

HY-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2013
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 26/04/2013

Ημερομηνία Παράδοσης: 17/05/2013

Άσκηση 1. Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του Μετασχηματισμού Fourier για να υπολογίσετε την αναπαράσταση στο πεδίο της συχνότητας των παρακάτω σημάτων:

(α) $x(t) = e^{-2t}u(t - 3)$

(β) $x(t) = e^{-4|t|}$

(γ) $x(t) = te^{-t}u(t)$

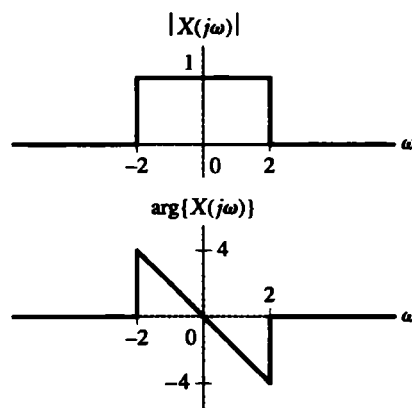
Άσκηση 2. Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του αντίστροφου Μετασχηματισμού Fourier για να υπολογίσετε στο πεδίο του χρόνου τα σήματα που περιγράφονται παρακάτω στον χώρο της συχνότητας.

(α) $X(j\omega) = \begin{cases} \cos(2\omega), & |\omega| < \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

(β) $X(j\omega) = e^{-2\omega}u(\omega)$

(γ) $X(j\omega) = e^{-2|\omega|}$

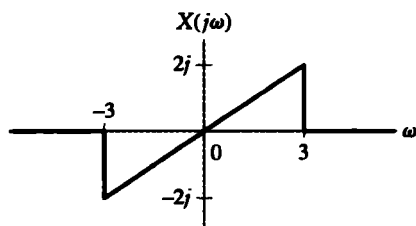
(δ) $X(j\omega)$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1.



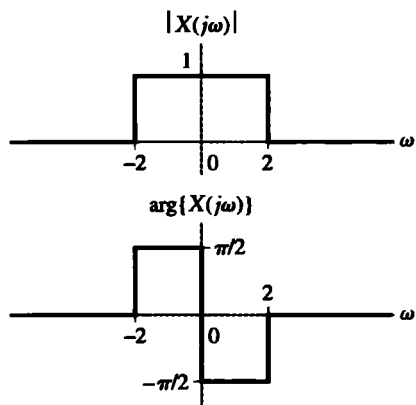
Σχήμα 1.1

(ε) $X(j\omega)$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.2.

(στ) $X(j\omega)$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3.



Σχήμα 1.2



Σχήμα 1.3

Άσκηση 3. Δίνεται ο Μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$:

$$X(j\omega) = \frac{4}{3+j\omega}$$

Να βρεθεί ο Μετασχηματισμός Fourier του :

- (α) $x(-2t)$
- (β) $x(t - 5)$
- (γ) $x(8t - 2)$
- (δ) $tx(t)$
- (ε) $e^{j6t}x(t)$
- (στ) $\frac{dx(t)}{dt}$
- (ζ) $e^{-3|t|}\sin(2t)$

Άσκηση 4. Να δειχθεί ότι :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(kx) dx = \frac{1}{k}.$$

Άσκηση 5. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(t) = \frac{t}{|t|}.$$

(α) Να βρεθεί ο Μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης:

$$e^{-\alpha|t|}f(t), \alpha \in \mathbb{R}^+$$

(β) Να δειχθεί ότι ο Μετασχηματισμός Fourier μιας άρτιας συνάρτησης είναι πραγματική συνάρτηση, ενώ μια περιττή συνάρτηση έχει "φανταστικό" Μετασχηματισμό Fourier.

(γ) Βάση του ερωτήματος (β) σχολιάστε σχετικά το ερώτημα (α).

Άσκηση 6. Να σχεδιάσετε τα σήματα:

$$x(t) = -3\text{rect}\left(\frac{t+3}{2}\right)$$

$$y(t) = -\text{tri}\left(\frac{t-4}{2}\right) + \text{tri}\left(\frac{t}{2}\right)$$

(α) Βρείτε τον Μετασχηματισμό Fourier τους χρησιμοποιώντας

(i) τον ορισμό του Μετασχηματισμού Fourier.

(ii) τις ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier.

(β) Υπολογίστε την συνέλιξη των δύο σημάτων.

