ΗΥ215: Τελικό Διαγώνισμα

20 Ιουλίου 2014

Διδάσκων: Γιάννης Στυλιανού

1. Βαθμός: 30

Δίνεται το παρακάτω περιοδικό σήμα $x(t)$:

$$x(t) = 2\cos\left(2\pi 80t + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2\pi 240t - \frac{\pi}{3}\right) - \cos(2\pi 360t)$$

α) Βρείτε την περίοδο, T_0, του σήματος και σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης.

β) Υπολογίστε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, $\phi_x(t)$, και τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος, $\Phi_x(f)$, του σήματος $x(t)$.

γ) Ποιά είναι η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας f_s που απαιτείται για να μετατρέψουμε το σήμα σε διακριτού χρόνου, ώστε μετά να μπορούμε να το ανακτήσουμε πλήρως από τα δείγματά του;

Λύση:

α) Είναι

$$f_0 = \text{ΜΚΔ}\{80, 240, 360\} = 40$$

άρα

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{40} \text{ sec}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}
x(t) &= 2\cos\left(2\pi 80t + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2\pi 240t - \frac{\pi}{3}\right) - \cos(2\pi 360t) \\
&= e^{j\pi/4}e^{j2\pi 80t} + e^{-j\pi/4}e^{-j2\pi 80t} + \frac{1}{2}e^{-j\pi/3}e^{j2\pi 240t} + \frac{1}{2}e^{j\pi/3}e^{-j2\pi 240t} - \frac{1}{2}e^{j2\pi 360t} - \frac{1}{2}e^{-j2\pi 360t} \\
&= e^{j\pi/4}e^{j2\pi 80t} + e^{-j\pi/4}e^{-j2\pi 80t} + \frac{1}{2}e^{-j\pi/3}e^{j2\pi 240t} + \frac{1}{2}e^{j\pi/3}e^{-j2\pi 240t} + \frac{1}{2}e^{j\pi}e^{j2\pi 360t} + \frac{1}{2}e^{-j\pi}e^{-j2\pi 360t}
\end{aligned}$$

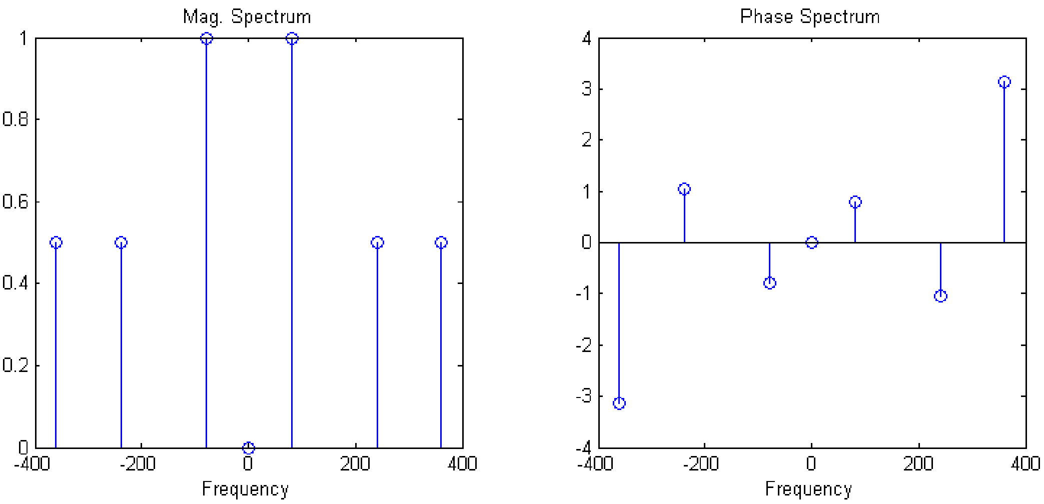
Το φάσμα πλάτους και φασης φαίνεται στο Σχήμα 1.

