ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2013
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 27/05/2013 Ημερομηνία Παράδοσης: 07/06/2013

Άσκηση 1. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό, βρείτε τον αμφίπλευρο μετασχηματισμό Laplace (ML) και την περιοχή σύγκλισης των παρακάτω σημάτων:

(α) $x(t) = e^{-t}u(t+2)$

(β) $x(t) = u(-t+3)$

(γ) $x(t) = \sin(t)u(t)$

Άσκηση 2. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες και βασικά ζεύγη του ML, υπολογίστε τα σήματα στο πεδίο του χρόνου που αντιστοιχούν στους παρακάτω αμφίπλευρους μετασχηματισμούς Laplace με τις αντίστοιχες περιοχές σύγκλησης (ROC):

(α) $X(s) = e^{5s}\dfrac{1}{s+2}$, $\mathrm{Re}\{s\} < -2$

(β) $X(s) = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left(\dfrac{1}{s-3}\right)$, $\mathrm{Re}\{s\} > 3$

(γ) $X(s) = \dfrac{-s-4}{s^2+3s+2}$

(i) με ROC: $\mathrm{Re}\{s\} < -2$
(ii) με ROC: $\mathrm{Re}\{s\} > -1$
(iii) με ROC: $-2 < \mathrm{Re}\{s\} < -1$

(δ) $X(s) = \dfrac{4s^2+8s+10}{(s+2)(s^2+2s+5)}$

(i) με ROC: $\mathrm{Re}\{s\} < -2$
(ii) με ROC: $\mathrm{Re}\{s\} > -1$
(iii) με ROC: $-2 < \mathrm{Re}\{s\} < -1$

Άσκηση 3. Η σχέση μεταξύ της εισόδου $x(t)$ και της εξόδου $y(t)$ ενός αιτιατού συστήματος περιγράφεται από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις. Χρησιμοποιήστε τον μετασχηματισμό Laplace για να βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς και την κρουστική απόκριση, ($H(s)$ και $h(t)$), των συστημάτων:

(α) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + 10y(t) = 10x(t)$

(β) $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) + 5\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + 6y(t) = x(t) + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$

(γ) $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) - 2y(t) = -4x(t) + 5\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$

Υπολογίστε τους πόλους και τα μηδενικά των συναρτήσεων μεταφοράς των συστημάτων. Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση roots του MATLAB για να βρείτε τους πόλους και τα μηδενικά και να επαληθεύσετε τα αποτελέσματα σας. Έπειτα, σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση pzmap ή pzplot.

Άσκηση 4. Ένα ευσταθές, αιτιατό σύστημα έχει ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$. Το σύστημα ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Η κρουστική απόκριση $h(t)$ είναι πραγματική.

(ii) Η $H(s)$ έχει ακριβώς δύο μηδενικά, ένα από τα οποία είναι στο $s = 1 + j$.

(iii) Το σύστημα ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}h(t) + 3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t) + 2h(t) = b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta(t) + a\delta(t) + u(t) \text{ με } a, b \text{ άγνωστους.}$$

Βρείτε την $H(s)$.

Άσκηση 5. Δίνονται οι παρακάτω συναρτήσεις μεταφοράς. Βρείτε την κρουστική απόκριση $h(t)$ έτσι ώστε (i) το σύστημα να είναι αιτιατο ή (ii) το σύστημα να είναι ευσταθές.

(α) $H(s) = \dfrac{2s^2 + 2s - 2}{s^2 - 1}$

(β) $H(s) = \dfrac{2s - 1}{s^2 + 2s + 1}$

(γ) $H(s) = \dfrac{s^2 + 5s - 9}{(s+1)(s^2 - 2s + 10)}$

(δ) $H(s) = e^{-5s} + \dfrac{2}{s - 2}$

Άσκηση 6. Έστω ένα σύστημα του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς έχει M πόλους στα σημεία $d_k = a_k + jb_k$ και M μηδενικά στα σημεία $c_k = -a_k + jb_k$. Αυτό σημαίνει ότι οι πόλοι και τα μηδενικά είναι συμμετρικά ώς προς τον άξονα $j\omega$. Δείξτε ότι η απόκριση πλάτους ενός συστήματος που ικανοποιεί αυτή τη συμμετρία είναι μονάδα. Ένα τέτοιο σύστημα ονομάζεται all-pass σύστημα αφού 'περνάει' όλες τις συχνότητες με μοναδιαίο κέρδος.