ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2013
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

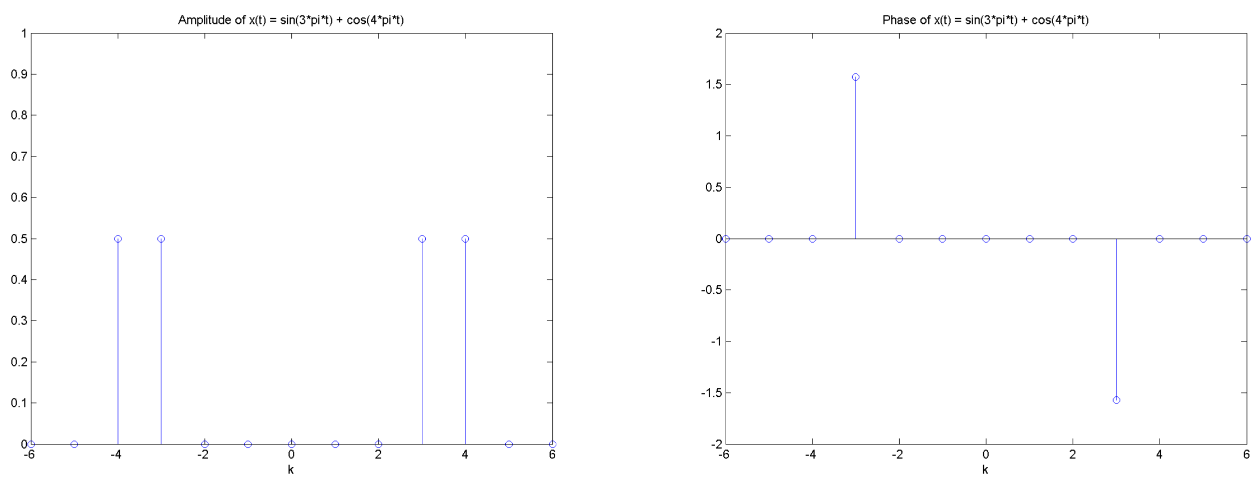
Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 02/04/2013 Ημερομηνία Παράδοσης: 16/04/2013

Άσκηση 1.
(α) Για το $\sin(3\pi t)$ η περίοδος είναι $T_1 = \frac{2}{3}$ ενώ για το $\cos(4\pi t)$ η περίοδος είναι $T_2 = \frac{1}{2}$. Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο είναι $T_0 = 2$, οπότε η θεμελιώδης συχνότητα του $x(t)$ είναι $\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
Το σήμα μας γίνεται : $x(t) = \sin(3\pi t) + \cos(4\pi t) = \frac{1}{2j}e^{j3\pi t} - \frac{1}{2j}e^{-j3\pi t} + \frac{1}{2}e^{j4\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j4\pi t}$
Άρα η σειρά $Fourier$ είναι:

$$X[k] = \begin{cases} \dfrac{1}{2j} & \text{για } k = 3 \\ -\dfrac{1}{2j} & \text{για } k = -3 \\ \dfrac{1}{2} & \text{για } k = \pm 4 \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Στο Σχήμα 1 φαίνεται το φάσμα πλάτους και φάσης του σήματος.



(α΄) Φάσμα πλάτους

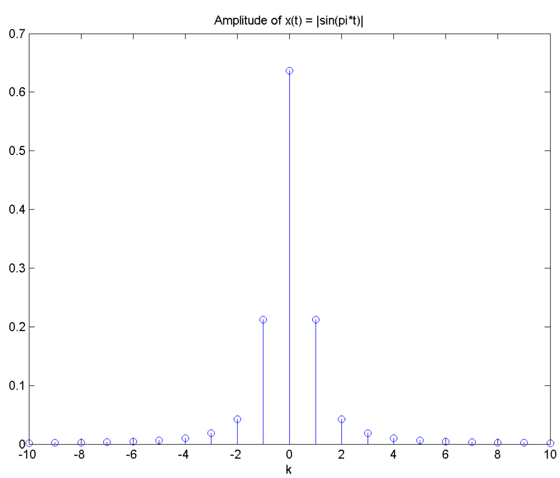
(β΄) Φάσμα φάσης

Σχήμα 1: Φάσμα πλάτους και φάσης του σηματος της άσκησης 1(α)

