ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2013
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 23/05/2013 Ημερομηνία Παράδοσης: 7/06/2013

Άσκηση 1.

(α) Χρησιμοποιώντας τον αμφίπλευρο μετασχηματισμό *Laplace* έχουμε:

$$\begin{aligned} X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}u(t+2)e^{-st}dt \\ &= \int_{-2}^{+\infty} e^{-t(1+s)}dt = \frac{e^{2(1+s)}}{1+s} \end{aligned}$$

Άρα,για το παραπάνω σήμα η περιοχη σύγκλισης ειναι $Re(s) > -1$.

(β) Ο μετασχηματισμός *Laplace* του σήματος $x(t) = u(-t+3)$ γίνεται:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(-t+3)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{3} e^{-st}dt = \frac{-e^{-3s}}{s}$$

Άρα,η περιοχη συγκλισης είναι: $Re(s) < 0$.

(γ) Για το σήμα $x(t) = \sin(t)u(t)$ έχουμε: $x(t) = \sin(t)u(t) = \frac{1}{2j}\left(e^{jt} - e^{-jt}\right)u(t)$.
Οπότε ο μετασχηματισμός *Laplace* γίνεται:

$$\begin{aligned} X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt &= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2j}(e^{jt} - e^{-jt})e^{-st}dt \\ &= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2j}e^{t(j-s)}dt - \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2j}e^{-t(j+s)}dt \\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{-1}{j-s} - \frac{1}{j+s}\right) = \frac{1}{(1+s^2)} \end{aligned}$$

Επομένως η περιοχή σύγκλισης θα είναι: $Re(s) > 0$.

Άσκηση 2.

(α) Για τον μετασχηματισμό $X(s) = e^{5s}\dfrac{1}{s+2}$, $\mathrm{Re}\{s\} < -2$, έχουμε:

$A(s) = \frac{1}{s+2} \longleftrightarrow a(t) = -e^{-2t}u(-t)$

$X(s) = e^{5s}A(s) \longleftrightarrow x(t) = a(t+5) = -e^{-2(t+5)u(-(t+5))}$

(β) Για τον μετασχηματισμό $X(s) = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left(\dfrac{1}{s-3}\right)$, $\mathrm{Re}\{s\} > 3$, έχουμε:

$A(s) = \frac{1}{s-3} \longleftrightarrow a(t) = e^{3t}u(t)$

$X(s) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}A(s) \longleftrightarrow x(t) = t^2e^{3t}u(t)$

(γ) Κάνοντας ανάλυση σε μερικά κλάσματα εχουμε:

$X(s) = \dfrac{-s-4}{s^2+3s+2} = \dfrac{-s-4}{(s+1)(s+2)} = \dfrac{A}{s+1} + \dfrac{B}{s+2}$

$A(s+2) + B(s+1) = -s-4$

$\Leftrightarrow As + 2A + Bs + B = -s - 4$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = -1 \\ 2A + B = -4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -3 \\ B = 2 \end{cases}$

Άρα: $X(s) = \dfrac{-3}{s+1} + \dfrac{2}{s+2}$

Επομένως:

(i) για $\mathrm{Re}\{s\} < -2$ το σήμα $x(t)$ θα είναι: $x(t) = (3e^{-t} - 2e^{-2t})u(-t)$

(ii) για $\mathrm{Re}\{s\} > -1$,το $x(t)$ θα είναι: $x(t) = (-3e^{-t} + 2e^{-2t})u(t)$

(iii) για $-2 < \mathrm{Re}\{s\} < -1$, το σήμα γίνεται: $x(t) = 3e^{-t}u(-t) + 2e^{-2t}u(t)$

(δ) Ο μετασχηματισμός γίνεται:

$$X(s) = \frac{4s^2+8s+10}{(s+2)(s^2+2s+5)}$$

$$X(s) = \frac{2s^2+2s^2+4s+4s+2+8+2s-2s+4-4}{(s+2)[(s+1)^2+2^2]}$$

$$X(s) = \frac{2(s^2+2s+1+4)+2(s+1)(s+2)-2(s+2)}{(s+2)[(s+1)^2+2^2]}$$

$$X(s) = \frac{2[(s+1)^2+2^2]+2(s+1)(s+2)-2(s+2)}{(s+2)[(s+1)^2+2^2]}$$

$$X(s) = \frac{2}{s+2} + \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+2^2} + \frac{-2}{(s+1)^2+2^2}$$

Επομένως:

(i) για $\mathrm{Re}\{s\} < -2$, το σήμα γίνεται: $x(t) = (-2e^{-2t} - 2e^{-t}\cos(2t) + e^{-t}\sin(2t))u(-t)$

(ii) για $\mathrm{Re}\{s\} > -1$,το σήμα γίνεται: $x(t) = (2e^{-2t} + 2e^{-t}\cos(2t) - e^{-t}\sin(2t))u(t)$

(iii) για $-2 < \mathrm{Re}\{s\} < -1$,το σήμα γίνεται: $x(t) = 2e^{-2t}u(t) + (-2e^{-t}\cos(2t) + e^{-t}\sin(2t))u(-t)$

Άσκηση 3.

