Τυπολόγιο για ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

20 Ιουνίου 2014

1 Μιγαδικοί - Σχεσεις Euler

- $a + jb = \rho e^{j\theta},\ \rho = \sqrt{a^2 + b^2},\ \theta = \tan^{-1}\dfrac{b}{a}$
- $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$
- $\cos(\theta) = \dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2},\ \sin(\theta) = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$
- $e^{\pm j\pi} = -1,\ e^{\pm j\pi/2} = \pm j = \mp\dfrac{1}{j}$
- $e^{\pm j2\pi k} = 1,\ e^{\pm j\pi k} = (-1)^k$

2 Ημίτονα

- $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi) = A\Re\{e^{j(2\pi f_0 t + \phi)}\}$
  - Περίοδος: $T_0 = \frac{1}{f_0}$
  - Συχνότητα: $f_0 = \frac{1}{T_0}$
- Για πραγματικά σήματα:
  - Φάσμα πλάτους : άρτια συνάρτηση
  - Φάσμα φάσης : περιττη συνάρτηση
- $x(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k),\quad f_k = \frac{1}{T_k}$
  - Περίοδος: $T_0 = \text{ΕΚΠ}\{T_k\}$ ή $f_0 = \text{ΜΚΔ}\{f_k\}$

3 Σειρές Fourier

- Δίπλευρη (εκθετική): Ανάλυση ενός σήματος σε άθροισμα μιγαδικών εκθετικών με συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες μιας θεμελιώδους.
  - $x(t) = X_0 + \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$
  - $X_k = \dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$
  - $X_k = |X_k|e^{j\angle X_k}$
  - $X_0 = \dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_0^{T_0} x(t)dt \in \Re$, όταν $x(t) \in \Re$.
- Μονόπλευρη (τριγωνομετρική): Ανάλυση ενός *πραγματικού* σήματος σε άθροισμα συνημιτόνων με συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες μιας θεμελιώδους.
  - $x(t) = A_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$
  - $A_0 = X_0$
  - $A_k = 2|X_k|$
  - $\phi_k = \angle X_k$
- $\displaystyle\int_0^{T_0} e^{j2\pi k/T_0 t}dt = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ T_0, & k = 0 \end{cases}$

4 Μετασχηματισμός Fourier

- $X(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}dt$
- $x(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi f t}df$
- $X(f) = |X(f)|e^{j\angle X(f)}$
- $|X(f)| = \sqrt{\Re^2(f) + \Im^2(f)},\ \angle X(f) = \tan^{-1}\dfrac{\Im(f)}{\Re(f)}$

5 Συνάρτηση Δέλτα

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0)$
- $\dfrac{d\epsilon(t)}{dt} = \delta(t)$

6 Γενικό τυπολόγιο

- $\displaystyle\int e^{at}dt = \frac{1}{a}e^{at}$
- $\displaystyle\int te^{at}dt = \frac{e^{at}}{a}\Big(t - \frac{1}{a}\Big)$
- $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$
  - $x_e(t) = \dfrac{x(t) + x(-t)}{2}$
  - $x_o(t) = \dfrac{x(t) - x(-t)}{2}$
- $sinc(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$
- $sinc(0) = 1$
- $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$
- $|e^{j\theta}| = 1,\ \forall\theta$
- $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$
- $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
- $(a + b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^y = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a^{n-k}b^y$

7 Πίνακες

1.