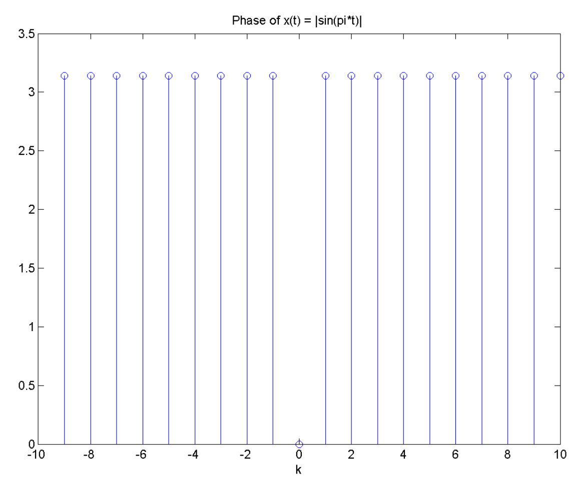
(β) Για το σήμα αυτό $T = 1$. Επομένως $\omega_0 = 2\pi$

$$
\begin{aligned}
X[k] = \int_0^1 \sin(\pi t) e^{-jk\omega_0 t} dt &= \frac{1}{2j}\int_0^1 [e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}] e^{-jk\omega_0 t} dt \\
&= \frac{1}{2j}\int_0^1 [e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}] e^{-jk2\pi t} dt \\
&= \frac{1}{2j}\int_0^1 \left[{}^{j\pi(1-2k)t} - e^{-j\pi(1+2k)t}\right] dt \\
&= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{j\pi(1-2k)} e^{j\pi(1-2k)t}\Big|_0^1 - \frac{1}{-j\pi(1+2k)} e^{-j\pi(1+2k)t}\Big|_0^1\right] \\
&= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{j\pi(1-2k)}(e^{j\pi(1-2k)} - 1) + \frac{1}{j\pi(1+2k)}(e^{-j\pi(1+2k)} - 1)\right] \\
&= \frac{1}{2j}\left(\frac{-2}{j\pi(1-2k)}\right) + \frac{1}{2j}\left(\frac{-2}{j\pi(1+2k)}\right) \\
&= \frac{1}{\pi(1-2k)} + \frac{1}{\pi(1+2k)} \\
&= \frac{1+2k+1-2k}{\pi(1-2k)(1+2k)} \\
&= \frac{2}{\pi(1-4k^2)}
\end{aligned}
$$

Στο Σχήμα 2 φαίνεται το φάσμα πλάτους και φάσης του σήματος.



(α΄) Φάσμα πλάτους



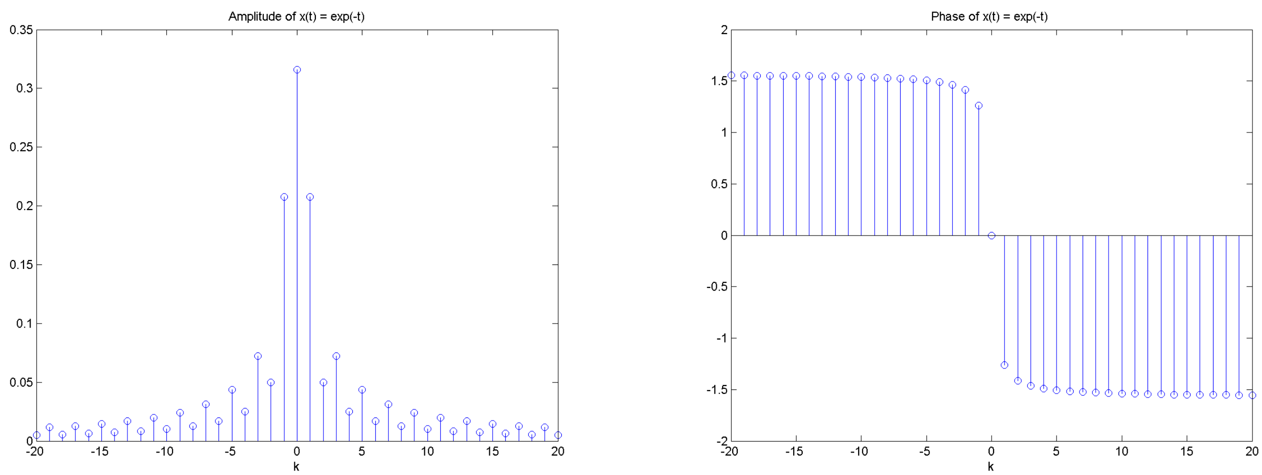
(β΄) Φάσμα φάσης

Σχήμα 2: Φάσμα πλάτους και φάσης του σηματος της άσκησης 1(β)

(γ) Από το σχήμα έχουμε ότι $x(t) = e^{-t}$, $T_0 = 2$, $\omega_0 = \pi$
Η σειρά $Fourier$ γίνεται:

$$\begin{aligned} X[k] = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-t}e^{-jk\pi t} &= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-t(1+jk\pi)}dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-t(1+jk\pi)}dt \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{-(1+jk\pi)}e^{-t(1+jk\pi)}\Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{2(1+jk\pi)}(e^{-(1+jk\pi)}-1) \\ &= \frac{1-e^{-(1+jk\pi)}}{2(1+jk\pi)} \end{aligned}$$

Στο Σχήμα 3 φαίνεται το φάσμα πλάτους και φάσης του σήματος.



