ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2013
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 12/03/2013 Ημερομηνία Παράδοσης: 26/03/2013

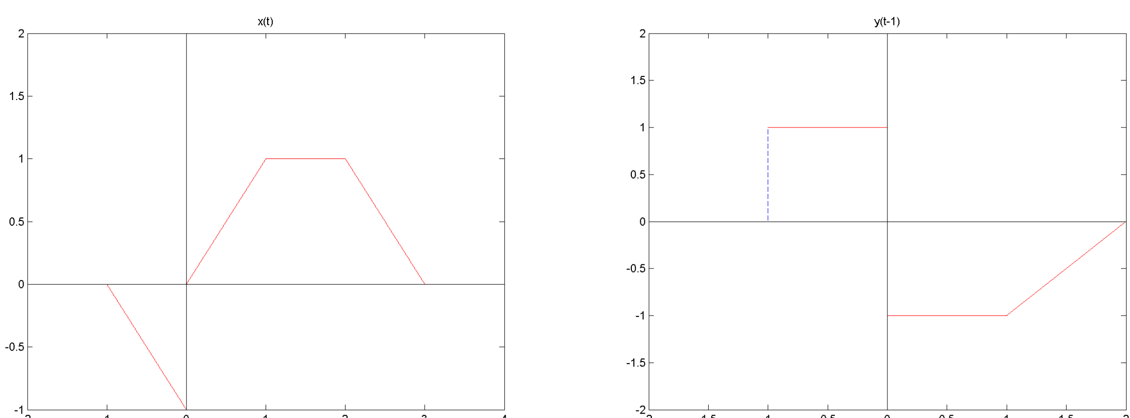
Άσκηση 1.
A) (a) Για το σήμα $x(t)$ έχουμε:

$$\text{Ενέργεια} = \int_0^T x(t)^2 dt = \int_{-1}^{0} (-t-1)^2 dt + \int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 1^2 dt + \int_2^3 (-t+3)^2 dt) =$$
$$= \left[\frac{t^3}{3} + t^2 + t\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + [t]_1^2 + \left[\frac{t^3}{3} - 3t^2 + 9t\right]_2^3 = 2$$

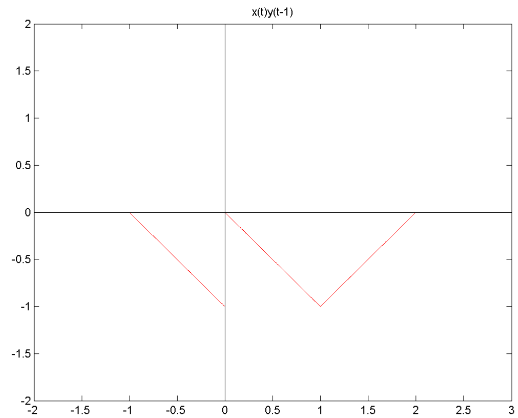
A)(b) Για το σήμα $y(t)$ έχουμε:

$$\text{Ενέργεια} = \int_0^T y(t)^2 dt = \int_{-2}^{-1} 1^2 dt + \int_{-1}^{0} (-1)^2 dt + \int_0^1 (t-1)^2 dt =$$
$$= [t]_{-2}^{-1} + [t]_{-1}^{0} + \left[\frac{t^3}{3} - t^2 + t\right]_0^1 = \frac{7}{3}$$

B)
a) x(t)y(t-1)

