Τυπολόγιο για ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

5 Απριλίου 2014

1 Μιγαδικοί - Σχεσεις Euler

- $a + jb = \rho e^{j\theta},\ \rho = \sqrt{a^2 + b^2},\ \theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$
- $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$
- $\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2},\ \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$
- $e^{\pm j\pi} = -1,\ e^{\pm j\pi/2} = \pm j = \mp\frac{1}{j}$
- $e^{\pm j2\pi k} = 1,\ e^{\pm j\pi k} = (-1)^k$

2 Ημίτονα

- $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi) = A\Re\{e^{j(2\pi f_0 t + \phi)}\}$
  - Περίοδος: $T_0 = \frac{1}{f_0}$
  - Συχνότητα: $f_0 = \frac{1}{T_0}$
- Για πραγματικά σήματα:
  - Φάσμα πλάτους : άρτια συνάρτηση
  - Φάσμα φάσης : περιττη συνάρτηση
- $x(t) = \sum_{k=0}^{N} A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k),\quad f_k = \frac{1}{T_k}$
  - Περίοδος: $T_0 = \text{ΕΚΠ}\{T_k\}$ ή $f_0 = \text{ΜΚΔ}\{f_k\}$

3 Σειρές Fourier

- Δίπλευρη (εκθετική): Ανάλυση ενός σήματος σε άθροισμα μιγαδικών εκθετικών με συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες μιας θεμελιώδους.
  - $x(t) = X_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$
  - $X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$
  - $X_k = |X_k|e^{j\angle X_k}$
  - $X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt \in \Re$, όταν $x(t) \in \Re$.
- Μονόπλευρη (τριγωνομετρική): Ανάλυση ενός *πραγματικού* σήματος σε άθροισμα συνημιτόνων με συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες μιας θεμελιώδους.
  - $x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$
  - $A_0 = X_0$
  - $A_k = 2|X_k|$
  - $\phi_k = \angle X_k$
- $\int_0^{T_0} e^{j2\pi k/T_0 t}dt = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ T_0, & k = 0 \end{cases}$

4 Μετασχηματισμός Fourier

- $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}dt$
- $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi f t}df$
- $X(f) = |X(f)|e^{j\angle X(f)}$
- $|X(f)| = \sqrt{\Re^2(f) + \Im^2(f)},\ \angle X(f) = \tan^{-1}\frac{\Im(f)}{\Re(f)}$

5 Συνάρτηση Δέλτα

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$
- $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0)$
- $\frac{d\epsilon(t)}{dt} = \delta(t)$

6 Γενικό τυπολόγιο

- $\int e^{at}dt = \frac{1}{a}e^{at}$
- $\int te^{at}dt = \frac{e^{at}}{a}\left(t - \frac{1}{a}\right)$
- $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$
  - $x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$
  - $x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$
- $sinc(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$
- $sinc(0) = 1$
- $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$
- $|e^{j\theta}| = 1,\ \forall\theta$
- $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$
- $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
- $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^y = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}a^{n-k}b^y$

7 Πίνακες

1.

Ιδιότητες σειρών Fourier	
Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
$x(t)$ με T_0	X_k
$y(t)$ με T_0	Y_k
$Ax(t) + By(t)$	$AX_k + BY_k$
$x(t - t_0)$	$X_k e^{-jk2\pi f_0 t_0}$
$e^{j2\pi k f_0 M t} x(t)$	X_{k-M}
$x^*(t)$	X^*_{-k}
$x(-t)$	X_{-k}
$x(at),\ a > 0$	X_k, με περίοδο T_0/a
$\int_{T_0} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$	$T_0 X_k Y_k$
$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} X_l Y_{k-l}$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk2\pi f_0 X_k$
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$	$\frac{X_k}{jk2\pi f_0}$
$x(t) \in \Re$	$\left\{\begin{array}{l} X_k = X^*_{-k}, \\ \Re\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\}, \\ \Im\{X_k\} = -\Im\{X_{-k}\}, \\ \lvert X_k\rvert = \lvert X_{-k}\rvert, \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} \end{array}\right.$
$x_e(t) = Ev\{x(t)\},\ x(t) \in \Re$	$\Re\{X_k\}$
$x_o(t) = Od\{x(t)\},\ x(t) \in \Re$	$j\Im\{X_k\}$
$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert X_k\rvert^2$

Πίνακας 1: Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

2.

Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier	
Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
$x(t)$	$X(f)$
$y(t)$	$Y(f)$
$Ax(t) + By(t)$	$AX(f) + BY(f)$
$x(t \pm t_0)$	$X(f) e^{\pm j2\pi f t_0}$
$e^{\pm j2\pi f_0 t} x(t)$	$X(f \mp f_0)$
$x^*(t)$	$X^*(-f)$
$x(-t)$	$X(-f)$
$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$	$X(f)Y(f)$
$X(t)$	$x(-f)$
$x(t)y(t)$	$X(f) * Y(f)$
$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n X(f)$
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)\delta(f)}{2}$
$x(t) \in \Re$	$\left\{\begin{array}{l} X(f) = X^*(-f), \\ \Re\{X(f)\} = \Re\{X(-f)\}, \\ \Im\{X(f)\} = -\Im\{X(-f)\}, \\ \lvert X(f)\rvert = \lvert X(-f)\rvert, \\ \angle X(f) = -\angle X(-f) \end{array}\right.$
$x_e(t) = Ev\{x(t)\},\ x(t) \in \Re$	$\Re\{X(f)\}$
$x_o(t) = Od\{x(t)\},\ x(t) \in \Re$	$j\Im\{X(f)\}$
$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Πίνακας 2: Πίνακας Ιδιοτήτων του μετασχ. Fourier

3.

Ζεύγη μετασχηματισμού Fourier	
Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - kf_0)$
$e^{\pm j2\pi k f_0 t}$	$\delta(f \mp f_0)$
$\cos(2\pi k f_0 t)$	$\frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$
$\sin(2\pi k f_0 t)$	$\frac{1}{2j}\delta(f - f_0) - \frac{1}{2j}\delta(f + f_0)$
1	$\delta(f)$
$Arect\left(\frac{t}{T}\right)$	$ATsinc(fT)$
$Atri\left(\frac{t}{T}\right)$	$ATsinc^2(fT)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - k\frac{1}{T}\right)$
$\delta(t)$	1
$sgn(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
$\epsilon(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
$e^{-a\lvert t\rvert},\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{2a}{4\pi^2 f^2 + a^2}$
$e^{-at}u(t),\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$
$e^{at}u(-t),\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a - j2\pi f}$
$te^{-at}u(t),\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^2}$
$-te^{at}u(-t),\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a - j2\pi f)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}u(t),\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^n}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}u(-t),\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a - j2\pi f)^n}$

Πίνακας 3: Πίνακας ζευγών μετασχ. Fourier