(α') Φάσμα πλάτους

(β') Φάσμα φάσης

Σχήμα 3: Φάσμα πλάτους και φάσης του σηματος της άσκησης 1(γ)

(δ) Από το σχήμα έχουμε ότι T=3 και $\omega_0 = \frac{2\pi}{3}$. Κοιτώντας το σήμα στη διάρκεια μιας περιόδου από $t = -1$ εώς $t = 2$ έχουμε ότι:

$$x(t) = \begin{cases} t, & -1 \leq t < 1 \\ -2t+3, & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

Βρίσκουμε το $X[0]$:

$$\begin{aligned} X[0] &= \frac{1}{3}\left(\int_{-1}^1 tdt + \int_1^2(-2t+3)dt\right) \\ &= \frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^1 - t^2\Big|_1^2 + 3t\Big|_1^2 = 0 \end{aligned}$$

Θεωρούμε το σήμα $z(t) = \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$:

$$z(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leq t < 1 \\ -2, & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

Οι συντελεστές της σειράς $Fourier$ του σήματος $z(t)$ είναι:

$$
\begin{aligned}
Z[k] &= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} e^{-jk\frac{2\pi}{3}t}dt + \frac{1}{3}\int_{1}^{2} -2e^{-jk\frac{2\pi}{3}t}dt \\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{-jk\frac{2\pi}{3}}e^{-jk\frac{2\pi}{3}t}\Big|_{-1}^{1} - \frac{2}{3}\frac{1}{-jk\frac{2\pi}{3}}e^{-jk\frac{2\pi}{3}t}\Big|_{1}^{2} \\
&= \frac{1}{-jk2\pi}(e^{-jk\frac{2\pi}{3}} - e^{jk\frac{2\pi}{3}}) - \frac{2}{-jk2\pi}(e^{-jk\frac{4\pi}{3}} - e^{-jk\frac{2\pi}{3}}) \\
&= -\frac{1}{jk2\pi}(3e^{-jk\frac{2\pi}{3}} - e^{jk\frac{2\pi}{3}} - 2e^{-jk\frac{4\pi}{3}})
\end{aligned}
$$

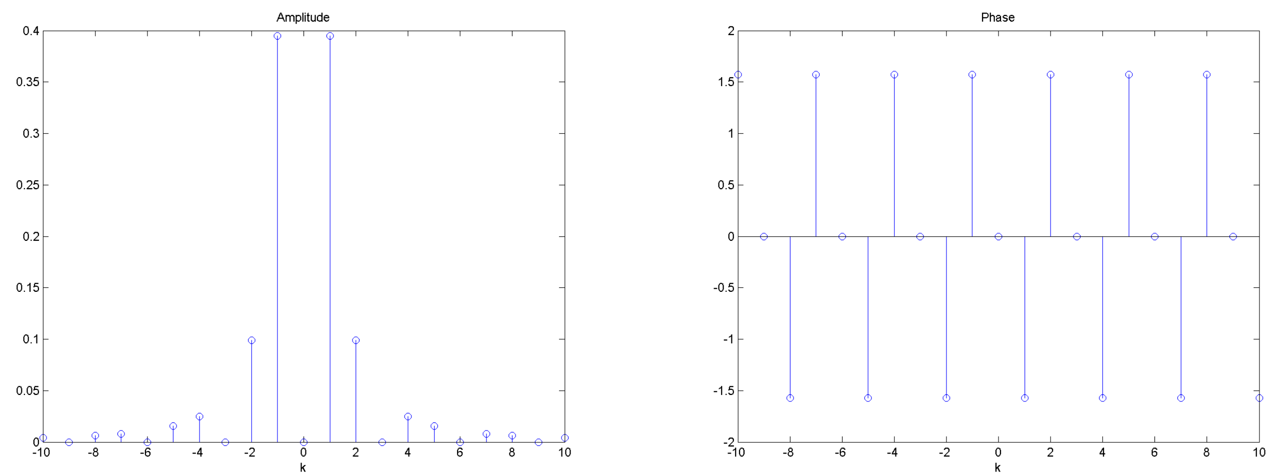
Από την ιδιότητα της παραγώγισης στο χρόνο γνωρίζουμε ότι:

$$Z[k] \longleftrightarrow jk\frac{2\pi}{3}X[k]$$

Άρα:

$$X[k] = \frac{3}{4\pi^2k^2}(3e^{-jk\frac{2\pi}{3}} - e^{jk\frac{2\pi}{3}} - 2e^{-jk\frac{4\pi}{3}})$$

Στο Σχήμα 4 φαίνεται το φάσμα πλάτους και φάσης του σήματος.



(α΄) Φάσμα πλάτους

(β΄) Φάσμα φάσης

Σχήμα 4: Φάσμα πλάτους και φάσης του σηματος της άσκησης 1(δ)

Άσκηση 2.