Ιδιότητες σειρών Fourier	
Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
$x(t)$ με T_0	X_k
$y(t)$ με T_0	Y_k
$Ax(t)+By(t)$	AX_k+BY_k
$x(t-t_0)$	$X_k e^{-jk2\pi f_0 t_0}$
$e^{j2\pi k f_0 M t}x(t)$	X_{k-M}
$x^*(t)$	X^*_{-k}
$x(-t)$	X_{-k}
$x(at),\ a>0$	X_k, με περίοδο T_0/a
$\int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$T_0 X_k Y_k$
$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} X_l Y_{k-l}$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk2\pi f_0 X_k$
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X_k}{jk2\pi f_0}$
$x(t)\in\Re$	$\begin{cases} X_k = X^*_{-k}, \\ \Re\{X_k\}=\Re\{X_{-k}\}, \\ \Im\{X_k\}=-\Im\{X_{-k}\}, \\ \lvert X_k\rvert = \lvert X_{-k}\rvert, \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} \end{cases}$
$x_e(t)=Ev\{x(t)\},\ x(t)\in\Re$	$\Re\{X_k\}$
$x_o(t)=Od\{x(t)\},\ x(t)\in\Re$	$j\Im\{X_k\}$
$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert X_k\rvert^2$

Πίνακας 1: Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

2.

Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier	
Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
$x(t)$	$X(f)$
$y(t)$	$Y(f)$
$Ax(t)+By(t)$	$AX(f)+BY(f)$
$x(t\pm t_0)$	$X(f)e^{\pm j2\pi f t_0}$
$e^{\pm j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(f\mp f_0)$
$x^*(t)$	$X^*(-f)$
$x(-t)$	$X(-f)$
$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\Big(\frac{f}{a}\Big)$
$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$
$X(t)$	$x(-f)$
$x(t)y(t)$	$X(f)*Y(f)$
$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n X(f)$
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f}+\frac{X(0)\delta(f)}{2}$
$x(t)\in\Re$	$\begin{cases} X(f)=X^*(-f), \\ \Re\{X(f)\}=\Re\{X(-f)\}, \\ \Im\{X(f)\}=-\Im\{X(-f)\}, \\ \lvert X(f)\rvert=\lvert X(-f)\rvert, \\ \angle X(f)=-\angle X(-f) \end{cases}$
$x_e(t)=Ev\{x(t)\},\ x(t)\in\Re$	$\Re\{X(f)\}$
$x_o(t)=Od\{x(t)\},\ x(t)\in\Re$	$j\Im\{X(f)\}$
$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Πίνακας 2: Πίνακας Ιδιοτήτων του μετασχ. Fourier

3.

Ζεύγη μετασχηματισμού Fourier	
Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f-kf_0)$
$e^{\pm j2\pi k f_0 t}$	$\delta(f\mp f_0)$
$\cos(2\pi k f_0 t)$	$\frac{1}{2}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}\delta(f+f_0)$
$\sin(2\pi k f_0 t)$	$\frac{1}{2j}\delta(f-f_0)-\frac{1}{2j}\delta(f+f_0)$
1	$\delta(f)$
$Arect\Big(\frac{t}{T}\Big)$	$ATsinc(fT)$
$Atri\Big(\frac{t}{T}\Big)$	$ATsinc^2(fT)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$	$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\Big(f-k\frac{1}{T}\Big)$
$\delta(t)$	1
$sgn(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
$\epsilon(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$
$e^{-a\lvert t\rvert},\ \Re\{a\}>0$	$\frac{2a}{4\pi^2 f^2+a^2}$
$e^{-at}u(t),\ \Re\{a\}>0$	$\frac{1}{a+j2\pi f}$
$e^{at}u(-t),\ \Re\{a\}>0$	$\frac{1}{a-j2\pi f}$
$te^{-at}u(t),\ \Re\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j2\pi f)^2}$
$-te^{at}u(-t),\ \Re\{a\}>0$	$\frac{1}{(a-j2\pi f)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t),\ \Re\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j2\pi f)^n}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}u(-t),\ \Re\{a\}>0$	$\frac{1}{(a-j2\pi f)^n}$

Πίνακας 3: Πίνακας ζευγών μετασχ. Fourier

8 Συνέλιξη και Συσχέτιση

- Συνέλιξη:
$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$

- <u>Σήματα Ενέργειας</u>

- Ετεροσυσχέτιση:
$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)y(\tau+t)d\tau$

- Αυτοσυσχέτιση:
$\phi_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)x(\tau+t)d\tau$

- <u>Σήματα Ισχύος</u>

- Ετεροσυσχέτιση:
$\phi_{xy}(t) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(\tau)y(\tau+t)d\tau$

