0 \end{cases}$$

Αναπτύξτε το σε εκθετική σειρά Fourier.

<u>ΛΥΣΗ:</u>

Θα έχουμε

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2}(-t+2)dt \\ &= -\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} tdt + 2\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} dt \\ &= -\frac{1}{T_0}\frac{t^2}{2}\Big|_0^{T_0/2} + 2\frac{1}{T_0}t\Big|_0^{T_0/2} \\ &= -\frac{1}{T_0}\frac{T_0^2/4}{2} + 2\frac{1}{T_0}\frac{T_0}{2} \\ &= -\frac{1}{T_0}\frac{T_0^2}{8} + 1 \\ &= 1 - \frac{T_0}{8} \end{aligned}$$

και

$$
\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi kf_0t}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2}(-t+2)e^{-j2\pi kf_0t}dt\\
&= -\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} te^{-j2\pi kf_0t}dt + \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} e^{-j2\pi kf_0t}dt\\
&= -\frac{1}{T_0}\Big(-\frac{e^{-j2\pi kf_0t}}{j2\pi kf_0}\Big(t+\frac{1}{j2\pi kf_0}\Big)\Big)\Big|_0^{T_0/2} - \frac{2}{T_0}\frac{1}{j2\pi kf_0}e^{-j2\pi kf_0t}\Big|_0^{T_0/2}\\
&= \frac{1}{T_0}\frac{e^{-j2\pi kf_0\frac{T_0}{2}}}{j2\pi kf_0}\Big(\frac{T_0}{2}+\frac{1}{j2\pi kf_0}\Big) - \frac{1}{T_0}\frac{1}{j2\pi kf_0}\Big(\frac{1}{j2\pi kf_0}\Big) - \frac{2}{T_0}\frac{1}{j2\pi kf_0}e^{-j2\pi kf_0\frac{T_0}{2}} + \frac{2}{T_0}\frac{1}{j2\pi kf_0}\\
&= \frac{e^{-j\pi k}}{j2\pi k}\Big(\frac{T_0}{2}+\frac{1}{j2\pi kf_0}\Big) - \frac{1}{j2\pi k}\Big(\frac{1}{j2\pi kf_0}\Big) - \frac{2}{j2\pi k}e^{-j\pi k} + \frac{2}{j2\pi k}\\
&= \frac{e^{-j\pi k}}{j2\pi k}\frac{T_0}{2} + \frac{1}{j2\pi kf_0}\frac{e^{-j\pi k}}{j2\pi k} - \frac{1}{j2\pi k}\frac{1}{j2\pi kf_0} - \frac{2}{j2\pi k}e^{-j\pi k} + \frac{2}{j2\pi k}\\
&= \frac{e^{-j\pi k}}{j2\pi k}\frac{T_0}{2} + \frac{T_0}{j2\pi k}\frac{e^{-j\pi k}}{j2\pi k} - \frac{T_0}{j2\pi k}\frac{1}{j2\pi k} - \frac{2}{j2\pi k}e^{-j\pi k} + \frac{2}{j2\pi k}\\
&= \frac{e^{-j\pi k}}{j2\pi k}\frac{T_0}{2} - \frac{T_0}{4\pi^2k^2}e^{-j\pi k} + \frac{T_0}{4\pi^2k^2} - \frac{1}{j\pi k}e^{-j\pi k} + \frac{1}{j\pi k}\\
&= \frac{(-1)^k}{j2\pi k}\frac{T_0}{2} - \frac{T_0}{4\pi^2k^2}(-1)^k + \frac{T_0}{4\pi^2k^2} - \frac{1}{j\pi k}(-1)^k + \frac{1}{j\pi k}\\
&= \frac{(-1)^k}{j2\pi k}\frac{T_0}{2} - \frac{T_0}{4\pi^2k^2}((-1)^k-1) - \frac{1}{j\pi k}((-1)^k-1)
\end{aligned}
$$

Για k άρτιο, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{j2\pi k}\frac{T_0}{2} - \frac{T_0}{4\pi^2k^2}(1-1) + \frac{1}{j\pi k}(1-1)\\
&= \frac{1}{j2\pi k}\frac{T_0}{2}\\
&= \frac{T_0}{4\pi k}e^{-j\pi/2}
\end{aligned}
$$

