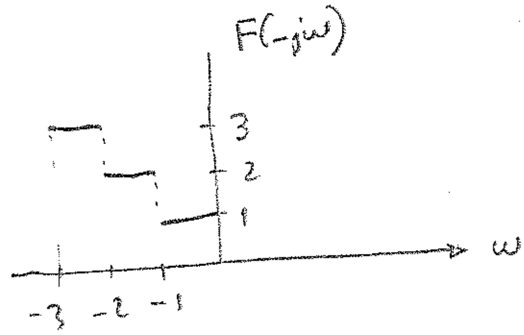
ΗΥ-215 ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ – ΛΥΣΕΙΣ

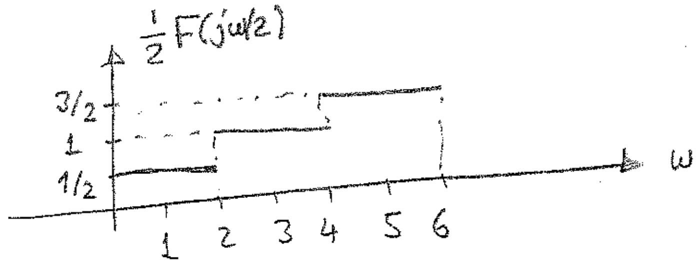
ΘΕΜΑ 1ο

Έστω ότι $F(j\omega) = FT\{f(t)\}$. Από τις ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier έχουμε ότι:

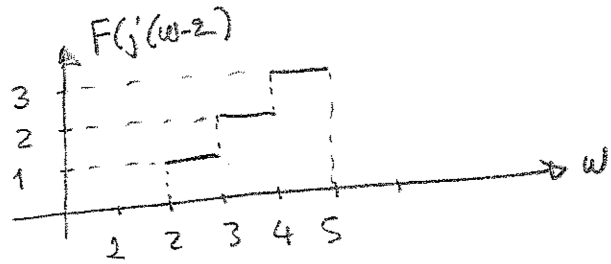
(α) $FT\{f(-t)\} = F(-j\omega)$



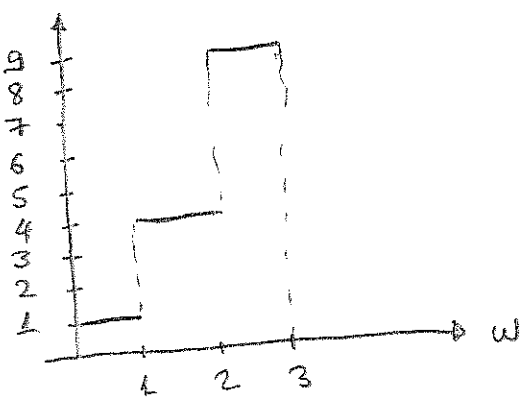
(β) $FT\{f(2t)\} = \frac{1}{2} F(j\omega/2)$



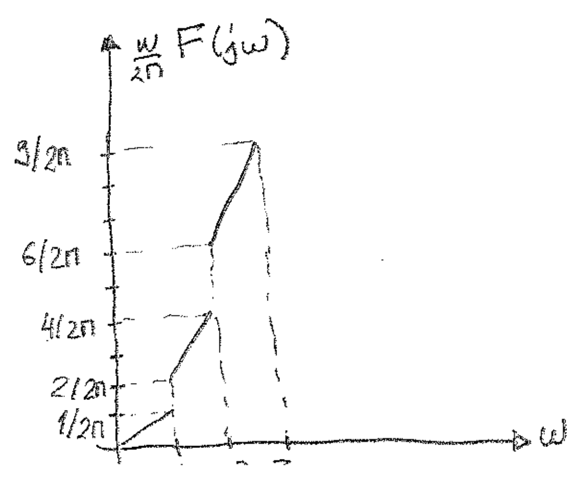
(γ) $FT\{e^{j2t} \cdot f(t)\} = F(j(\omega-2))$



(δ) $FT\{f(t) * f(t)\} = F(j\omega) \cdot F(j\omega) = F^2(j\omega)$



(ε) $FT\left\{\frac{1}{2\pi j} f'(t)\right\} = \frac{\omega}{2\pi} F(j\omega)$



ΘΕΜΑ 2ο

(α) Η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής του απόκρισης:

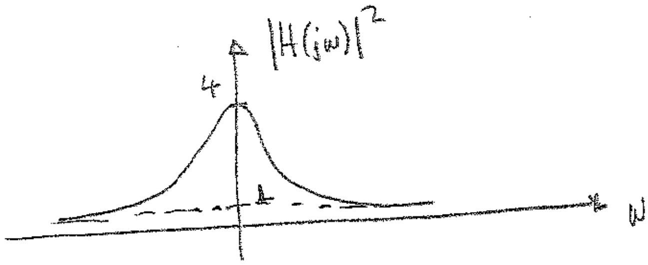
$$H(j\omega) = FT\{h(t)\} = FT\{\delta(t)\} + FT\{5e^{-5t}u(t)\}$$

$$= 1 + \frac{5}{5+j\omega} = \frac{10+j\omega}{5+j\omega}.$$

Έχουμε ότι:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{|10+j\omega|^2}{|5+j\omega|^2} = \frac{10^2+\omega^2}{5^2+\omega^2}$$

Βλέπουμε ότι $|H(j\omega)|^2\Big|_{\omega=0} = 4$, $\lim_{\omega\to\pm\infty}|H(j\omega)|^2 = 1$



(β) Όπως φαίνεται από το σχήμα, το σύστημα ενισχύει περισσότερο την DC συχνότητα $\omega=0$, για την οποία $|H(j\omega)|^2=4$.

Για να βρούμε την 3dB συχνότητα, λύνουμε την εξίσωση

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{|H(j0)|^2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \frac{10^2+\omega^2}{5^2+\omega^2} = 2 \Rightarrow$$

$$100+\omega^2 = 50+2\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = 50 \Rightarrow \underline{\omega = 7.07 \text{ rad/sec}}$$

(γ) Προφανώς, η έξοδος του ΓΧΑ συστήματος στην είσοδο $x(t)$ μπορεί να υπολογιστεί ως το άθροισμα των επιμέρους εξόδων στις δύο συνιστώσες της εισόδου $x_1(t)=1$ και $x_2(t)=2\cos(100t)$.

Έχουμε ότι: $y_1(t) = x_1(t)\cdot H(j0) = 1\cdot 2 = 2$.

Επίσης, αν έχουμε ως είσοδο το σήμα $x_2(t) = 2\cos(100t)$ τότε για να υπολογίσουμε την έξοδο χρειαζόμαστε το μέτρο και τη φάση της απόκρισης συχνότητας του συστήματος στα 100 rad/sec:

$$H(j100) = \frac{10+j100}{5+j100} = 1.004\,e^{-j0.05}$$

Συνεπώς $y_2(t) = 2\times 1.004\cos(100t-0.05)$. Εφαρμόζοντας την αρχή της υπέρθεσης: $y(t) = 2 + \underline{2.008\cos(100t-0.05)}$.

ΘΕΜΑ 3ο (α) Είναι λογικό να θεωρήσουμε το σύστημα γραμμικό: Αν χτυπήσουμε την καμπάνα με δύο σφυριά (προσθέτονται τις εισόδους) τότε ο ήχος θα προκύψει προσθετικά. Αν χτυπήσουμε την καμπάνα με διπλάσια δύναμη, περιμένουμε ότι ο ήχος θα είναι (προσεγγιστικά) δύο φορές πιο δυνατός.

Επίσης, λογικά το σύστημα είναι και χρονικά αμετάβλητο, διότι αν χτυπήσουμε την καμπάνα αργότερα θα ηχήσει αργότερα!

(β) Ευστάθεια σημαίνει ότι για φραγμένη είσοδο, η έξοδος είναι επίσης φραγμένη. Η καμπάνα είναι ευσταθές σύστημα καθώς όταν την χτυπήσουμε, ο ήχος δεν μπορεί να είναι άπειρα δυνατός.

(γ) Για να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση, $h(t)$, αυτού του συστήματος πρέπει να προσεγγίσουμε την κρουστική συνάρτηση ως είσοδο. Αυτή μπορεί να είναι ένα πολύ δυνατό χτύπημα με το σφυρί που εφαρμόζεται για πολύ μικρό χρονικό διάστημα.

Προφανώς η καμπάνα δεν μπορεί να παράξει ήχο <u>πριν</u> την χτυπήσουμε. Με άλλα λόγια $h(t)=0$ για $t<0$. Αυτό σημαίνει ότι η $h(t)$ περιέχει την βηματική συνάρτηση $u(t)$.

Δεύτερον, καθώς ο ήχος που παράγεται από την ταλάντωση του υλικού της καμπάνας αντιστοιχεί σε έναν τόνο συχνότητας ω_0 (που εξαρτάται από το υλικό, το μέγεθος, το σχήμα κτλ) η $h(t)$ θα περιέχει και ένα όρο της μορφής $\cos(\omega_0 t)$.