- Αυτοσυσχέτιση:
$\phi_{xx}(t) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(\tau)x(\tau+t)d\tau$

- $\Phi_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}|X(f,T)|^2$

- <u>Περιοδικά Σήματα</u>

- Ετεροσυσχέτιση:
$\phi_{xy}(t) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x^*(\tau)y(\tau+t)d\tau =$
$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^* Y_k e^{j2\pi k f_0 t}$

- Αυτοσυσχέτιση:
$\phi_{xx}(t) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x^*(\tau)x(\tau+t)d\tau =$
$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 t}$

- <u>Μετασχηματισμοί</u>

- $\phi_{xx}(0) = E_{\pi\epsilon\rho\acute{\iota}o\delta o} = P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2$

- $\Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f)$

- $\Phi_{xx}(f) = |X(f)|^2$

- $\phi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f)df$

9 Μετασχηματισμός Laplace

- $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$

- $x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds$

- Θεώρημα της αρχικής τιμής: $x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$

- Θεώρημα της τελικής τιμής: $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$

- $X(s)\Big|_{\sigma=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(0+j2\pi f)t}dt = X(f)$
όταν $\sigma = 0 \in ROC$

- Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα (απλές ριζες)

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}, \; m < n \\ &= \frac{P(x)}{(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_n)} \\ &= \frac{k_1}{x-\rho_1} + \frac{k_2}{x-\rho_2} + \cdots + \frac{k_n}{x-\rho_n} \end{aligned}$$

με $k_i = (x-\rho_i)F(x)\Big|_{x=\rho_i}, \; i = 1, 2, \cdots, n$

- Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα (πολλαπλές ρίζες)

$$F(x) = \frac{P(x)}{(x-\lambda)^r(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)\cdots(x-\rho_j)}$$

Τότε

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{d_0}{(x-\lambda)^r} + \frac{d_1}{(x-\lambda)^{r-1}} + \cdots + \frac{d_{r-1}}{(x-\lambda)} \\ &+ \frac{k_1}{x-\rho_1} + \frac{k_2}{x-\rho_2} + \cdots + \frac{k_j}{x-\rho_j} \end{aligned} \quad (1)$$

Οι συντελεστές k_i αντιστοιχούν στις ρίζες χωρίς πολλαπλότητα και υπολογίζονται όπως περιγράψαμε πριν, ενώ
$d_j = \frac{1}{j!}\frac{d^j}{dx^j}[(x-\lambda)^r F(x)]\Big|_{x=\lambda}$

10 Δειγματοληψία

- Ένα σήμα με μέγιστη συχνότητα B, μπορεί να ανακτηθεί από τα δείγματά του, αν δειγματοληπτηθεί με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s > 2B$.
Η συνθήκη:
$$f_s > 2B \;\; (\text{ή } T_s < \frac{1}{2B})$$
λέγεται *συνθήκη του Shannon* (η μέγιστη συχνότητα B συνήθως αναφέρεται και στη βιβλιογραφία ως f_{max})

11 Πίνακες

Ιδιότητες δίπλευρου μετασηματισμού Laplace		
Σήμα	Μετασχημ. Laplace	ROC
$x(t)$	$X(s)$	R_x
$y(t)$	$Y(s)$	R_y
$Ax(t)+By(t)$	$AX(s)+BY(s)$	Τουλάχιστον το $R_x \cap R_y$
$x(t-t_0)$	$X(s)e^{-st_0}$	R_x
$e^{s_0 t}x(t)$	$X(s-s_0)$	Μετατόπιση του R_x
$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R_x
$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X(\frac{s}{a})$	Σταθμισμένο R_x
$x(t)*y(t)$	$X(s)Y(s)$	Τουλάχιστον το $R_x \cap R_y$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	Τουλάχιστον το R_x
$-tu(t)$	$\frac{dX(s)}{dt}$	R_x
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(s)}{s}+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(t)dt$	Τουλάχιστον $R_x \cap \{\Re\{s\}>0\}$
$\frac{x(t)}{t}$	$\int_{s}^{\infty} X(z)dz$	
Ιδιότητες μονόπλευρου μετασηματισμού Laplace		
$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)-x(0^-)$	Τουλάχιστον το R_x
$\int_{0^-}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(s)}{s}$	R_x