β) Είναι

$$\begin{aligned}
\phi_{xx}(t) &= \sum |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 t} \\
&= e^{j2\pi 80t} + e^{-j2\pi 80t} + \frac{1}{4}e^{j2\pi 240t} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi 240t} + \frac{1}{4}e^{j2\pi 360t} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi 360t} \\
&= 2\cos(2\pi 80t) + \frac{1}{2}\cos(2\pi 240t) + \frac{1}{2}\cos(2\pi 360t)
\end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}
\Phi_{xx}(f) &= F\{\phi_{xx}(t)\} = F\{2\cos(2\pi 80t) + \frac{1}{2}\cos(2\pi 240t) + \frac{1}{2}\cos(2\pi 360t)\} \\
&= \delta(f-80) + \delta(f-80) + \frac{1}{2}\delta(f-240) + \frac{1}{2}\delta(f+240) + \frac{1}{2}\delta(f-360) + \frac{1}{2}\delta(f+360)
\end{aligned}$$



Σχήμα 1: Φάσματα Άσκησης 1

γ) Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι $f_{max} = 360$ Hz, άρα σύμφωνα με το θεώρημα της δειγματοληψίας, η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_s = 2 \cdot 360 = 720$ Hz.

2. Βαθμός: 20

   Βρειτε το μετασχηματισμό Fourier του παρακάτω σήματος:

$$x(t) = \begin{cases} -j, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ j, & t < 0 \end{cases}$$

   <u>Λύση:</u>

   Είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= -ju(t) + ju(-t) \\ X(f) &= -j\Big(\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}\Big) + j\Big(\frac{1}{2}\delta(-f) + \frac{1}{-j2\pi f}\Big) \\ &= -j\Big(\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}\Big) + j\Big(\frac{1}{2}\delta(f) - \frac{1}{j2\pi f}\Big) \\ &= -\frac{1}{\pi f} \end{aligned}$$

Εναλλακτικά, με παραγωγιση (χωρις ανάγκη σχήματος),

$$\begin{aligned} x(t) = -ju(t) + ju(-t) \Longrightarrow \frac{dx(t)}{dt} &= -j\delta(t) - j\delta(t) = -2j\delta(t) \\ j2\pi f X(f) &= -2jF\{\delta(t)\} \\ j2\pi f X(f) &= -j2 \\ X(f) &= -\frac{1}{\pi f} \end{aligned}$$

3. Βαθμός: 30

Δίνεται η παρακάτω διαφορική εξίσωση που περιγράφει ένα *αιτιατό* σύστημα:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 11\frac{dy(t)}{dt} + 24y(t) = 5\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

α) Βρείτε την περιγραφή του συστήματος στο χώρο του μετασχ. Laplace, $H(s)$, μαζί με το πεδίο σύγκλισης.

β) Βρείτε το σήμα που περιγράφει το σύστημα στο χώρο του χρόνου, $h(t)$.

γ) Βρείτε την έξοδο του συστηματος $y(t)$, για είσοδο $x(t) = -2\delta(t-1)$.

<u>Λύση:</u>

α) Εφαρμόζοντας ιδιότητες, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 11\frac{dy(t)}{dt} + 24y(t) &= 5\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t) \\ s^2Y(s) + 11sY(s) + 24Y(s) &= 5sX(s) + 3X(s) \\ Y(s)(s^2 + 11s + 24) &= X(s)(5s + 3) \\ \frac{Y(s)}{X(s)} &= \frac{5s+3}{s^2 + 11s + 24} \\ H(s) &= \frac{5s+3}{s^2 + 11s + 24} \\ H(s) &= \frac{5s+3}{(s+3)(s+8)} \end{aligned}$$

Αφού το σύστημα ειναι αιτιατό, θα έχει δεξιόπλευρο πεδίο σύγκλισης, άρα $\Re\{s\} > -3$.