(α) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της σειράς $Fourier$ για να αναπαραστήσουμε το σήμα

$$X[k] = j\delta[k-1] - j\delta[k+1] + \delta[k-3] + \delta[k+3], \quad \omega_0 = 2\pi,$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{j2\pi kt} &= je^{j2\pi(1)t} - je^{j2\pi(-1)t} + e^{j2\pi(3)t} + e^{j2\pi(-3)t} \\ &= j(e^{j2\pi t} - e^{-j2\pi t}) + (e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}) \\ &= -2\sin(2\pi t) + 2\cos(6\pi t) \end{aligned}$$

(β) Έχουμε ότι $X[k] = \left(\frac{-1}{3}\right)^{|k|}$, και $\omega_0 = 1$. Άρα η αναπάρασταση στο πεδίο του χρόνου θα είναι:

$$\begin{aligned} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^{|k|} e^{jkt} &= \sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{1}{3}e^{jt})^k + \sum_{k=1}^{\infty}(-\frac{1}{3}e^{-jt})^k \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{3}e^{jt}} - \frac{\frac{1}{3}e^{-jt}}{1+\frac{1}{3}e^{-jt}} \\ &= \frac{8}{10+6\cos(t)} \end{aligned}$$

(γ)

$$\begin{aligned} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{j\pi kt} &= 2e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j(-4)\pi t} + e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j(-3)\pi t} + e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j(3)\pi t} + 2e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j(4)\pi t} \\ &= 4\cos(4\pi t + \frac{\pi}{4}) + 2\cos(3\pi t - \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

(δ)

Έχουμε ότι : $X[k] = e^{-j2\pi k}$, $|k| \leq 4$.

$$\begin{aligned} x(t) = \sum_{k=-4}^{4} e^{-j2\pi k}e^{j2\pi kt} &= \sum_{k=-4}^{4} e^{j2\pi k(t-1)} \\ &= e^{j2\pi(-4)(t-1)} + e^{j2\pi(-3)(t-1)} + e^{j2\pi(-2)(t-1)} + e^{j2\pi(-1)(t-1)} + e^{j2\pi 0(t-1)} \\ &+ e^{j2\pi(t-1)} + e^{j2\pi 2(t-1)} + e^{j2\pi 3(t-1)} + e^{j2\pi 4(t-1)} \\ &= e^{-j8\pi(t-1)} + e^{j8\pi(t-1)} + e^{-j6\pi(t-1)} + e^{j6\pi(t-1)} \\ &+ e^{-j4\pi(t-1)} + e^{j4\pi(t-1)} + e^{-j2\pi(t-1)} + e^{j2\pi(t-1)} + e^{0} \\ &= 2\cos(8\pi(t-1)) + 2\cos(6\pi(t-1) + 2\cos(4\pi(t-1) + 2\cos(2\pi(t-1)) + 1 \end{aligned}$$

Άσκηση 3.

Για το $x(t)$ οι συντελεστές $Fourier$ είναι $X[k] = -k2^{-|k|}$ και το $\omega_0 = \pi$.
Επόμενως για τα υπόλοιπα σήματα με βάση το $x(t)$ έχουμε:

(α) Για το σήμα $y(t) = x(3t)$ οι συντελεστές $Fourier$ θα είναι $Y[k] = -k2^{-|k|}$ και $\omega_0 = 3\pi$.

(β) Για το σήμα $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ οι συντελεστές $Fourier$ γίνονται:

$$Y[k] = jk\omega_0 X[k] \quad = \quad -jk\pi k2^{-|k|} = -jk^2\pi 2^{-|k|},$$

όπου $\omega_0 = \pi$

(γ) Για το $y(t) = x(t-1)$ η αναπαράσταση $Fourier$ γίνεται

$$Y[k] = e^{-jk\pi}X[k] \quad = \quad -e^{-jk\pi}k2^{-|k|}, \text{ όπου } \omega_0 = \pi.$$

(δ) Έχουμε

$$y(t) = \cos(4\pi t)x(t) = \frac{1}{2}e^{j4\pi t}x(t) + \frac{1}{2}e^{-j4\pi t}x(t)$$

Οι συντελεστές $Fourier$ θα είναι:

$$Y[k] = \frac{1}{2}X[k-4] + \frac{1}{2}X[k+4] \quad = \quad -\frac{1}{2}(k-4)2^{-|k-4|} - \frac{1}{2}(k+4)2^{-|k+4|}, \text{ όπου } \omega_0 = \pi.$$