Τέλος, ο ήχος της καμπάνας σβήνει με την πάροδο του χρόνου. Συνεπώς, η $h(t)$ θα περιέχει και έναν όρο της μορφής e^{-at}, όπου η σταθερά απόσβεσης, α, θα εξαρτάται από το μέσο μετάδοσης του ήχου. Συνεπώς,

$$\boxed{h(t) = e^{-at}\cos(\omega_0 t)\cdot u(t)}$$

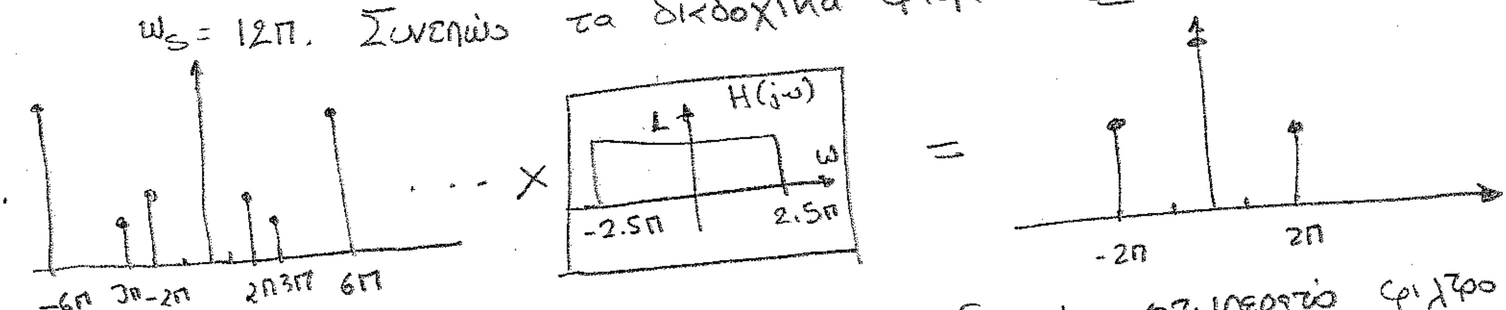
ΘΕΜΑ 4ο (α) Ήδη από την πρόοδο είδαμε ότι το σήμα είναι περιοδικό με βασική συχνότητα $\omega_0 = \pi$. Η μέγιστη συχνότητα του $x(t)$ είναι προφανώς $\omega_{max} = 6\pi$ rad/sec ή $f_c = 3$ Hz.

Σύμφωνα με το θεώρημα της δειγματοληψίας,

$$f_s = 2 f_{max} = \underline{\underline{6\ Hz}}.$$

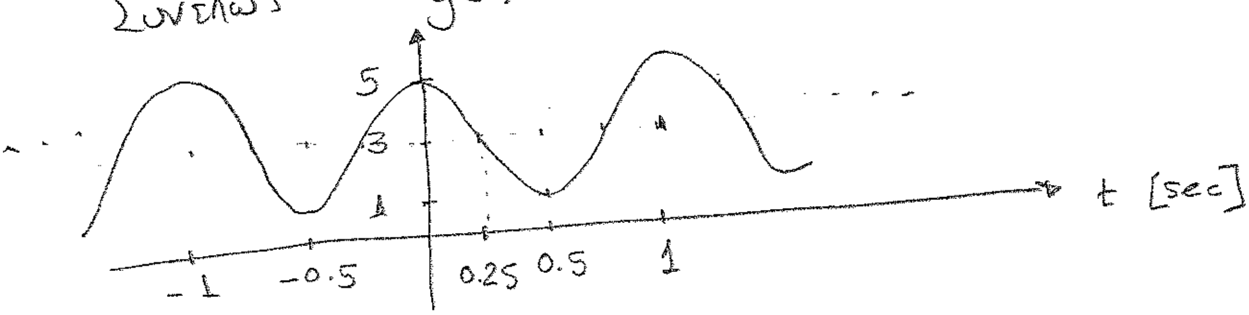
Άρα πρέπει να παίρνουμε τουλάχιστον 6 δείγματα ανά δευτερόλεπτο. Πρέπει να δειγματοληπτούμε το πολύ κάθε $1/6 = 0.167$ δευτερόλεπτα.

