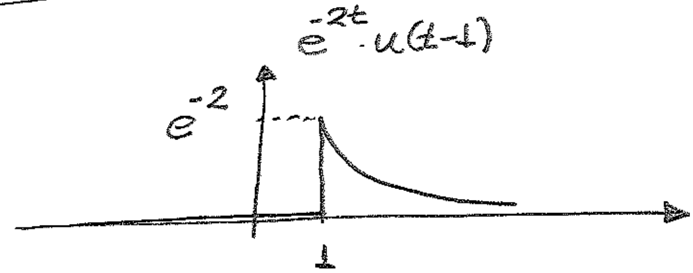
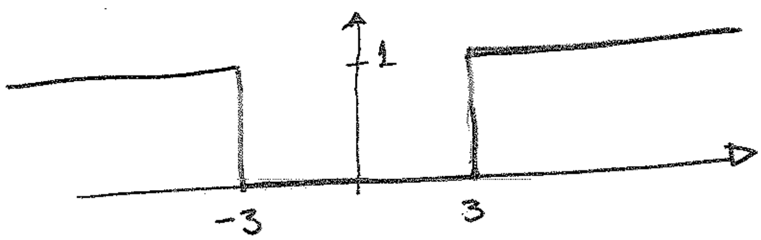
ΗΥ-215
Πρόοδος 20-4-2013

ΘΕΜΑ 1ο

(α)



(β) Η $u(t^2-9)$ είναι ίση με 1 όταν $t^2 \geq 9$, δηλαδή όταν $|t| \geq 3$ ενώ στο διάστημα $(-3, 3)$ έχει μηδενική τιμή:



(γ)

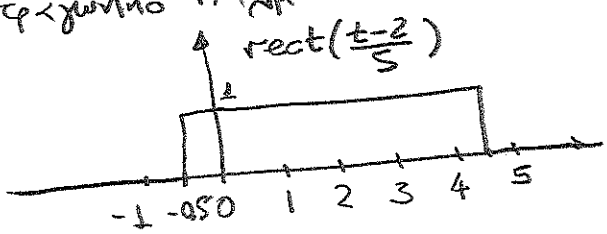
$$\mathrm{rect}\left(\frac{t-2}{5}\right) = \begin{cases} 1 & \left|\frac{t-2}{5}\right| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\left|\frac{t-2}{5}\right| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -0.5 \leq \frac{t-2}{5} \leq 0.5 \Rightarrow -2.5 \leq t-2 \leq 2.5$$

$$\Rightarrow -0.5 \leq t \leq 4.5$$

Συνεπώς $$\mathrm{rect}\left(\frac{t-2}{5}\right) = \begin{cases} 1 & -0.5 \leq t \leq 4.5 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Πρόκειται για ένα μετατοπισμένο κατά δύο μονάδες δεξιά τετραγωνικό παλμό του οποίου το εύρος αυξάνεται από 1 σε 5:

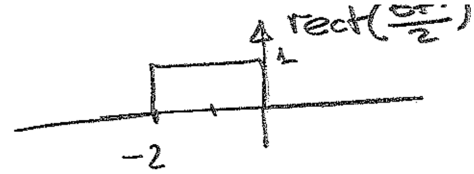


(δ)

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t+1}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \left|\frac{t+1}{2}\right| \leq 0.5 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\left|\frac{t+1}{2}\right| \leq 0.5 \Rightarrow -0.5 \leq \frac{t+1}{2} \leq 0.5 \Rightarrow -1 \leq t+1 \leq 1 \Rightarrow -2 \leq t \leq 0$$

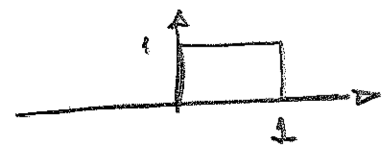
$\therefore \quad \mathrm{rect}\left(\frac{t+1}{2}\right) = \begin{cases} 1 & -2 \le t \le 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$



$\mathrm{rect}\left(t-\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \left|t-\frac{1}{2}\right| \le 0.5 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