(ε) Το σημα $y(t) = x(t) \star x(t-1)$ γράφεται ως $y(t) = x(t) \star z(t)$,όπου $z(t) = x(t-1)$.
Η αναπαράσταση σε σειρά $Fourier$ του $z(t) = x(t-1)$ ειναι: $Z[k] = e^{-jk\pi}X[k]$.
Η σειρά $Fourier$ του $y(t)$ είναι $Y[k] = TX[k]Z[k]$, όπου $T = 2$ και $\omega_0 = \pi$.
Επομένως η αναπαράσταση $Fourier$ του σήματος γίνεται

$$Y[k] = TX[k]Z[k] = 2e^{-jk\pi}(-k2^{-|k|})$$

Άσκηση 4. Έχουμε ότι: $x(t) = -x\left(t - \frac{T}{2}\right)$. Η σειρά $Fourier$ του σήματος δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned}
X[k] &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt + \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt + \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} -x(t-\frac{T}{2})e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt - \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} x(t-\frac{T}{2})e^{-jk\omega_0 t}dt
\end{aligned}$$

Θέτω $u = t - \frac{T}{2}$ και έχω:

$$\begin{aligned} X[k] &= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt - \frac{1}{T}\int_0^{T/2} x(u)e^{-jk\omega_0(u+T/2)}du \\ &= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt - \frac{1}{T}e^{jk\omega_0 \frac{T}{2}}\int_0^{T/2} x(u)e^{-jk\omega_0 u}du \\ &= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt - \frac{1}{T}e^{j\pi k}\int_0^{T/2} x(u)e^{-jk\omega_0 u}du \\ &= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt - (-1)^k\frac{1}{T}\int_0^{T/2} x(u)e^{-jk\omega_0 u}du \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι όταν το k είναι άρτιος αριθμός, το παραπάνω ολοκληρωμα μηδενίζεται. Επομένως έχουμε:

$$X[k] = \begin{cases} \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} 2x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt & \text{για } k = \text{περιττός} \\ 0 & \text{για } k = \text{άρτιος} \end{cases}$$

Άσκηση 5.
Εάν θεωρήσουμε ότι η είσοδος του συστήματος $x(t)$ είναι της μορφής $e^{j\omega_0 t}$, τότε η έξοδος του συστήματος θα είναι $y(t) = h(t) \star x(t) = H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$. Αντικαθιστώντας τα $y(t)$ και $x(t)$ στη διαφορική εξίσωση $\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = x(t)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}) + 4H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t} &= e^{j\omega_0 t} \\ j\omega_0 H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t} + 4H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t} &= e^{j\omega_0 t} \\ H(j\omega_0)\left[j\omega_0 + 4\right] &= 1 \\ H(j\omega_0) &= \frac{1}{j\omega_0 + 4} \end{aligned}$$

Όμως, για $x(t)$ είσοδο του συστηματος, από τον ορισμό της σειράς $Fourier$ προκύπτει ότι $y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$. Οι συντελεστές $Fourier$ είναι οι a_k και η θεμελιώδης συχνότητα ειναι ω_0. Επομένως για το σήμα $y(t)$ οι συντελεστές $Fourier$ θα είναι $a_k H(jk\omega_0)$.

(α) Για το σήμα $x(t) = \cos(2\pi t)$ έχουμε $\omega_0 = 2\pi$ και οι μη-μηδενικοί συντελεστές $Fourier$ είναι $a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$. Οπότε οι μη-μηδενικοί συντελεστες του $y(t)$, b_k θα είναι

$$b_1 = a_1 H(j2\pi) = \frac{1}{2(4 + j\omega_0)}$$

Και

$$b_{-1} = a_{-1}H(-j2\pi) = \frac{1}{2(4 - j\omega_0)}$$

(β) Για το σήμα $x(t) = \sin(4\pi t) + \cos(6\pi t + \pi/4)$ έχουμε ότι $\omega_0 = 2\pi$ και οι μη-μηδενικοί συντελεστές του $x(t)$ είναι $a_2 = a_{-2}^* = \frac{1}{2j}$ και $a_3 = a_{-3}^* = \frac{e^{j\pi/4}}{2}$.
Επομένως οι μη-μηδενικοί συντελεστές του $y(t)$ θα είναι

$$b_2 = a_2 H(j4\pi) \quad = \quad \frac{1}{2j(4+j4\pi)}$$

Και

$$b_{-2} = a_{-2} H(-j4\pi) \quad = \quad -\frac{1}{2j(4-j4\pi)}$$

$$b_3 = a_3 H(j6\pi) \quad = \quad \frac{e^{j\pi/4}}{2(4+j6\pi)}$$

Και

$$b_{-3} = a_{-3} H(-j6\pi) \quad = \quad -\frac{e^{-j\pi/4}}{2(4-j6\pi)}$$

Άσκηση 6. **(α)** Η περίοδος του σήματος είναι $T = 1$. Κοιτώντας το σήμα στη διάρκεια μιας περιόδου από $t = 0$ εώς $t = 1$ έχουμε ότι:

$$x(t) = \begin{cases} -4t+1, & 0 \le t < T/2 \\ 4t-3, & T/2 \le t < T \end{cases}$$

$$X[0] = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{0.5} -4t+1\,\mathrm{d}t + \int_{0.5}^{1} 4t-3\,\mathrm{d}t = \left.\frac{-4t^2}{2}+t\right|_0^{0.5} + \left.\frac{4t^2}{2}-3t\right|_{0.5}^{1} = 0$$