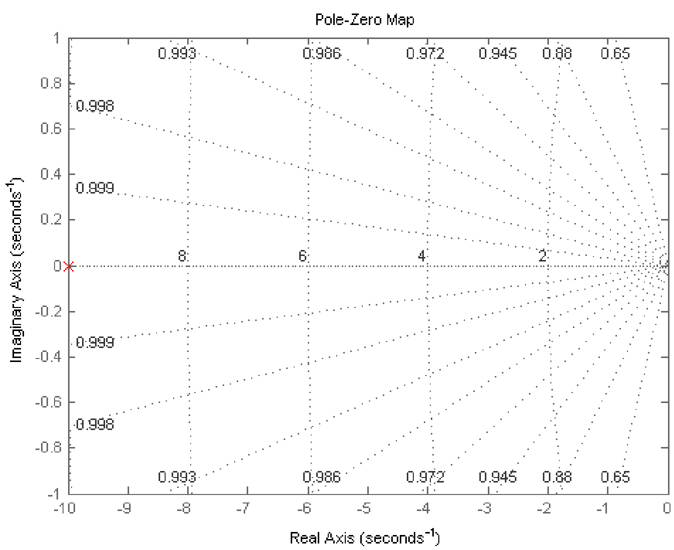
(α) Έχουμε:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + 10y(t) = 10x(t)$$
$$sY(s) + 10Y(s) = 10X(s)$$
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{10}{10+s}$$

Επομένως,η κρουστική απόκριση θα ειναι: $h(t) = 10e^{-10t}u(t)$

Οι πόλοι είναι στο σημείο $s = -10$.

Η γραφική παράσταση πόλων-μηδενικών φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



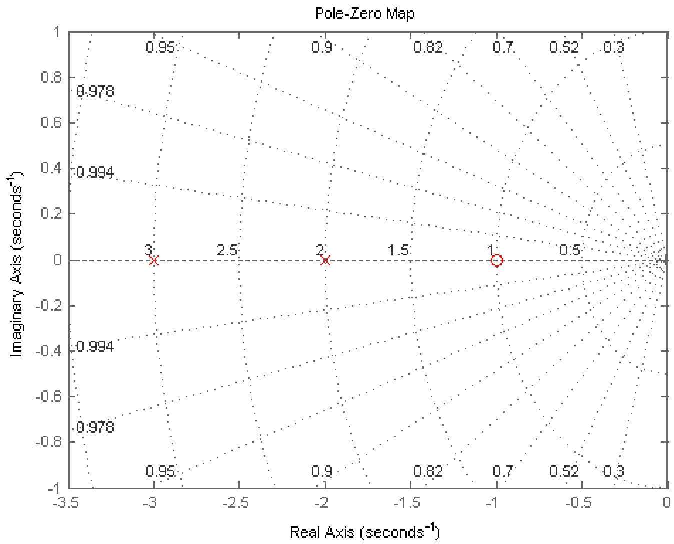
Διάγραμμα πόλων-μηδενικών του ερωτήματος 3(a)

(β) Για το σύστημα $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) + 5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + 6y(t) = x(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$ έχουμε:

$$Y(s)(s^2 + 5s + 6) = X(s)(1 + s)$$
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1+s}{s^2+5s+6} = \frac{1+s}{(s+3)(s+2)} = \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+3}$$

Άρα, η κρουστική απόκριση θα είναι: $h(t) = (2e^{-3t} - e^{-2t})u(t)$

Οι πόλοι του συστήματος είναι στα σημεία $s_1 = -2$ και $s_2 = -3$ και τα μηδενικά στα σημεία $s = -1$. Η γραφική παράσταση πόλων-μηδενικων του συστηματος φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