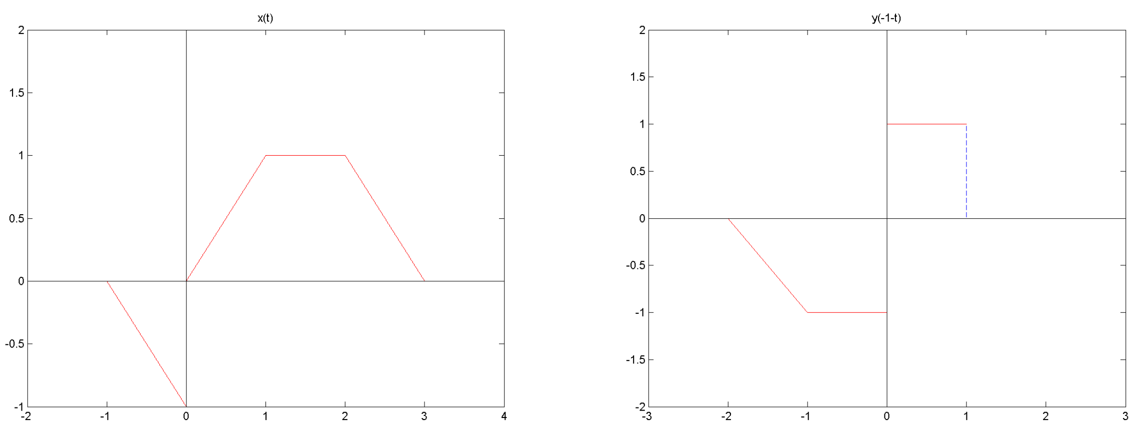


Σχήμα 1:

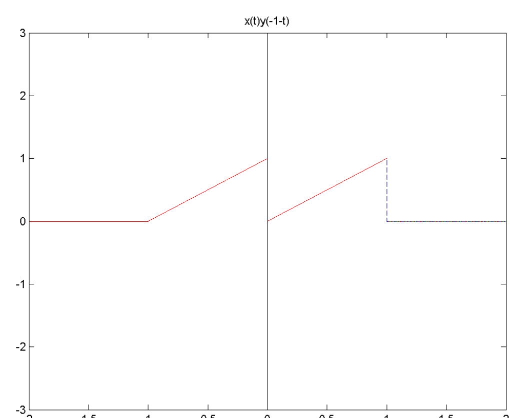


Σχήμα 2:

b) x(t)y(-1-t)

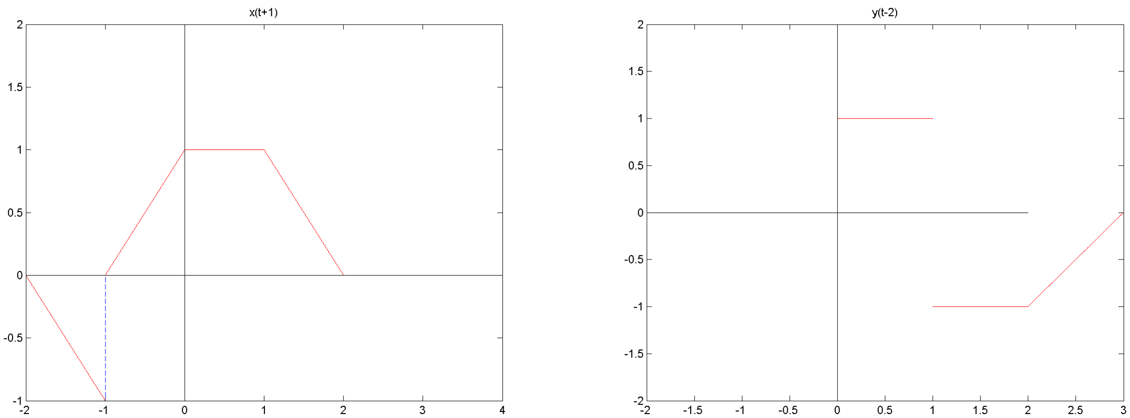


Σχήμα 3:

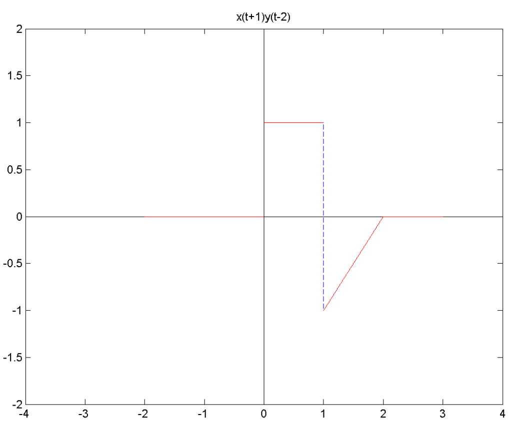


Σχήμα 4:

c) x(t+1)y(t-2)