Για να βρούμε τα $X[k]$ θεωρούμε το σήμα $z(t) = \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} -4, & 0 \le t < T/2 \\ 4, & T/2 \le t < T \end{cases}$

Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned}
Z[k] = \;& \frac{1}{T}\int_0^{0.5} -4e^{-jk\omega t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_{0.5}^{1} 4e^{-jk\omega t}\,\mathrm{d}t \\
= \;& \int_0^{0.5} -4e^{-jk2\pi t}\,\mathrm{d}t + \int_{0.5}^{1} 4e^{-jk2\pi t}\,\mathrm{d}t \\
= \;& \left.\frac{-4}{-jk2\pi}e^{-jk2\pi t}\right|_0^{0.5} + \left.\frac{4}{-jk2\pi}e^{-jk2\pi t}\right|_{0.5}^{1} \\
= \;& \frac{-4}{-jk2\pi}\left(e^{-jk\pi}-1\right) + \frac{4}{-jk2\pi}\left(e^{-jk2\pi}-e^{-jk\pi}\right) \\
= \;& \frac{4}{-jk2\pi}\left(-e^{-jk\pi}+1+e^{jk2\pi}-e^{-jk\pi}\right) \\
= \;& \frac{4}{-jk2\pi}\left(-2e^{-jk\pi}+2\right) \\
= \;& \frac{4}{-jk\pi}\left(-e^{-jk\pi}+1\right)
\end{aligned}$$

Από την ιδιότητα της παραγώγισης στο χρόνο γνωρίζουμε ότι:

$$Z[k] \longleftrightarrow jk2\pi X[k]$$

Άρα:

$$X[k] = \frac{2}{k^2\pi^2}\left(1-e^{-jk\pi}\right)$$

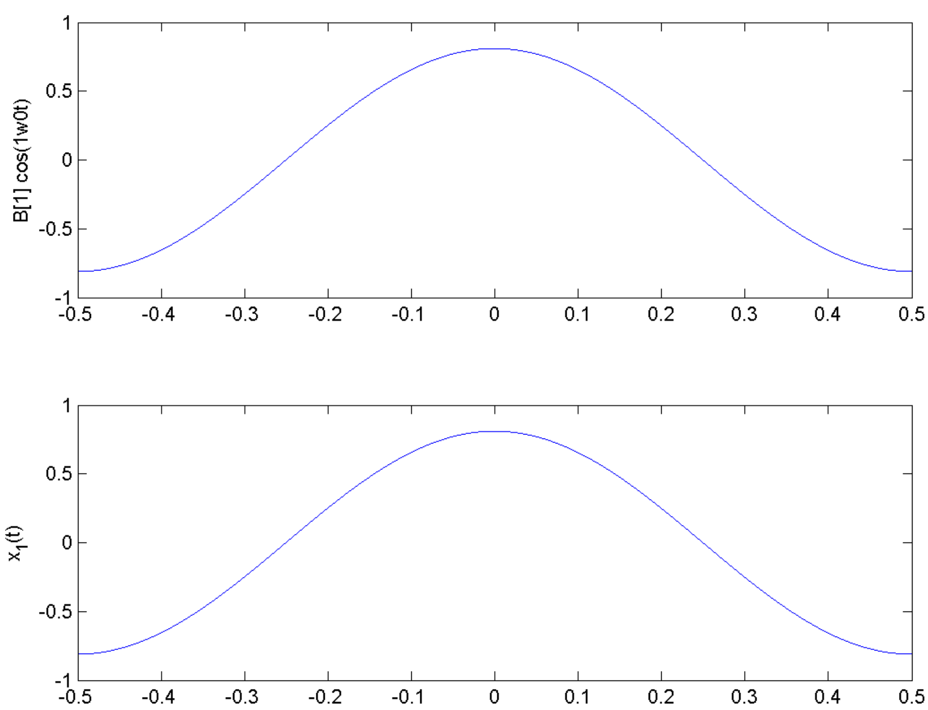
(β) Το $x(t)$ είναι πραγματικό και άρτιο άρα $X[k] = X[-k]$.
Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} x(t) = & \; X[0] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t} \text{ με } \omega_0 = 2\pi \\ = & \; X[0] + \sum_{k=1}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X[k] e^{jk\omega_0 t} \\ = & \; X[0] + \sum_{k=1}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X[-k] e^{-jk\omega_0 t} \\ = & \; X[0] + \sum_{k=1}^{\infty} X[k] \left(e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t} \right) \\ = & \; X[0] + \sum_{k=1}^{\infty} 2X[k] \cos(k\omega_0 t) \\ = & \; \sum_{k=0}^{\infty} B[k] \cos(k\omega_0 t) \end{aligned}$$

