HY-215, ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

14-9-2013

ΘΕΜΑ 1ο

Παρατηρώντας τις γραφικές παραστάσεις, έχουμε ότι:

$$f(x) = g(x) + g(x-2) \quad \text{και} \quad h(x) = f(x) + f(-x).$$

Συνεπώς, παίρνοντας τον FT και στα δύο μέρη των εξισώσεων και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του FT, έχουμε:

$$F(j\omega) = G(j\omega) + G(j\omega) \cdot e^{-j2\omega} \Rightarrow$$

$$4\,\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \cos(\omega) \cdot e^{-j\frac{3}{2}\omega} = G(j\omega)\left(1 + e^{-j2\omega}\right)$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{4\,\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \cos(\omega/2) \cdot \cos(\omega) \cdot e^{-j3/2\,\omega}}{e^{-j\omega}\left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right)}$$

$$= \frac{4\,\text{sinc}^2(\omega/2\pi) \cos(\omega/2) \cos(\omega) \cdot e^{-j3/2\,\omega}}{e^{-j\omega} \cdot 2\cos(\omega)}$$

$$\therefore \quad G(j\omega) = 2\,\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \cdot \cos(\omega/2) \cdot e^{-j\frac{\omega}{2}}.$$

Επίσης,

$$H(j\omega) = F(j\omega) + F(-j\omega)$$

$$= 4\,\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \cos(\omega) \left(e^{-j\frac{3}{2}\omega} + e^{j\frac{3}{2}\omega}\right)$$

$$= 8\,\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \cos(\omega) \cos\left(\frac{3\omega}{2}\right).$$

ΘΕΜΑ 2ο

(a) $$H(j\omega) = FT\{h(t)\} = FT\{\delta(t-3)\} - FT\{e^{-7(t-3)} u(t-3)\}$$

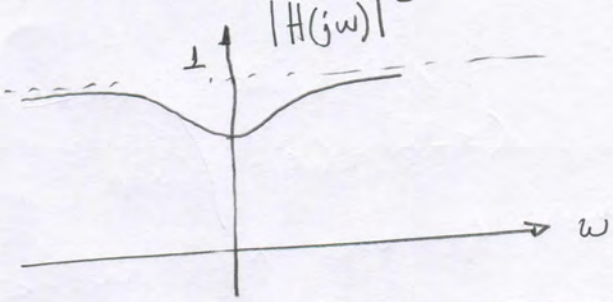
$$= e^{-j3\omega} - e^{-j3\omega} \frac{1}{7+j\omega} = e^{-j3\omega}\left(1 - \frac{1}{7+j\omega}\right)$$

$$\therefore \quad H(j\omega) = e^{-j3\omega} \frac{6+j\omega}{7+j\omega}$$

Το τετράγωνο του μέτρου είναι: $|H(j\omega)|^2 = \frac{|6+j\omega|^2}{|7+j\omega|^2} = \frac{6^2+\omega^2}{7^2+\omega^2}.$

Παρατηρούμε ότι: $|H(j\omega)|^2\Big|_{\omega=0} = \frac{6^2}{7^2} = 0.7347$, ενώ

$\lim_{\omega\to\pm\infty} |H(j\omega)|^2 = 1$.



(β) Η έξοδος του συστήματος στην είσοδο $x(t)$ υπολογίζεται ως το άθροισμα των επιμέρους εξόδων στις δύο συνιστώσες της εισόδου $x_1(t) = 7$ και $x_2(t) = 7\cos(7t+2\pi)$.

Έχουμε ότι $y_1(t) = x_1(t)\cdot H(j0) = 7\cdot\frac{6}{7} = 6$.