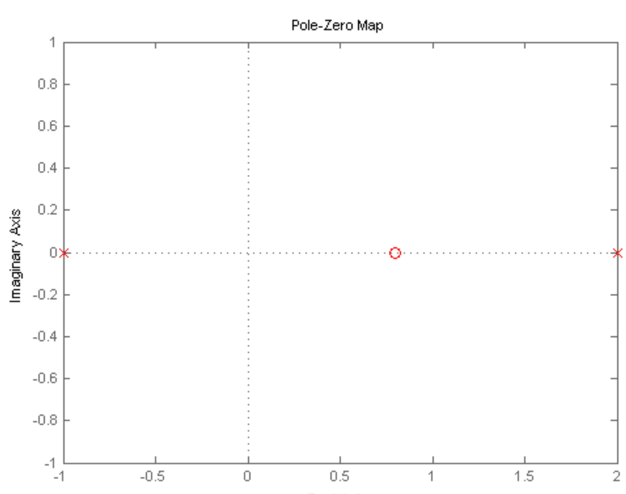
Διάγραμμα πόλων-μηδενικών του ερωτήματος 3(b)

(γ) Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος γίνεται:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) - 2y(t) = -4x(t) + 5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$$
$$Y(s)(s^2 - s - 2) = X(s)(5s - 4)$$
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{5s-4}{s^2-s-2} = \frac{5s-4}{(s-2)(s+1)} = \frac{3}{s+1} + \frac{2}{s-2}$$

Επομένως, η κρουστική απόκριση θα είναι: $h(t) = (3e^{-t} + 2e^{2t})u(t)$

Οι πόλοι του συστήματος είναι στα σημεία $s_1 = -1$ και $s_2 = 2$ και τα μηδενικά στα σημεία $s = 4/5$. Η γραφική παράσταση πόλων-μηδενικων του συστηματος φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Διάγραμμα πόλων-μηδενικών του ερωτήματος 3(c)

Άσκηση 4.
Το σύστημα γινεται:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}h(t)+3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t)+2h(t)=b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta(t)+a\delta(t)+u(t)\\ H(s)(s^2+3s+2)=bs+a+\frac{1}{s}\\ H(s)=\frac{bs+a+\frac{1}{s}}{s^2+3s+2}=\frac{bs^2+as+1}{s(s+2)(s+1)}\end{aligned}$$

Επειδή η κρουστική απόκριση $h(t)$ είναι πραγματική, τα μηδενικά θα εμφανίζονται σε συζυγή ζεύγη. Το ένα γνωρίζουμε ότι ειναι το $s_1=1+j$, το άλλο θα είναι το $s_2=1-j$.

Για $s_1=1+j$ έχουμε:

$$\begin{aligned}H(1+j)=0\\ \frac{b(1+j)^2+a(1+j)+1}{(1+j)(1+j+2)(1+j+1)}=0\\ b(1+2j+j^2)+a+ja+1=0\\ b+2bj-b+a+ja+1=0\\ 2bj+ja+a+1=0\end{aligned}$$

Για $s_2=1-j$ έχουμε:

$$\begin{aligned}H(1-j)=0\\ \frac{b(1-j)^2+a(1-j)+1}{(1-j)(1-j+2)(1-j+1)}=0\\ b(1-2j+j^2)+a-aj+1=0\\ -2bj-ja+a+1=0\end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις

$$\begin{aligned}2bj+ja+a+1=0\\ -2bj-ja+a+1=0\end{aligned}$$

Προκύπτει ότι $a=-1$ και $b=1/2$.Επομένως η συνάρτηση μεταφόρας γίνεται:

$$H(s)=\frac{\frac{1}{2}s^2-s+1}{s(s+2)(s+1)}$$

Άσκηση 5.

(α) Κάνοντας ανάλυση σε μερικά κλάσματα, η συνάρτηση μεταφοράς του συστηματος γινεται:

$$H(s) = \frac{2s^2+2s-2}{s^2-1} = 2 + \frac{2s}{(s+1)(s-1)} = 2 + \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1}$$

$$A(s-1) + B(s+1) = 2s \Leftrightarrow As - A + Bs + B = 2s \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ -A+B=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \end{cases}$$

Άρα:

$$H(s) = 2 + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1}$$

Το σύστημα έχει πόλους στα σημεία $s=1$ και $s=-1$.