β) Το πολυώνυμο του αριθμητή είναι μικρότερης τάξης από αυτό του παρονομαστή στο $H(s)$, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα. Θα έχουμε

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{5s+3}{(s+3)(s+8)} \\ &= \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+8} \end{aligned}$$

με

$$
\begin{aligned}
A &= H(s)(s+3)\Big|_{s=-3} = \frac{5s+3}{s+8}\Big|_{s=-3} = \frac{-15+3}{-3+8} = -\frac{12}{5}\\
B &= H(s)(s+8)\Big|_{s=-8} = \frac{5s+3}{s+3}\Big|_{s=-8} = \frac{-40+3}{-8+3} = \frac{37}{5}
\end{aligned}
$$

Άρα τελικά

$$
\begin{aligned}
H(s) &= -\frac{12}{5}\frac{1}{s+3} + \frac{37}{5}\frac{1}{s+8}\\
h(t) &= -\frac{12}{5}e^{-3t}u(t) + \frac{37}{5}e^{-8t}u(t)
\end{aligned}
$$

αφού το σημα έχει πεδίο σύγκλισης $\Re\{s\} > -3$.

γ) Παρατηρούμε ότι

$$
\begin{aligned}
y(t) &= h(t) * x(t) = \Big(-\frac{12}{5}e^{-3t}u(t) + \frac{37}{5}e^{-8t}u(t)\Big) * (-2\delta(t-1))\\
&= \frac{24}{5}e^{-3(t-1)}u(t-1) - \frac{74}{5}e^{-8(t-1)}u(t-1)
\end{aligned}
$$

4. Βαθμός: 15

Το σήμα $x(t) = sinc(200t)$ δειγματοληπτείται με συχνότητα δειγματοληψίας f_s

(i) 150 Hz,

(ii) 200 Hz,

(iii) 300 Hz.

Για κάθε μια από τις τρεις περιπτώσεις:

α) Σχεδιάστε το φάσμα, $X_s(f)$, του *δειγματοληπτημένου* σήματος.

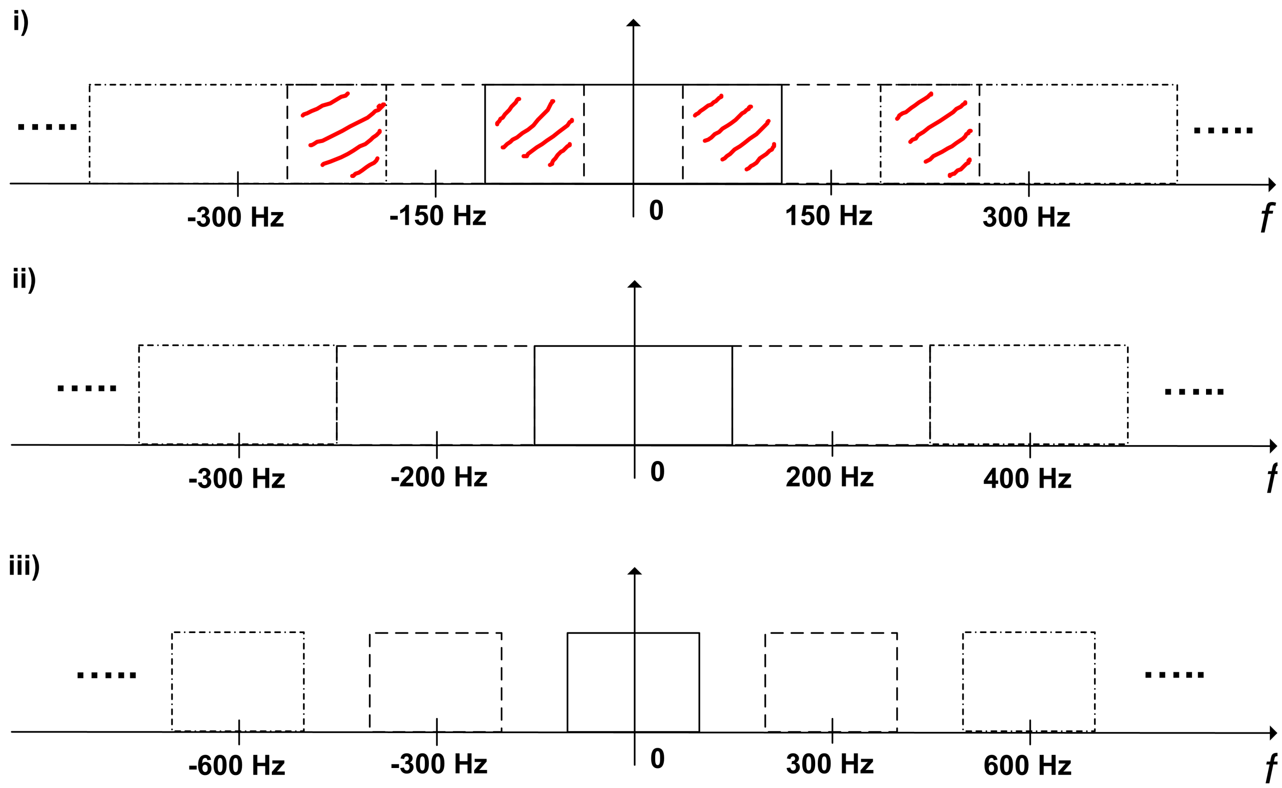
β) Εξηγήστε αν μπορείτε σε κάθε περίπτωση να ανακτήσετε το αρχικό σήμα από το δειγματοληπτημένο σήμα.