Για k περιττο, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
X_k &= -\frac{1}{j2\pi k}\frac{T_0}{2} - \frac{T_0}{4\pi^2k^2}(-1-1) + \frac{1}{j\pi k}(-1-1)\\
&= -\frac{T_0}{j4\pi k} + \frac{T_0}{2\pi^2k^2} - \frac{8}{j4\pi k}\\
&= \frac{T_0}{2\pi^2k^2} + \frac{T_0+8}{4\pi k}e^{j\pi/2}
\end{aligned}
$$

Αρα τελικά

$$
X_k = \begin{cases} \dfrac{T_0}{4\pi k}e^{-j\pi/2}, & k \text{ άρτιο}\\[2ex] \dfrac{T_0}{2\pi^2k^2} + \dfrac{T_0+8}{4\pi k}e^{j\pi/2}, & k \text{ περιττό} \end{cases}
$$

και άρα

$$x(t) = -\frac{T_0}{8} + \sum_{k=-\infty, k \text{ άρτιο}}^{\infty} \frac{T_0}{4\pi k} e^{j(2\pi k f_0 t - \pi/2)} + \sum_{k=-\infty, k \text{ περιττό}}^{\infty} \frac{T_0}{2\pi^2 k^2} e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=-\infty, k \text{ περιττό}}^{\infty} \frac{T_0+8}{4\pi k} e^{j(2\pi k f_0 t + \pi/2)}$$

<u>Θέμα 3ο</u> (Μονάδες 30)

Δίνονται τα παρακάτω σήματα:

$$x(t) = -2rect\Big(\frac{t+1}{2}\Big), \quad y(t) = tri(5t) - tri\Big(\frac{t-4}{2}\Big)e^{-j2\pi 2t}$$

(α′) Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier, $X(f), Y(f)$, των σημάτων $x(t), y(t)$.

(β′) Βρείτε και σχεδιάστε την παράγωγο του σήματος $x(t)$.

(γ′) Αν $Z(f) = fX(f)$, βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier, $z(t)$.

(δ′) Βρείτε τη μέση τιμή του σήματος $x(t)$, $\mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$.

<u>ΛΥΣΗ:</u>

(α′) Είναι

$$\begin{aligned}
X(f) &= -2 \cdot 2sinc(2f)e^{j2\pi \cdot 1 \cdot f} = -4sinc(2f)e^{j2\pi f} \\
Y(f) &= \frac{1}{5}sinc^2\Big(\frac{1}{5}f\Big) - 2sinc^2(2(f+2))e^{-j2\pi 4(f+2)} \\
&= \frac{1}{5}sinc^2\Big(\frac{1}{5}f\Big) - 2sinc^2(2(f+2))e^{-j2\pi 4f}e^{-j2\pi 8} \\
&= \frac{1}{5}sinc^2\Big(\frac{1}{5}f\Big) - 2sinc^2(2(f+2))e^{-j2\pi 4f} \cdot 1 \\
&= \frac{1}{5}sinc^2\Big(\frac{1}{5}f\Big) - 2sinc^2(2(f+2))e^{-j2\pi 4f}
\end{aligned}$$