(β) Το φάσμα του $x(t)$ αποτελείται από γραμμές στις συχνότητες $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \pm 2\pi$, $\omega_3 = \pm 3\pi$ και $\omega_4 = \pm 6\pi$. Το φάσμα του $x[n] = x(nT_s)$ όταν $T_s = 1/f_s$ δείξαμε ότι ισούται με το άθροισμα απείρων ειδώλων του φάσματος του $x(t)$ μετατοπισμένων κατά ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας δειγματοληψίας $\omega_s = 12\pi$. Συνεπώς τα διαδοχικά φάσματα <u>δεν</u> επικαλύπτονται:



Δίνοντας το $x[n]$ ως είσοδο στο ιδανικό κατωπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\omega_c = 2.5\pi$, η έξοδος που προκύπτει αποτελείται από τις συνιστώσες της εισόδου στις συχνότητες 0 και 2π.

Συνεπώς $y(t) = 3 + 2\cos(2\pi t)$.



ΘΕΜΑ 5ο

(α) Καταρχάς υπολογίζουμε τις συναρτήσεις μεταφοράς των δύο συστημάτων S_1 και S_2:

$$S_1: \quad s\cdot Y(s) + Y(s) = X(s) \Rightarrow H_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{1+s}, \quad Re\{s\} > -1.$$

$$S_2: \quad sY(s) + 2Y(s) = sX(s) + X(s) \Rightarrow H_2(s) = \frac{1+s}{2+s}, \quad Re\{s\} > -2.$$

Για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος, ονομάζουμε την έξοδο του αθροιστή ως $z(t)$. Δουλεύοντας στο πεδίο της συχνότητας, έχουμε ότι $Y(s) = H_1(s)\cdot Z(s)$ όπου $Z(s) = X(s) - H_2(s)\cdot Y(s)$. Συνδυάζοντας τις δύο αυτές σχέσεις και λύνοντας ως προς $Y(s)/X(s)$ παίρνουμε ότι:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)\cdot H_2(s)}.$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει γενικότερα για ένα κλειστού βρόγχου σύστημα της μορφής αυτής, το οποίο συναντάται συχνά σε εφαρμογές προσαρμοστικού ελέγχου. Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για τα S_1 και S_2:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{1+s}}{1 + \frac{1}{1+s}\,\frac{1+s}{2+s}} = \frac{2+s}{(1+s)(3+s)}, \quad Re\{s\} > -1.$$

Το $H(s)$ είναι ευσταθές διότι η περιοχή σύγκλισης περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα.

(β)
$$H(s) = \frac{2+s}{(1+s)(3+s)} = \frac{A}{1+s} + \frac{B}{3+s} \quad \text{όπου}$$

$$A = H(s)\cdot(1+s)\Big|_{s=-1} = \frac{2+s}{3+s}\Big|_{s=-1} = \frac{1}{2}$$

$$B = H(s)(3+s)\Big|_{s=-3} = \frac{2+s}{1+s}\Big|_{s=-3} = \frac{1}{2}$$

Συνεπώς, $h(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-t} + e^{-3t}\right)u(t)$.

(γ) Δουλεύουμε στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας:

$$Y(s) = H(s)\cdot X(s) = \frac{2+s}{(1+s)(3+s)}\,\frac{1}{s} = \frac{2+s}{s(1+s)(3+s)}; \quad Re\{s\} > 0$$

Δουλεύουμε και πάλι αναλύοντας σε απλά κλάσματα:

$$Y(s) = \frac{A}{1+s} + \frac{B}{3+s} + \frac{C}{s}$$

$$A = Y(s)\cdot(1+s)\Big|_{s=-1} = \frac{2+s}{s(3+s)}\Big|_{s=-1} = -\frac{1}{2}$$

$$B = Y(s)(3+s)\Big|_{s=-3} = \frac{2+s}{s(1+s)}\Big|_{s=-3} = -\frac{1}{6}$$

$$C = Y(s)\cdot s\Big|_{s=-3} = \frac{2+s}{(1+s)(3+s)}\Big|_{s=0} = \frac{2}{3}$$

$$Y(s) = \frac{2}{3}\,\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+s} - \frac{1}{6}\,\frac{1}{3+s} \implies$$

$$y(t) = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t}\right)\cdot u(t).$$

(δ) Για το αντίστροφο του $H(s)$:

$$H^{-1}(s) = \frac{(1+s)(3+s)}{2+s}$$

Έχει ένα πόλο στο $s_0 = -2$

Για $Re\{s>-2\}$ προκύπτει ένα αιτιατό και ευσταθές αντίστροφο σύστημα.