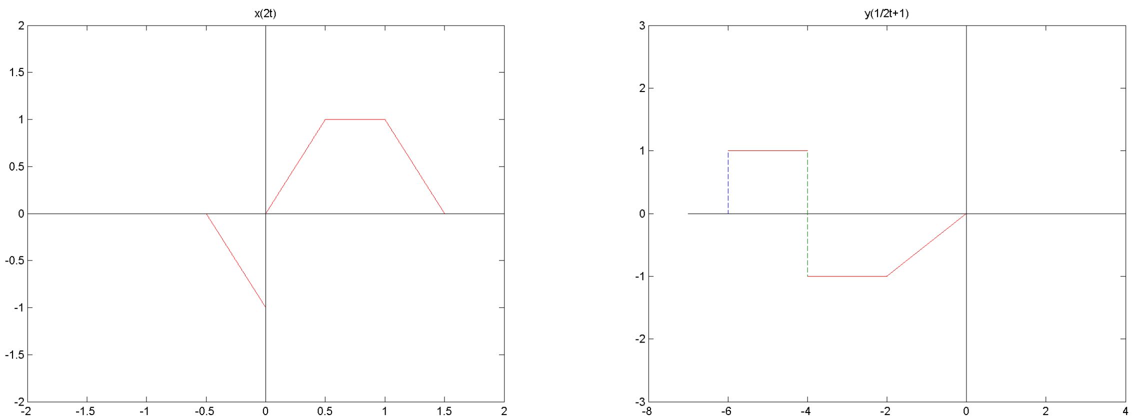


Σχήμα 5:

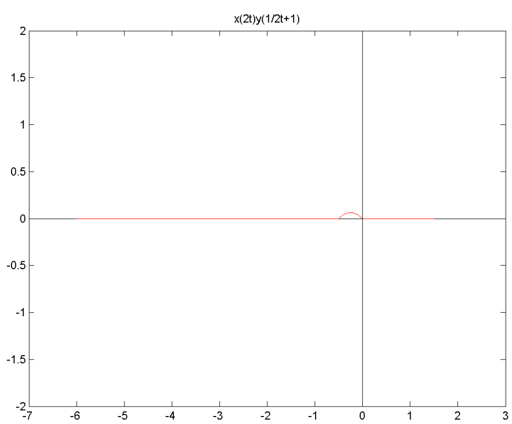


Σχήμα 6:

d) x(2t)y((t/2)+1)



Σχήμα 7:



Σχήμα 8:

Άσκηση 2.

(α) $x[n] = cos(\dfrac{8}{15}\pi n)$.
Περιοδικό με θεμελιώδη περίοδος T=15 δείγματα

(β) $x(t) = cos(2t) + sin(3t)$
Περιοδικό με περιοδο: ΜΚΔ$(2,3) = 1$. Επομένως $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$.

(γ) $x(t) = cos(t)u(t)$. Μη περιοδικό

(δ) $x(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-3k] + \delta[n-k^2]$
Μη περιοδικό

(ε) $x(n) = cos(\dfrac{1}{5}\pi n)sin(\dfrac{1}{3}\pi n)$
Περιοδικό. Σύμφωνα με τους τύπους του Euler έχουμε:

$$\begin{aligned}
cos(\frac{1}{5}\pi n)sin(\frac{1}{3}\pi n) &= \frac{1}{2}(e^{j\frac{1}{5}\pi n} + e^{-j\frac{1}{5}\pi n})\frac{1}{2j}(e^{j\frac{1}{3}\pi n} - e^{-j\frac{1}{3}\pi n}) = \\
&= \frac{1}{4j}(e^{j\frac{8}{15}\pi n} - e^{-j\frac{2}{15}\pi n} + e^{j\frac{2}{15}\pi n} - e^{-j\frac{8}{15}\pi n}) = \\
&= \frac{1}{2}(\frac{e^{j\frac{8}{15}\pi n} - e^{-j\frac{8}{5}\pi n}}{2j}) + \frac{1}{2}(\frac{e^{j\frac{2}{15}\pi n} - e^{-j\frac{2}{5}\pi n}}{2j}) = \\
&= \frac{1}{2}(sin(\frac{8}{15}\pi n) + sin(\frac{2}{15}\pi n))
\end{aligned}$$

Άρα έχουμε $f_1 = \frac{8}{30}$ και $f_2 = \frac{2}{30}$
ΜΚΔ$(\frac{8}{30}, \frac{2}{30}) = \frac{2}{30}$
Άρα $f_0 = \frac{1}{15}$Hz

(στ) $x(t) = v(t) + v(-t), \qquad$ όπου $v(t) = sin(t)u(t)$
Περιοδικό με περίοδο $T = 2\pi$

Άσκηση 3.