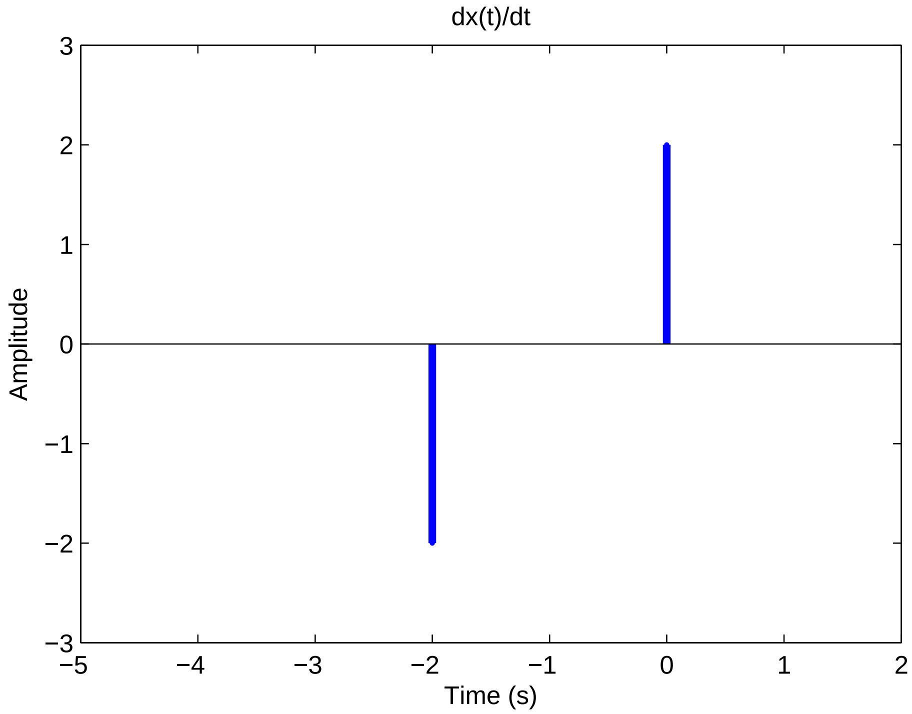
(β′) Είναι

$$\frac{d}{dt}x(t) = -2\frac{d}{dt}rect\Big(\frac{t+1}{2}\Big) = -2\delta(t+2) + 2\delta(t)$$

και το σήμα φαίνεται στο σχήμα 2.

(γ′) Είναι

$$\begin{aligned}
Z(f) &= fX(f) \\
j2\pi Z(f) &= j2\pi f X(f) = F\Big\{\frac{d}{dt}x(t)\Big\} = F\Big\{-2\delta(t+2) + 2\delta(t)\Big\} \\
Z(f) &= F\Big\{-\frac{2}{j2\pi}\delta(t+2)\} + \frac{2}{j2\pi}\delta(t)\Big\} \\
Z(f) &= F\Big\{\frac{1}{\pi}e^{j\pi/2}\delta(t+2)\} + \frac{1}{\pi}e^{-j\pi/2}\delta(t)\Big\}
\end{aligned}$$



Σχήμα 2: Παράγωγος Σήματος $x(t)$ Άσκησης 3

Άρα

$$Z(f) = F\{z(t)\} \longleftrightarrow z(t) = \frac{1}{\pi}e^{j\pi/2}\delta(t+2) + \frac{1}{\pi}e^{-j\pi/2}\delta(t)$$

(δ′) Είναι

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi\cdot 0\cdot t}dt = X(0) = -4sinc(2f)e^{j2\pi f}\Big|_{f=0} = -4$$

Θέμα 4ο (Μονάδες 15)

Ένα πραγματικό, περιοδικό σήμα με περίοδο $T_0 = 0.01$ sec αναλύεται σε εκθετική σειρά Fourier. Σας δίνονται οι συντελεστές για $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} X_0 &= 2, \\ X_2 &= 3e^{j(2\pi 2f_0t+\frac{\pi}{4})}, \\ X_4 &= -e^{j2\pi 4f_0t}, \\ X_6 &= e^{j(2\pi 6f_0t+\frac{3\pi}{7})} \end{aligned}$$

Γράψτε το σήμα $x(t)$ ως μονόπλευρη σειρά Fourier, δηλ. ως άθροισμα ημιτόνων ή/και συνημιτόνων.

ΛΥΣΗ:

Αφού το σήμα είναι πραγματικό, θα έχει και X_{-k} για τα οποία θα ισχύει $X_{-k} = X_K^*$. Άρα αφού

$$\begin{aligned} X_2 &= 3e^{j(2\pi 2 f_0 t + \frac{\pi}{4})}, \\ X_4 &= -e^{j2\pi 4 f_0 t}, \\ X_6 &= e^{j(2\pi 6 f_0 t + \frac{3\pi}{7})} \end{aligned}$$

θα είναι και

$$\begin{aligned} X_{-2} = X_2^* &= 3e^{-j(2\pi 2 f_0 t + \frac{\pi}{4})}, \\ X_{-4} = X_4^* &= -e^{-j2\pi 4 f_0 t}, \\ X_{-6} = X_6^* &= e^{-j(2\pi 6 f_0 t + \frac{3\pi}{7})} \end{aligned}$$

