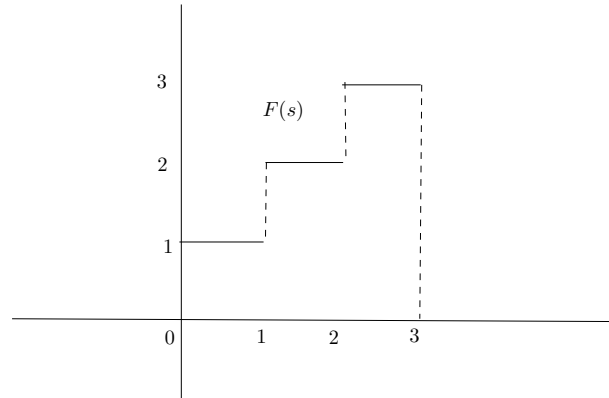


Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
21 Ιουνίου 2013 - Διάρκεια: 3 Ώρες

Θέμα 1 - 20 μονάδες. Έστω το σήμα $f(t)$ με μετασχηματισμό Fourier (FT) που φαίνεται στο Σχήμα 1. Να σχεδιάσετε το FT των παρακάτω σημάτων. Να είστε ακριβείς ως προς τις τιμές που θα γράψετε στους δύο άξονες.



Σχήμα 1: Ο Μετασχηματισμός Fourier του θέματος 1.

- (α) $f(-t)$
- (β) $f(2t)$
- (γ) $e^{j2t}f(t)$
- (δ) $f(t) * f(t)$, όπου το $*$ δηλώνει συνέλιξη.
- (ε) $\frac{1}{2\pi j}f'(t)$, όπου το $'$ δηλώνει παραγώγιση ως προς t .

Θέμα 2 - 20 μονάδες. Η κρουστική απόκριση ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (ΓΧΑ) συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$h(t) = \delta(t) + 5e^{-5t}u(t).$$

(α) Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας, $H(j\omega)$, του συστήματος και σχεδιάστε το τετράγωνο του μέτρου, $|H(j\omega)|^2$, ως συνάρτηση της συχνότητας ω .

(β) Ποια είναι η συχνότητα την οποία ενισχύει περισσότερο αυτό το σύστημα; Σε ποια συχνότητα το τετράγωνο του μέτρου της απόκρισης παίρνει το μισό της μέγιστης τιμής; (Η συχνότητα αυτή αναφέρεται και ως $3dB$ συχνότητα, διότι σε dB κλίμακα, $10 \log(|H(j\omega)|^2)$, η απόκριση εκεί είναι $3.01dB$ μικρότερη από τη μέγιστη τιμή.)

(γ) Υπολογίστε την έξοδο του συστήματος όταν η είσοδος είναι η $x(t) = 1 + 2 \cos(100t)$.

Θέμα 3 - 10 μονάδες. Μοντελοποιούμε το καμπαναριό του Σχήματος 2 ως ένα σύστημα όπου το σφυρί (που χτυπά την καμπάνα) είναι η είσοδος, η καμπάνα είναι το σύστημα και ο ήχος που προκύπτει είναι η έξοδος. Απαντήστε με μικρές συνοπτικές προτάσεις στις ακόλουθες ερωτήσεις.

(α) Είναι το σύστημα γραμμικό; Είναι χρονικά αμετάβλητο;

(β) Είναι το σύστημα ευσταθές;

(γ) Δώστε μία μαθηματική έκφραση (σε μία γραμμή) που πιστεύετε ότι εκφράζει την κρουστική απόκριση, $h(t)$, του συστήματος. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



Σχήμα 2: Το καμπαναριό του θέματος 3.

Θέμα 4 - 20 μονάδες. Μας δίνεται το σήμα :

$$x(t) = 3 + 2 \cos(2\pi t) - \sin(3\pi t - \pi/4) + 4 \cos(6\pi t + \pi/3).$$

(α) Για το σήμα $x(t)$, υπολογίστε την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας, f_s , σύμφωνα με το κριτήριο του Nyquist. Πόσα δείγματα πρέπει να παίρνουμε ανά δευτερόλεπτο; Πόσο συχνά πρέπει να δειγματοληπτούμε;

(β) Έστω τώρα ότι σχηματίσαμε την ακολουθία των δειγμάτων, $x[n] = x(nT_s)$, δειγματοληπτώντας το σήμα μας κάθε $T_s = 1/f_s$ δευτερόλεπτα. Στη συνέχεια δίνουμε αυτή την ακολουθία των δειγμάτων ως είσοδο σε ένα ιδανικό κατωπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\omega_c = 2.5\pi$. Σχεδιάστε το σήμα της εξόδου του φίλτρου στο πεδίο του χρόνου.

Θέμα 5 - 30 μονάδες. Έστω δύο αιτιατά ΓΧΑ συστήματα S_1 και S_2 των οποίων η λειτουργία εκφράζεται μέσα από τις διαφορικές εξισώσεις

$$S_1 : \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$S_2 : \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

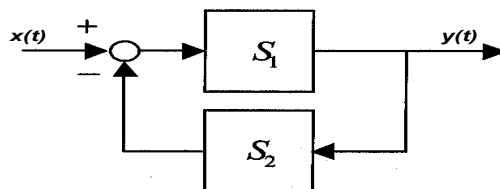
Θεωρήστε μηδενικές αρχικές συνθήκες.

(α) Υπολογίστε τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(s)$, του συνολικού αιτιατού συστήματος με ανάδραση (closed loop) του Σχήματος 3 και περιγράψτε το πεδίο σύγκλισης. Είναι το σύστημα ευσταθές;

(β) Υπολογίστε την κρουστική απόκριση, $h(t)$, του συστήματος.

(γ) Υπολογίστε την έξοδο του συστήματος, $y(t)$ αν στην είσοδο εφαρμόσουμε την βηματική συνάρτηση, $x(t) = u(t)$. Σχεδιάστε την έξοδο $y(t)$.

(δ) Είναι το αντίστροφο σύστημα ευσταθές και αιτιατό;



Σχήμα 3: Το σύστημα του θέματος 5.