(α) $y(t) = cos(x(t))$

Στατικό : καθώς η έξοδος του εξαρτάται μόνο από παρούσες τιμές της εισόδου.
Ευσταθές: για κάθε τιμή της εισόδου η έξοδος είναι φραγμένη στο διάστημα [-1,1].
Αιτιατό: η έξοδος y(t) εξαρτάται μόνο από τις παρούσες τιμές της εισόδου.
Χρονικά αμετάβλητο: Για εισοδο $x(t-t_0)$, η έξοδος του συστήματος είναι $cos(x(t-t_0)) = y(t-t_0)$
Μη γραμμικό: Για είσοδο $a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$, στην έξοδο έχουμε:
$cos(a_1x_1(t)) + cos(a_2x_2(t)) \neq a_1y_1(t) + a_2y_2(t) = a_1cos(x_1(t)) + a_2cos(x_2(t))$

(β) $y(t) = x(2-t)$
Δυναμικό: για κάποιες χρονικές στιγμές, συγκεκριμένα για $t \geq 2$ η έξοδος εξαρτάται από προηγούμενες τιμές τις εισόδου.
Ευσταθές: Έστω $|x(t)| < M_x < \infty$. Τότε $|y(t)| = |x(2-t)| < M_x < \infty$. Έχουμε φραγμένη έξοδο για κάθε φραγμένη είσοδο.
Μη αιτιατό: η έξοδος y(t) εξαρτάται από μελλοντικές τιμές τις εισόδου για $t < 2$.
Χρονικά αμετάβλητο: Για εισοδο $x(t-t_0)$ τότε στην έξοδο έχουμε $x(2-(t-t_0)) = y(t-t_0)$
Γραμμικό: Για είσοδο $a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ στην έξοδο θα έχουμε:
$a_1x_1(2-t) + a_2x_2(2-t) = a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$

(γ) $y(t) = \dfrac{d}{dt}x(t)$
Στατικό: για κάθε χρονικη στιγμή η έξοδος δεν εξαρτάται από προηγούμενες τιμές τις εισόδου.
Ευσταθές: Έστω $|x(t)| < M_x < \infty$. Τότε $|y(t)| = \frac{d|x(t)|}{dt} < \frac{dM_x}{dt} < \infty$. Έχουμε φραγμένη είδοδο για φραγμένη έξοδο.
Αιτιατό: η έξοδος y(t) εξαρτάται μόνο από τις παρούσες τιμές της εισόδου.
Χρονικά αμετάβλητο: Για εισοδο $x(t-t_0)$, στην έξοδο θα έχουμε $\frac{dx(t-t_0)}{dt} = y(t-t_0)$
Γραμμικό: Για είσοδο $a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ στην έξοδο θα έχουμε:
$\frac{da_1x_1(t)+a_2x_2(t)}{dt} = a_1\frac{x_1(t)}{dt} + a_2\frac{x_2(t)}{dt} = a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$

(δ) $y(t) = \dfrac{d}{dt}e^{-t}x(t)$
Δυναμικο: η έξοδος εξαρτάται από προηγούμενες τιμές τις εισόδου.
Ευσταθές: Έστω $|x(t)| < M_x < \infty$. Τότε $|y(t)| = \frac{d}{dt}e^{-t}|x(t)| < \frac{d}{dt}e^{-t}Mx < \infty$ Αιτιατό: Η έξοδος y(t) εξαρτάται μόνο από τις παρούσες τιμές της εισόδου.
Χρονικά αμετάβλητο: Για είσοδο $x(t-t_0)$ τότε στην έξοδο έχουμε:
$\frac{d}{dt}e^{-(t-t_0)}x(t-t_0) = y(t-t_0)$
Γραμμικό: Για είσοδο $a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$, στην έξοδο θα έχουμε$\frac{d}{dt}e^{-t}(a_1x_1(t) + a_2x_2(t)) = \frac{d}{dt}e^{-t}a_1x_1(t) + \frac{d}{dt}e^{-t}a_2x_2(t) = a_1\frac{d}{dt}e^{-t}x_1(t) + a_2\frac{d}{dt}e^{-t}x_2(t) = a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$