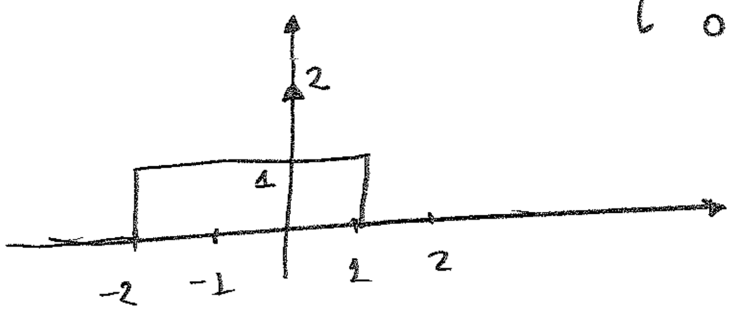
$\left|t-\frac{1}{2}\right| \le 0.5 \Rightarrow -0.5 \le t-\frac{1}{2} \le 0.5 \Rightarrow 0 \le t \le 1$

$\mathrm{rect}\left(t-\frac{1}{2}\right)$

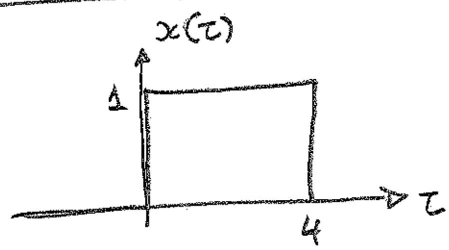


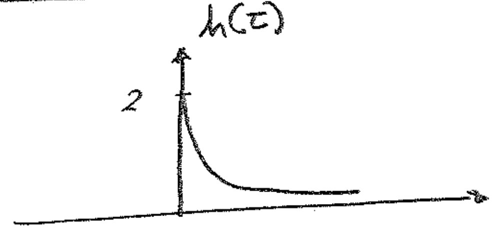
$\mathrm{rect}\left(t-\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

$\mathrm{rect}\left(\frac{t+1}{2}\right) + \mathrm{rect}\left(t-\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1 & t \in [-2,0) \cup (0,1] \\ 2 & t=0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$



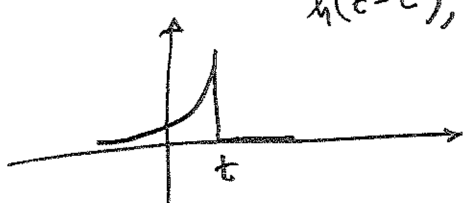
ΘΕΜΑ 2ο





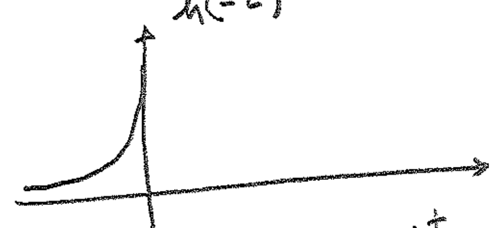
$\Downarrow$

$h(t-\tau),\ 0<t\le 4$



$\Leftarrow$

$h(-\tau)$



- Για $0<t\le 4$ $\quad h(t) * x(t) = \int_0^t 1 \cdot 2e^{-2(t-\tau)}\,d\tau = 2e^{-2t} \cdot \frac{1}{2} e^{2\tau}\Big|_0^t$

$= e^{-2t} \cdot e^{2t} - e^{-2t} = 1 - e^{-2t}$

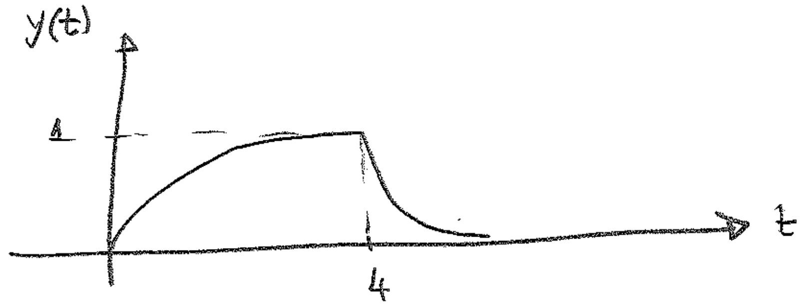
- Για $t>4$, $\quad h(t) * x(t) = \int_0^4 1 \cdot 2e^{-2(t-\tau)}\,d\tau = e^{-2(t-\tau)}\Big|_0^4$

$= e^{-2(t-4)} - e^{-2t} = (e^{8}-1)e^{-2t}$

- Για $t<0$, $\quad h(t) * x(t) = 0$.