(i) Στην περίπτωση που το σύστημα είναι αιτιατό, η περιοχή σύγκλισης είναι δεξί ημιεπίπεδο άρα $Re\{s\} > 1$. Τότε, η κρουστικη απόκριση γίνεται:

$$h(t) = 2\delta(t) + (e^{-t} + e^{t})u(t)$$

(ii) Στην περίπτωση που το σύστημα ειναι ευσταθές, η περιοχή σύγκλισης πρέπει να περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα, άρα $-1 < Re\{s\} < 1$. Τότε, η κρουστικη απόκριση γίνεται:

$$h(t) = 2\delta(t) + e^{-t}u(t) + e^{t}u(-t)$$

(β) Κάνοντας ανάλυση σε μερικά κλάσματα, η συνάρτηση μεταφοράς του συστηματος γινεται:

$$H(s) = \frac{2s-1}{s^2+2s+1} = \frac{2s-1}{(s+1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2}$$

$$A(s+1) + B = 2s - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-3 \end{cases}$$

Άρα:

$$H(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{-3}{(s+1)^2}$$

Το σύστημα έχει ένα διπλό πόλο στο σημείο $s=-1$.

(i) Στην περίπτωση που το σύστημα είναι αιτιατό, η περιοχή σύγκλισης είναι δεξί ημιεπίπεδο άρα $Re\{s\} > -1$. Τότε, η κρουστικη απόκριση γίνεται:

$$h(t) = (2e^{-t} - 3te^{-t})u(t)$$

(ii) Στην περίπτωση που το σύστημα ειναι ευσταθές, η περιοχή σύγκλισης πρέπει να περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα, άρα $Re\{s\} > -1$. Τότε, η κρουστικη απόκριση γίνεται:

$$h(t) = (2e^{-t} - 3te^{-t})u(t)$$

(γ) Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι:

$$H(s) = \frac{s^2+5s-9}{(s+1)(s^2-2s+10)}$$
$$H(s) = \frac{2s^2-s^2+3s+2s-9-2-1+3}{(s+1)[(s-1)^2+3^2]}$$
$$H(s) = \frac{-(s^2-2s+10)}{(s+1)[(s-1)^2+3^2]} + \frac{2(s^2-1)}{(s+1)[(s-1)^2+3^2]} + \frac{3s+3}{(s+1)[(s-1)^2+3^2]}$$
$$H(s) = \frac{-1}{s+1} + \frac{2(s-1)}{(s-1)^2+3^2} + \frac{3}{(s-1)^2+3^2}$$

(i) Στην περίπτωση που το σύστημα είναι αιτιατό, η κρουστικη απόκριση γίνεται:

$h(t) = (-e^{-t} + 2e^t\cos(3t) + e^t\sin(3t))u(t)$

(ii) Στην περίπτωση που το σύστημα ειναι ευσταθές,η κρουστικη απόκριση γίνεται:

$h(t) = -e^{-t}u(t) - (2e^t\cos(3t) + e^t\sin(3t))u(-t)$

(δ) Η συνάρτηση μεταφοράς του συστηματος είναι:

$H(s) = e^{-5s} + \dfrac{2}{s-2}$

Οπότε η κρουστική απόκριση γίνεται:

(i) Στην περίπτωση που το σύστημα είναι αιτιατό

$h(t) = \delta(t-5) + 2e^{-2t}u(t)$

(ii) Στην περίπτωση που το σύστημα ειναι ευσταθές
$h(t) = \delta(t-5) - 2e^{-2t}u(-t)$

Άσκηση 6.
Υποθέτουμε ότι το σύστημα έχει M πόλους στα σημεία $d_k = a_k + jb_k$ και M μηδενικα στα $c_k = -a_k + jb_k$.Οπότε οι πόλοι και τα μηδενικά είναι συμμετρικα ως προς τον άξονα $j\omega$.
Η απόκριση πλάτους του συστηματος γίνεται:

$$H(s) = \frac{\prod_{k=1}^{M}(s-c_k)}{\prod_{k=1}^{M}(s-d_k)}$$
$$H(s) = \frac{\prod_{k=1}^{M}(s+a_k-jb_k)}{\prod_{k=1}^{M}(s-a_k-jb_k)}$$
$$|H(j\omega)| = \frac{\prod_{k=1}^{M}|j\omega+a_k-jb_k|}{\prod_{k=1}^{M}|j\omega-a_k-jb_k|}$$
$$|H(j\omega)| = \frac{\prod_{k=1}^{M}|j(\omega-b_k)+a_k|}{\prod_{k=1}^{M}|j(\omega-b_k)-a_k|}$$
$$|H(j\omega)| = \frac{\prod_{k=1}^{M}\sqrt{(\omega-b_k)^2+a_k^2}}{\prod_{k=1}^{M}\sqrt{(\omega-b_k)^2+(-a_k)^2}}$$
$$|H(j\omega)| = 1$$