(στ) $y[n] = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n} x[k+2]$

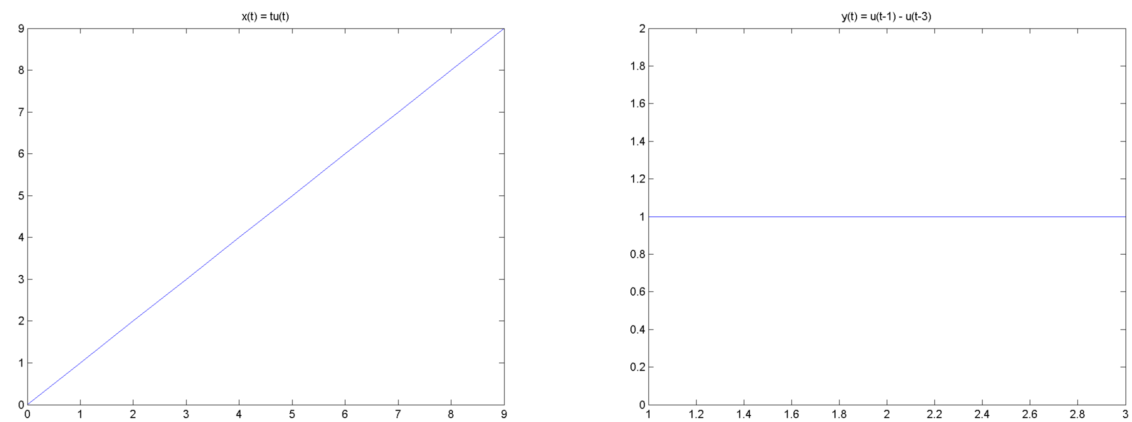
Δυναμικό: εξαρτάται από προηγούμενες τιμές της εισόδου καθώς το k διατρέχει από το $-\infty$ έως το n.
Ευσταθές: Έστω $|x[n]| < M_x < \infty$. Τότε $|y[n]| = \sum_{k=-\infty}^{n} |x[k]| < \sum_{k=-\infty}^{n} M_x < \infty$
Μη Αιτιατό: Η έξοδος $y[n]$ εξαρτάται από επόμενες τιμές της εισόδου για $k \geq n-1$.

Χρονικά αμετάβλητο: Για εισοδο $x(n-n_0)$ τότε στην έξοδο θα έχουμε:
$\sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k+2] = y(n-n_0)$
Γραμμικό: Για είσοδο $a_1x_1(n)+a_2x_2(n)$, στην έξοδο θα έχουμε:
$\sum_{k=-\infty}^{n}(a_1x_1[k+2]+a_2x_2[k+2]) = \sum_{k=-\infty}^{n} a_1x_1[k+2]+\sum_{k=-\infty}^{n} a_2x_2[k+2] = a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$

(ε) $y[n] = cos(2\pi(n+1)x(n)) + x(n)$

Στατικό : Για κάθε χρονικη στιγμή η έξοδος δεν εξαρτάται από προηγούμενες τιμές τις εισόδου.
Ευσταθές: Έστω $|x[n]| < M_x < \infty$. Τότε $|y[n]| = cos(2\pi(n+1)|x(n)|) + |x(n)| < cos(2\pi(n+1)M_x) + M_x < \infty$.
Αιτιατό : Η έξοδος $y[n]$ εξαρτάται από παρούσες τιμές της εισόδου.
Χρονικά μεταβλητό: Για εισοδο $x(n-n_0)$, στην έξοδο θα έχουμε:
$cos(2\pi(n+1)x(n-n_0)) + x(n-n_0) \neq y(n-n_0)$.
Μη Γραμμικό: Για είσοδο $a_1x_1(n)+a_2x_2(n)$ στην έξοδο θα έχουμε:
$cos(2\pi(n+1)(a_1x_1(n)+a_2x_2(n))) + a_1x_1(n)+a_2x_2(n) \neq a_1y_1(n)+a_2y_2(n)$.

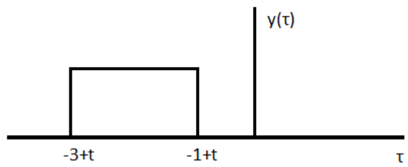
Άσκηση 4.
(α) Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται τα σήματα $x(t)$ και $y(t)$.