Συνεπώς,

$$y(t) = h(t) * x(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-e^{-2t} & 0 \le t \le 4 \\ (e^{8}-1)e^{-2t} & t>4 \end{cases}$$



$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_0^4 1^2\,dt = 4$$

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t)\,dt = \int_0^4 (1-e^{-2t})^2\,dt + \int_4^{+\infty} (e^{8}-1)^2 e^{-4t}\,dt$$

$$= \int_0^4 (1+e^{-4t}-2e^{-2t})\,dt + (e^{8}-1)^2\left(-\frac{1}{4}\right)e^{-4t}\Big|_4^{+\infty}$$

$$= t\Big|_0^4 - \frac{1}{4}e^{-4t}\Big|_0^4 + e^{-2t}\Big|_0^4 - 0 + (e^{8}-1)^2\frac{1}{4}e^{-16}$$

$$= 4 - \frac{1}{4}e^{-16} + \frac{1}{4} + e^{-8} - 1 + (e^{16}+1-2e^{8})\frac{1}{4}e^{-16}$$

$$= 4 - \cancel{\frac{1}{4}e^{-16}} + \frac{1}{4} + e^{-8} - 1 + \frac{1}{4} + \cancel{\frac{1}{4}e^{-16}} - \frac{1}{2}e^{-8}$$

$$= \frac{7}{2} + \frac{1}{2}e^{-8} = 3.5$$

ΘΕΜΑ 3ο

Το σήμα είναι η διαφορά των εξόδων των δύο παράλληλων συστημάτων, οπότε έχουμε:

$$v(t) = h_1(t) * x(t) - h_2(t) * x(t)$$
$$= (h_1(t) - h_2(t)) * x(t)$$

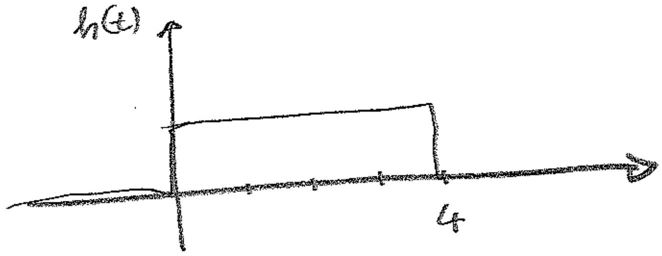
Η έξοδος $y(t)$ είναι η συνέλιξη του σήματος $v(t)$ με το τρίτο σύστημα:

$$y(t) = h_3(t) * v(t) = \underbrace{h_3(t) * [h_1(t) - h_2(t)]}_{h(t)} * x(t)$$

Συνεπώς, η κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος είναι:

$$h(t) = h_3(t) * [h_1(t) - h_2(t)]$$
$$= \delta(t-2) * [u(t+2) - u(t-2)]$$
$$= u(t) - u(t-4).$$

Η γραφική παράσταση της $h(t)$ είναι:



- Η $h(t) = 0$ για $t < 0$, συνεπώς το σύστημα είναι <u>αιτιατό</u>

- Η κρουστική απόκριση είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \int_0^4 1\, dt = 4 < +\infty$$

συνεπώς το σύστημα είναι <u>ευσταθές</u>.

□

ΘΕΜΑ 4ο (α) Βλέπουμε ότι οι επιμέρους συνιστώσες του $x(t)$ έχουν συχνότητες $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 3\pi$ και $\omega_3 = 6\pi$. Συνεπώς, η θεμελιώδης συχνότητα του $x(t)$ είναι ο $\text{ΜΚΔ}(2\pi, 3\pi, 6\pi) = \pi$, δηλαδή είναι $\underline{\omega_0 = \pi}$. Έχουμε ότι $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi \Rightarrow T = 2$.