Λύση:

α) Αρχικά, παρατηρούμε ότι το φάσμα του $x(t)$ είναι το $X(f) = \frac{1}{200}rect\Big(\frac{f}{200}\Big)$. Η διάρκεια του τετραγωνικού παραθύρου είναι από -100 ως 100 Hz.

Τα φάσματα φαίνονται σε κάθε περίπτωση στο Σχήμα 2.

β) Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι 100 Hz. Άρα οποιαδήποτε συχνότητα δειγματοληψίας μεγαλύτερη ή ίση με τη διπλάσια αυτή συχνότητα (δηλ. $2 \cdot 100 = 200$ Hz) μας ανακτά το αρχικό σήμα από τα δείγματά του. Άρα μόνο στην περίπτωση (i) δεν μπορούμε να ανακτησουμε το σημα από τα δείγματά του.



Σχήμα 2: Φάσματα Άσκησης 4

5. Βαθμός: 20

   Δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace ενός δεξιόπλευρου σήματος:

$$H(s) = \frac{se^{-2s}}{(-3-s)(-2-s)}$$

   α) Βρείτε το πεδίο σύγκλισης. Δικαιολογήστε την επιλογή σας.

   β) Βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, $h(t)$.

   γ) Υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier του παραπάνω σήματος; Αν ναι, βρείτε τον. Αν όχι, εξηγήστε.

Λυση:

α) Αφού το σήμα είναι δεξιόπλευρο, το πεδίο σύγκλισης πρέπει να είναι επίσης δεξιόπλευρο. Άρα, αφού οι πόλοι είναι στις θέσεις $s = -3, s = -2$, θα ειναι $\Re\{s\} > -2$.

β) Έχουμε

$$H(s) = \frac{se^{-2s}}{(-3-s)(-2-s)} = \frac{s}{(-3-s)(-2-s)}e^{-2s} = G(s)e^{-2s} \longleftrightarrow h(t) = g(t-2)$$

Άρα χρειάζεται να βρούμε το $G(s)$. Θα είναι

$$G(s) = \frac{s}{(-3-s)(-2-s)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+2}$$

με

$$\begin{aligned} A &= G(s)(s+3)\Big|_{s=-3} = \frac{s}{s+2}\Big|_{s=-3} = 3 \\ B &= G(s)(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{s}{s+3}\Big|_{s=-2} = -2 \end{aligned}$$

και αρα

$$G(s) = \frac{3}{s+3} - \frac{2}{s+2} \longleftrightarrow g(t) = 3e^{-3t}u(t) - 2e^{-2t}u(t)$$

αφού το σύστημα είναι δεξιόπλευρο. Άρα

$$h(t) = g(t-2) = 3e^{-3(t-2)}u(t-2) - 2e^{-2(t-2)}u(t-2)$$

γ) Ο μετασχ. Fourier υπάρχει, γιατί ο φανταστικός άξονας περιέχεται στο πεδίο σύγκλισης. Εύκολα βρίσκουμε το μετασχ. Fourier από το μετασχ. Laplace θέτοντας $s = j2\pi f$.

$$H(s)\Big|_{s=j2\pi f} = \frac{j2\pi f e^{-j4\pi f}}{(j2\pi f+3)(j2\pi f+2)}$$