Η απόκριση στη συχνότητα $\omega = 7$ rad/sec είναι:

$$H(j7) = e^{-j21}\cdot\frac{6+j7}{7+j7} = e^{-j21}\cdot\frac{(6+j7)(7-j7)}{7^2+7^2}$$

$$= \frac{1}{98}e^{-j21}\cdot(91+7j) = \frac{1}{98}e^{-j21}\cdot 91.2688\, e^{j0.0768}$$

$$= 0.9313\, e^{-j0.66\pi}$$

Επομένως, $y_2(t) = 7|H(j7)|\cdot\cos(7t+\angle H(j\omega))$

$$= 7\times 0.9313\cdot\cos(7t-0.66\pi)$$

$$= 6.5191\cdot\cos(7t-0.66\pi)$$

Τελικά, $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$

$$\boxed{y(t) = 6 + 6.5191\cdot\cos(7t-0.66\pi)}$$

ΘΕΜΑ 3ο Εφαρμόζουμε και στα δύο μέλη το FT:

$$(j\omega)^2 Y(j\omega) + 6j\omega Y(j\omega) + 8Y(j\omega) = 2X(j\omega) \Rightarrow$$

$$H(j\omega) \triangleq \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{2}{(j\omega)^2 + 6j\omega + 8} = \frac{2}{(2+j\omega)(4+j\omega)}$$

$$= \frac{A}{2+j\omega} + \frac{B}{4+j\omega} \quad \text{όπου}$$

$$A = H(j\omega)\cdot(2+j\omega)\Big|_{j\omega=-2} = \frac{2}{4-2} = 1$$

$$B = H(j\omega)(4+j\omega)\Big|_{j\omega=-4} = \frac{2}{2-4} = -1$$

$$\therefore H(j\omega) = \frac{1}{2+j\omega} - \frac{1}{4+j\omega}$$

Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο FT, παίρνουμε την κρουστική απόκριση:

$$h(t) = FT^{-1}\{H(j\omega)\} = e^{-2t}u(t) - e^{-4t}u(t).$$

ΘΕΜΑ 4ο (α) Υπολογίζουμε τις συναρτήσεις μεταφοράς των δύο συστημάτων S_1 και S_2:

$$S_1: \quad sY(s) + 2Y(s) = X(s) \Rightarrow H_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+2}, \quad Re\{s\} > -2$$

$$S_2: \quad sY(s) + 3Y(s) = sX(s) + 2X(s) \Rightarrow H_2(s) = \frac{s+2}{s+3}, \quad Re\{s\} > -3.$$

Για το συνολικό σύστημα, έστω $z(t)$ η έξοδος του αθροιστή. $Z(s) = X(s) - H_2(s)\cdot Y(s)$.

Τότε, $Y(s) = H_1(s)\cdot Z(s)$ όπου

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)\cdot H_2(s)} = \frac{\frac{1}{s+2}}{1 + \frac{1}{s+2}\cdot\frac{s+2}{s+3}}$$

$$\therefore \quad H(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s+4)}, \quad Re\{s\} > -2$$

Το $H(s)$ είναι ευσταθές διότι η περιοχή σύγκλισης περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα.

(β) $$H(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s+4)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+4}$$ όπου

$$A = H(s)(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{s+3}{s+4}\Big|_{s=-2} = \frac{1}{2}$$

$$B = H(s)(s+4)\Big|_{s=-4} = \frac{s+3}{s+2}\Big|_{s=-4} = -\frac{1}{2}$$

Συνεπώς, $h(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-2t} - e^{-4t}\right)u(t)$.

(γ) $$Y(s) = H(s)\cdot X(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s+4)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s+3}{s(s+2)(s+4)}, \quad Re\{s\} > 0$$

$$Y(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{s}$$ όπου

$$A = Y(s)\cdot(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{s+3}{s(s+4)}\Big|_{s=-2} = -\frac{1}{4}$$

$$B = Y(s)(s+4)\Big|_{s=-4} = \frac{s+3}{s(s+2)}\Big|_{s=-4} = -\frac{1}{8}$$

$$C = Y(s)\, s\Big|_{s=0} = \frac{s+3}{(s+2)(s+4)}\Big|_{s=0} = \frac{3}{8}$$

$$\therefore \quad Y(s) = \frac{3}{8}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{8}\frac{1}{s+4} \Rightarrow$$

$$y(t) = \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{8}e^{-4t}\right)\cdot u(t).$$

(δ) $$H^{-1}(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{s+3}$$ που έχει ένα πόλο στο $s_0 = -3$

Για $Re\{s\} > -3$ προκύπτει ένα αιτιατό και ευσταθές αντίστροφο σύστημα.

□.