Το $x(t)$ είναι περιοδικό με βασική περίοδο $\underline{T = 2 \text{ sec.}}$

(β) Χρησιμοποιούμε την εξίσωση του Euler:

$$x(t) = 3 + 2\cos(2\pi t) - \sin(3\pi t - \pi/4) + 4\cos(6\pi t + \pi/3)$$

$$= 3 + 2\,\frac{e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}}{2} - \frac{e^{j(3\pi t - \pi/4)} - e^{-j(3\pi t - \frac{\pi}{4})}}{2j}$$

$$+ 4\,\frac{e^{j(6\pi t + \pi/3)} + e^{-j(6\pi t + \pi/3)}}{2}$$

$$= 3 + e^{j2\omega_0 t} + e^{-j2\omega_0 t} - \frac{e^{-j\pi/4}}{2j} \cdot e^{j3\omega_0 t} + \frac{e^{j\pi/4}}{2j} e^{-j3\omega_0 t}$$

$$+ 2e^{j\pi/3} \cdot e^{j6\omega_0 t} + 2e^{-j\pi/3} e^{-j6\omega_0 t}$$

Συγκρίνοντας με την εξίσωση σύνθεσης των σειρών Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k)\, e^{jk\omega_0 t}$$

έχουμε ότι:

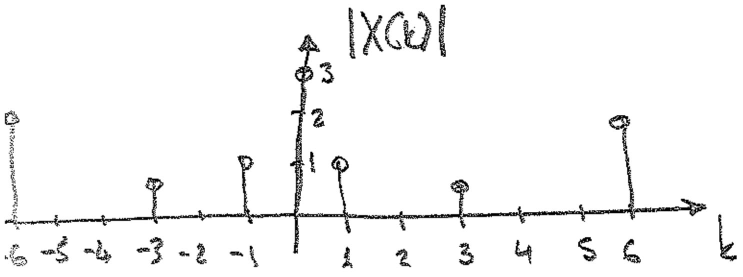
$$X(0) = 3, \quad X(2) = 1, \quad X(-2) = 1, \quad X(3) = -\frac{1}{2j} e^{-j\pi/4} = \frac{1}{2} e^{j\pi/2} e^{-j\pi/4} = \frac{1}{2} e^{j\pi/4},$$

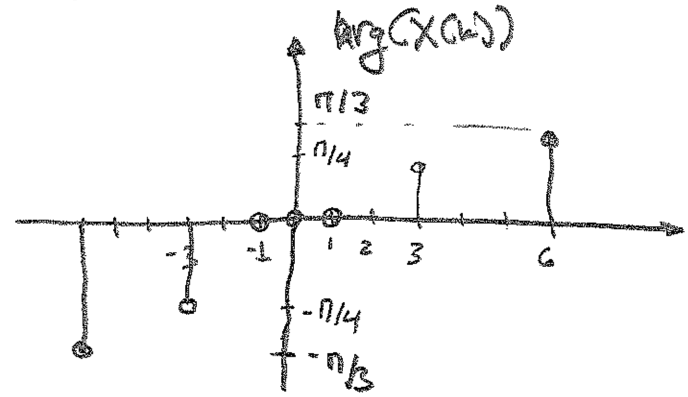
$$X(-3) = \frac{1}{2} e^{-j\pi/4}, \quad X(6) = 2e^{j\pi/3}, \quad X(-6) = 2e^{-j\pi/3}.$$

Επομένως:

$$X(k) = \begin{cases} 3 & k = 0 \\ 1 & k = \pm 1 \\ \frac{1}{2} e^{j\pi/4} & k = 3 \\ \frac{1}{2} e^{-j\pi/4} & k = -3 \\ 2e^{j\pi/3} & k = 6 \\ 2e^{-j\pi/3} & k = -6 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Τα φάσματα πλάτους και φάσης φαίνονται στο σχήμα:





(γ) Η ισχύς του σήματος μπορεί να υπολογισθεί εύκολα στο πεδίο της συχνότητας:

$$\frac{1}{2}\int_{\langle 2\rangle} x^2(t)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|X(k)|^2 = |X(0)|^2 + 2\left[|X(1)|^2 + X^2(3) + X^2(6)\right]$$

$$= 3^2 + 2\left[1^2+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+2^2\right] = 9 + 2\times\frac{21}{4} = \frac{39}{2} = \underline{\underline{19.5}}$$

Το ποσοστό της ισχύος στη συχνότητα $\omega = 6\pi$ είναι:

$$\frac{|X(6)|^2+|X(-6)|^2}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|X(k)|^2} = \frac{2\cdot 2^2}{19.5} = \underline{\underline{41\%}}$$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ } 5^{\underline{o}}}$

$$\delta_{T_0}(t) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_0)$$

(α) Προφανώς από το σχήμα φαίνεται ότι το $\delta_{T_0}(t)$ είναι ένα περιοδικό σήμα με βασική περίοδο T_0, και θεμελιώδη συχνότητα $\omega_0 = 2\pi/T_0$.