Άρα συνολικά

$$\begin{aligned} x(t) &= X_0 + X_2 + X_2^* + X_4 + X_4^* + X_6 + X_6^* \\ &= 2 + 3e^{j(2\pi 2 f_0 t + \frac{\pi}{4})} + 3e^{-j(2\pi 2 f_0 t + \frac{\pi}{4})} - e^{j2\pi 4 f_0 t} - e^{-j2\pi 4 f_0 t} + e^{j(2\pi 6 f_0 t + \frac{3\pi}{7})} + e^{-j(2\pi 6 f_0 t + \frac{3\pi}{7})} \\ &= 2 + 3e^{j(2\pi 2 f_0 t + \frac{\pi}{4})} + 3e^{-j(2\pi 2 f_0 t + \frac{\pi}{4})} + e^{j(2\pi 4 f_0 t + \pi)} + e^{-j(2\pi 4 f_0 t + \pi)} + e^{j(2\pi 6 f_0 t + \frac{3\pi}{7})} + e^{-j(2\pi 6 f_0 t + \frac{3\pi}{7})} \\ &= 2 + 3 \cdot 2\cos(2\pi 2 f_0 t + \pi/4) + 2\cos(2\pi 4 f_0 t + \pi) + 2\cos(2\pi 6 f_0 t + 3\pi/7) \\ &= 2 + 6\cos(2\pi 200 t + \pi/4) + 2\cos(2\pi 400 t + \pi) + 2\cos(2\pi 600 t + 3\pi/7) \end{aligned}$$

Εναλλακτικά, επειδή το σήμα είναι πραγματικό, μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

με

$$\begin{aligned} A_0 &= X_0 \\ A_k &= 2|X_k| \\ \phi_k &= \angle X_k \end{aligned}$$

με $X_k = |X_k| e^{j\phi_k}$. Βρίσκοντας τις παραπάνω τιμές καταλήγετε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Θέμα 5ο (Μονάδες 30)

Να βρεθεί η ενέργεια του σήματος:

$$x(t) = \frac{2\alpha}{t^2 + \alpha^2}$$

με $\alpha > 0$, με χρήση του μετασχ. Fourier.

ΛΥΣΗ:

Η απ' ευθείας επίλυση του

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt$$

είναι αρκετά δύσκολη. Γνωρίζουμε όμως ότι

$$x(t) = e^{-\alpha|t|} \longleftrightarrow X(f) = \frac{2\alpha}{(2\pi f)^2 + \alpha^2}$$

Από την ιδιότητα της δυικότητας έχουμε

$$\begin{aligned} x(t) &\longleftrightarrow X(f) \\ X(t) &\longleftrightarrow x(-f) \end{aligned}$$

και άρα αν

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{2\alpha}{t^2 + \alpha^2} = \frac{4\pi^2}{4\pi^2}\frac{2\alpha}{t^2 + \alpha^2} = 2\pi\frac{2(2\alpha\pi)}{(2\pi t)^2 + (2\alpha\pi)^2} \text{ τότε} \\ x(-f) &= 2\pi e^{-2\alpha\pi|-f|} = 2\pi e^{-2\alpha\pi|f|} \end{aligned}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} X^2(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2(-f)df = \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^2 e^{-4\alpha\pi|f|}df \\ &= 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\alpha\pi|f|}df \\ &= 4\pi^2 \int_{-\infty}^{0} e^{4\alpha\pi f}df + 4\pi^2 \int_{0}^{\infty} e^{-4\alpha\pi f}df \\ &= 4\pi^2 \frac{1}{4\alpha\pi} e^{4\alpha\pi f}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-4\alpha\pi} e^{-4\alpha\pi f}\Big|_{0}^{+\infty} \\ &= 4\pi^2 \frac{1}{4\alpha\pi}(1-0) + \frac{1}{-4\alpha\pi}(0-1) \\ &= 4\pi^2 \frac{1}{4\alpha\pi} + \frac{1}{4\alpha\pi} \\ &= 4\pi^2 \frac{2}{4\alpha\pi} \\ &= \frac{2\pi}{\alpha} \end{aligned}$$