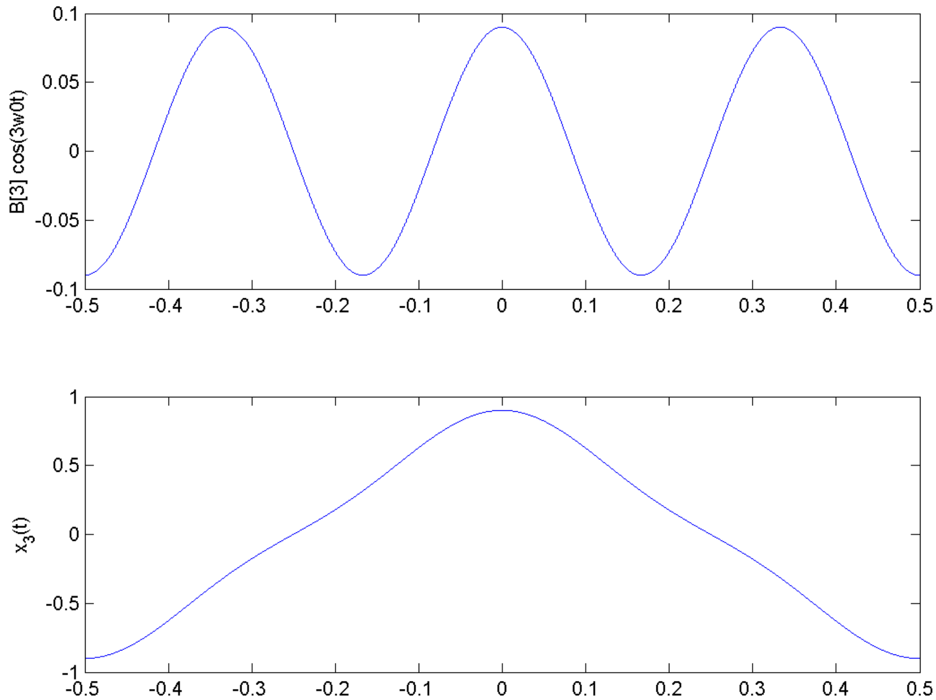
όπου:

$$B[k] = \begin{cases} X[0], & k = 0 \\ 2X[k], & k \neq 0 \end{cases}$$

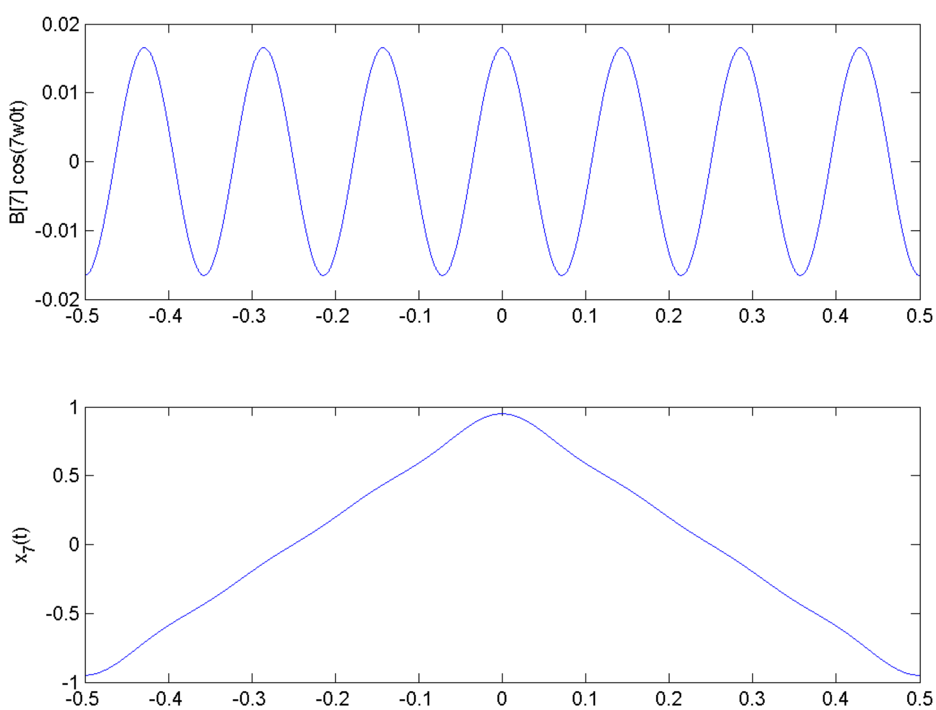
(γ) Τα ζητούμενα διαγράμματα για τις διάφορες τιμές του J φαίνονται στα σχήματα 5-9:



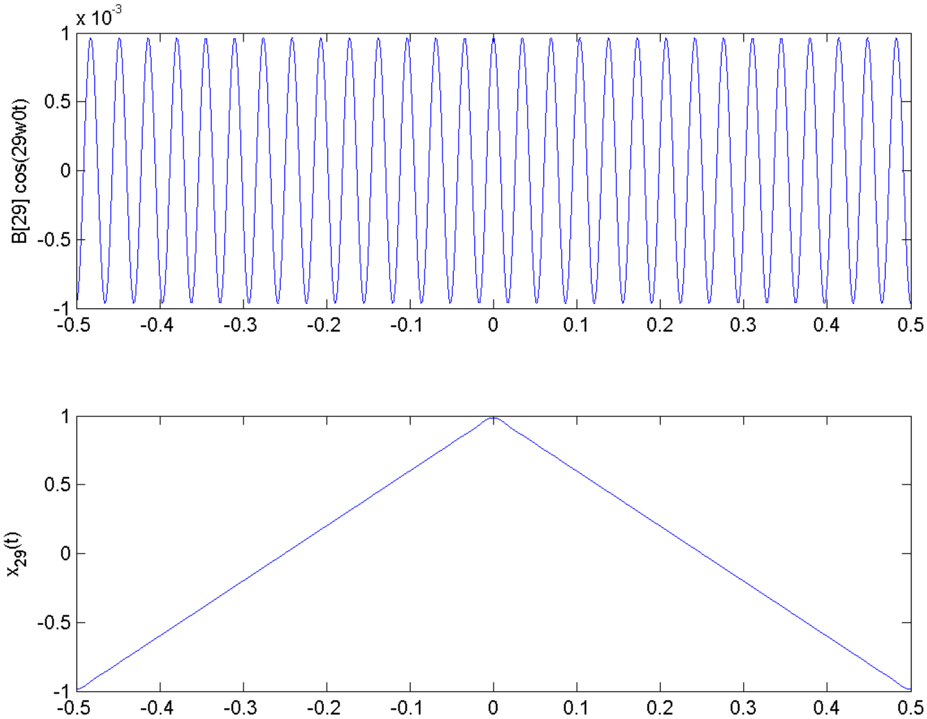
Σχήμα 5: $J = 1$



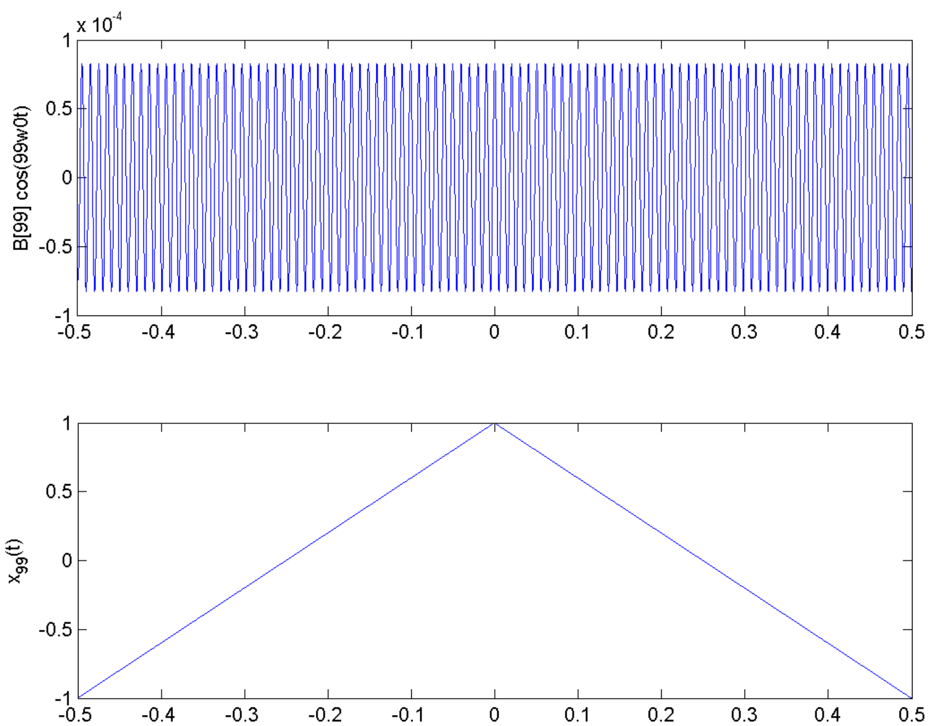
Σχήμα 6: $J = 3$



Σχήμα 7: $J = 7$



Σχήμα 8: $J = 29$



Σχήμα 9: $J = 99$