Σημείωση.

$$\text{Όπου, } \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{T}, & -T < t < 0 \\ 1 - \frac{t}{T}, & 0 \leq t < T \end{cases}$$

Άσκηση 7. MATLAB (Μητροπάνος)

Σε αυτήν την άσκηση, θα μελετήσετε μια απλή εκδοχή του προβλήματος της *αποθρομβοποίησης σήματος - signal denoising*. Σας δίνεται ένα σήμα στο οποίο έχει προστεθεί θόρυβος, και εσείς πρέπει να το καθαρίσετε, χρησιμοποιώντας το Μετασχηματισμό Fourier.

Μια έκδοσή του για MATLAB σας δίνεται στη συνάρτηση *ctft.m*. Το MATLAB έχει βέβαια έτοιμη συνάρτηση για Μετασχηματισμό Fourier, την *fft*, αλλά η υλοποίηση που σας δίνεται σας παρέχει μεγαλύτερο έλεγχο. Γραψτε *help ctft* για να δείτε σύνταξη και χρήση.

Επίσης, σας δίνεται το καθαρο μουσικό δείγμα *sample.wav*, καθώς και το *sample-noise.wav*, στο οποίο έχει προστεθεί θόρυβος, με τη μορφή ημιτόνων. Τα δυο αυτά σήματα έχουν συχνότητα δειγματοληψίας 16000 Hz. Μπορείτε να δείτε και να ακούσετε τα σήματα με τις εντολές

```
[sn, fs] = wavread('sample_noise.wav');
[sc, fs] = wavread('sample.wav');
t = 0:1/fs:length(sc)/fs - 1/fs;
figure; plot(t, ns); xlabel('Time (s)'); title('Signal with noise');
figure; plot(t, nc); xlabel('Time (s)'); title('Clean signal');
soundsc(sc, fs);
soundsc(sn, fs);
```

Όταν ακούσετε το σήμα με θόρυβο, θα παρατηρήσετε ένα ενοχλητικό σφύριγμα επάνω στο τραγούδι. Καλείστε να το αφαιρέσετε χρησιμοποιώντας το Μετασχηματισμό Fourier. Προς διευκόλυνσή σας, ο θόρυβος είναι της μορφής 19 ημιτόνων, τα οποία βρίσκονται στο εύρος συχνοτήτων $[6000, 8000] Hz = [12000\pi, 16000\pi] rad/sec$. Τα ημίτονα αυτά είναι στάσιμα καθ' όλη τη διάρκεια του σήματος (αυτό σημαίνει ότι δεν αλλάζει ούτε το πλάτος ούτε η συχνότητά τους με το πέρασμα του χρόνου), και όλα έχουν μηδενική φάση (άρα το φάσμα *φάσης δε* σας ενδιαφέρει). Σας ζητείται να βρείτε τα ημίτονα αυτά, μέσω του Μετασχηματισμού Fourier, να τα συνθέσετε, και να τα αφαιρέσετε από το αρχικό σήμα.

Για να το κάνετε αυτό, επιλέξτε 30 msec από τη μέση περίπου του 'μολυσμένου' σήματος. Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση *ctft.m* για να το αναλύσετε στο εύρος συχνοτήτων που σας ενδιαφέρει. Χρησιμοποιήστε το εικονίδιο του Data Cursor του γραφήματος που θα σας προκύψει για να βρείτε τις συχνότητες και τα πλάτη των 19 ημιτόνων από το φάσμα πλάτους. Αφού τα βρείτε, δώστε τα ως όρισμα στη συνάρτηση *sumofsines.m* (γράψτε *help sumofsines* για να δείτε σύνταξη και χρήση), η οποία θα σας επιστρέψει μια εκτίμηση του θορύβου. Αφαιρέστε την από το "μολυσμένο" σήμα, και ακούστε το αποτέλεσμα!

Ο παρακάτω κώδικας αποτελεί έναν σκελετό του κώδικα που χρειάζεται να υλοποιήσετε:

```
[sn, fs] = wavread('sample_noise.wav'); % Read the signal
segment = sn(??? : ???); % Extract 30 msec (== 480 samples)
df = 1; % 1 Hz analysis step
dt = 1/fs; % Time step (0.00625 sec)
f = ??? : df : ???; % Frequency vector in Hz
omega = 2*pi*f; % Frequency vector in rad/sec
t = 0 : dt : length(segment)*dt - dt; % Time vector
X = ctft(???, ???, ???); % Call the Fourier Transform
Amps = [ ?????????????? ]; % Amplitudes
Omega = [ ?????????????? ]; % Frequencies
noise_est = sumofsines(???, ???, t); % Estimate the noise
recover = ??????????????; % Remove noise from signal
soundsc(recover, fs); % Listen!!
soundsc(s, fs); % Listen to the original to compare
```

Συμπληρώστε τα ερωτηματικά παραπάνω για να δουλέψει ο κώδικας.