Πίνακας 4: Πίνακας Ιδιοτήτων του μετασχ. Laplace

Χρήσιμα ζεύγη μετασηματισμού Laplace		
Σήμα	Μετασχηματισμός Laplace	ROC
$\delta(t)$	1	Όλο το s-επίπεδο
$\cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+(2\pi f_0)^2}$	$\Re\{s\}>0$
$\sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2\pi f_0}{s^2+(2\pi f_0)^2}$	$\Re\{s\}>0$
$Arect\left(\frac{t}{T}\right)$	$\frac{A}{s}(e^{sT/2}-e^{-sT/2})$	όλο το s-επίπεδο
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\}>0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\}<0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re\{s\}>-\Re\{a\}$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re\{s\}<-\Re\{a\}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\Re\{s\}>-\Re\{a\}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\Re\{s\}<-\Re\{a\}$
$e^{-at}\cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+(2\pi f_0)^2}$	$\Re\{s\}>-\Re\{a\}$
$e^{-at}\sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2\pi f_0}{(s+a)^2+(2\pi f_0)^2}$	$\Re\{s\}>-\Re\{a\}$

Πίνακας 5: Πίνακας ζευγών μετασχ. Laplace

Χρήσιμα ζεύγη συνέλιξης		
$x(t)$	$y(t)$	$x(t)*y(t)$
$x(t)$	$\delta(t-T)$	$x(t-T)$
$e^{at}u(t)$	$u(t)$	$\frac{1-e^{at}}{-a}u(t)$
$u(t)$	$u(t)$	$tu(t)$
$e^{at}u(t)$	$e^{bt}u(t)$	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}u(t),\ a\neq b$
$e^{at}u(t)$	$e^{at}u(t)$	$te^{at}u(t)$
$te^{at}u(t)$	$e^{at}u(t)$	$\frac{1}{2}t^2e^{at}u(t)$
$t^n u(t)$	$e^{at}u(t)$	$\frac{n!e^{at}}{a^{n+1}}u(t)-\sum_{j=0}^{n}\frac{n!t^{n-j}}{a^{j+1}(n-j)!}u(t)$
$t^m u(t)$	$t^n u(t)$	$\frac{m!n!}{(n+m+1)!}t^{m+n+1}u(t)$
$te^{at}u(t)$	$e^{bt}u(t)$	$\frac{e^{bt}-e^{at}+(a-b)te^{at}}{(a-b)^2}u(t)$
$t^m e^{at}u(t)$	$t^n e^{at}u(t)$	$\frac{m!n!}{(n+m+1)!}t^{m+n+1}e^{at}u(t)$
$t^m e^{at}u(t)$ $a\neq b$	$t^n e^{bt}u(t)$	$\sum_{j=0}^{m}\frac{(-1)^j m!(n+j)!t^{m-j}e^{at}}{j!(m-j)!(a-b)!^{n+j+1}}u(t)$ $+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!(m+k)!t^{n-k}e^{bt}}{k!(n-k)!(b-a)^{m+k+1}}u(t)$
$e^{at}\cos(bt+\theta)u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{\cos(\theta-\phi)e^{\lambda t}-e^{-at}\cos(bt+\theta-\phi)}{\sqrt{(a+\lambda)^2+b^2}}u(t)$ $\phi=\tan^{-1}\frac{-b}{a+\lambda}$
$e^{at}u(t)$	$e^{bt}u(-t)$	$\frac{e^{at}u(t)+e^{bt}u(-t)}{b-a},\ \Re\{b\}>\Re\{a\}$
$e^{at}u(-t)$	$e^{bt}u(-t)$	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{b-a}u(-t)$

Πίνακας 6: Πίνακας ζευγών συνελίξεων