Από την εξίσωση ανάλυσης της σειράς Fourier, παίρνουμε:

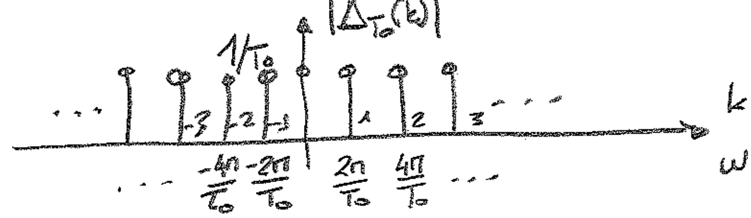
$$\Delta_{T_0}(k) = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle}\delta_{T_0}(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\delta(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{T_0}.$$

Δηλαδή: $$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Delta_{T_0}(k)\,e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{jk\omega_0 t},\quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}.$$

και $$\delta_{T_0}(t) = \sum \delta(t-kT_0) \xleftrightarrow{FS,\ \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}} \Delta_{T_0}(k) = \frac{1}{T_0}$$

Το φάσμα πλάτους του $\delta_{T_0}(t)$ φαίνεται στο σχήμα:



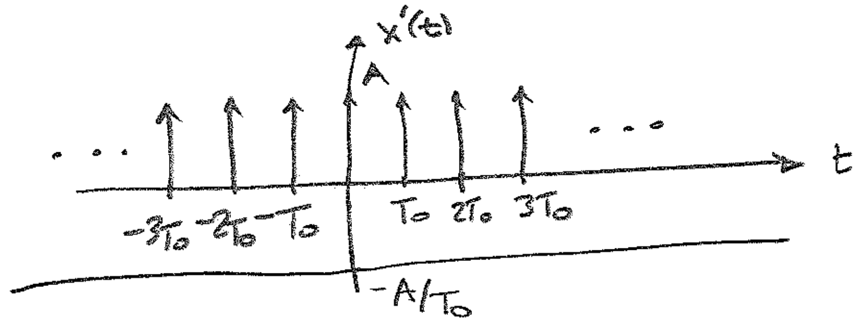
(β1) Στο διάστημα της πρώτης περιόδου $0 < t \le T_0$, η έκφραση για το $x(t)$ είναι: $A\left(1-\frac{t}{T_0}\right)$.

Συνεπώς για κάθε $t \in (kT_0, (k+1)T_0]$; $k=0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ η παράγωγος του $x(t)$ είναι:

$$x'(t) = \frac{d}{dt} A\left(1-\frac{t}{T_0}\right) = -\frac{A}{T_0}$$

Στα σημεία ασυνέχειας kT_0 ; $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ θα έχουμε $x'(t) = A\,\delta(t-kT_0)$. Τελικά:

$$x'(t) = -\frac{A}{T_0} + A\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT_0).$$



Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα απο το μέρος (α1), και την ιδιότητα παραγώγισης στο χρόνο των σειρών Fourier:

$$x'(t) \xleftrightarrow{FS,\,\omega_0} jk\omega_0 X(k)$$

έχουμε ότι:

- Για $k \neq 0$: $jk\omega_0 X(k) = \frac{A}{T_0} \Rightarrow X(k) = \frac{A}{jk\omega_0 T_0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow X(k) = \frac{A}{2\pi k} e^{-j\pi/2}$$

- Για $k=0$, $X(0) = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} A\left(1-\frac{t}{T_0}\right)dt$

$$= \frac{1}{T_0}\,\frac{1}{2} A T_0 = \frac{A}{2}.$$

Τελικά,

$$X(k) = \begin{cases} A/2 \quad , & k=0 \\ \dfrac{A}{2\pi k} e^{-j\pi/2} \quad , & k=\pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$