Σχήμα 9:

λαβελασκισι4

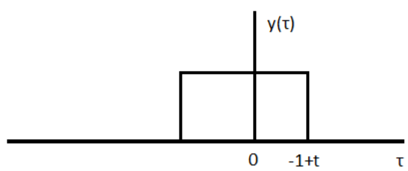
Υπολογίζουμε την συνέλιξη γραφικά. Το σήμα που ανακλάται και μετατοπίζεται σε αυτό το παράδειγμα ειναι το $y(t)$. Μέτα από ανάκλαση και μετατόπιση $y(\tau)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 10:

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:
Περίπτωση 1^{η}: $t-1<0$ (όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα), το $x(t)=0$ επομένως:
$c_{xy}=x(t)*y(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau=0.$

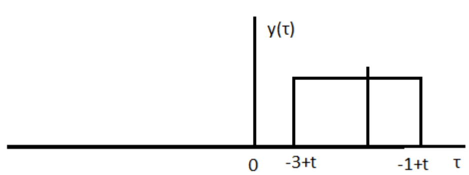
Περίπτωση 2^{η}: Για $t-3\leq 0\rightarrow t\geq 3$ και $t-1\geq 0\rightarrow t\geq 1$. Δηλαδή για $1\leq t\leq 3$ όπως φαίνεται και στο σχήμα που ακολουθεί. Η συνέλιξη επομένως υπολογίζεται ως εξής:



Σχήμα 11:

$$c_{xy}=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau=\int_{t-3}^{t-1}\tau u(\tau)d\tau=\int_{0}^{t-1}\tau d\tau=\left[\frac{\tau^2}{2}\right]_0^{t-1}=\frac{(t-1)^2}{2}$$

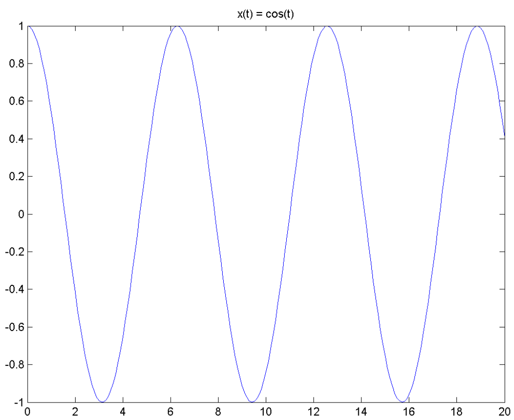
Περίπτωση 3^{η}.
Για $t-3\geq 0\rightarrow t\geq 3$ το επόμενο σχημα απεικονίζει τη περίπτωση αυτή. Επομένως η συνέλιξη υπολογίζεται ως εξής:

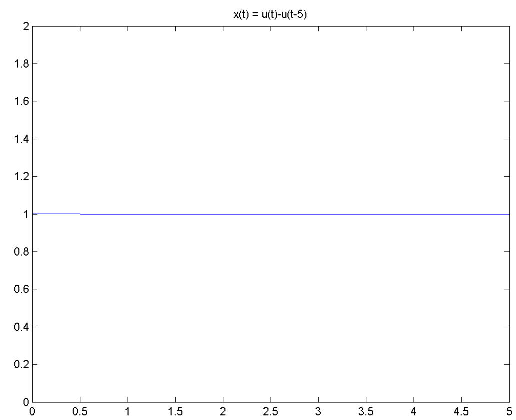


Σχήμα 12:

$$c_{xy}=\int_{t-3}^{t-1}\tau d\tau=\left[\frac{\tau^2}{2}\right]_{t-3}^{t-1}=\frac{1}{2}\left((t-1)^2-(t-3)^2\right)=2t-4.$$

(β) Στα παρακάτω σχήματα απεικονίζονται τα σήματα $x(t)$ και $y(t)$.



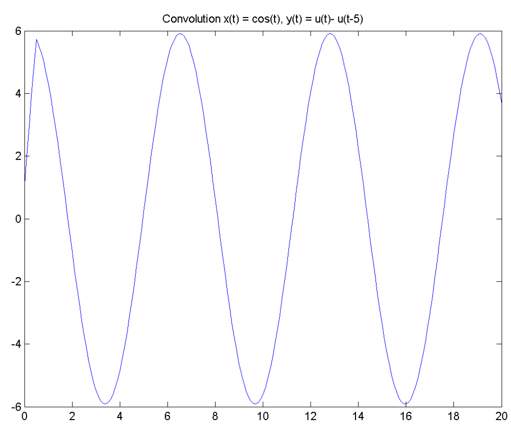


Σχήμα 13:

Βάσει του ορισμού της συνέλιξης και επιλέγοντας για ανακλάση και μετατοπίση το $y(t)$ (το $x(t)$ εκτείνεται από το $(-\infty, \infty)$) έχουμε για τον υπολογισμό της συνέλιξης:

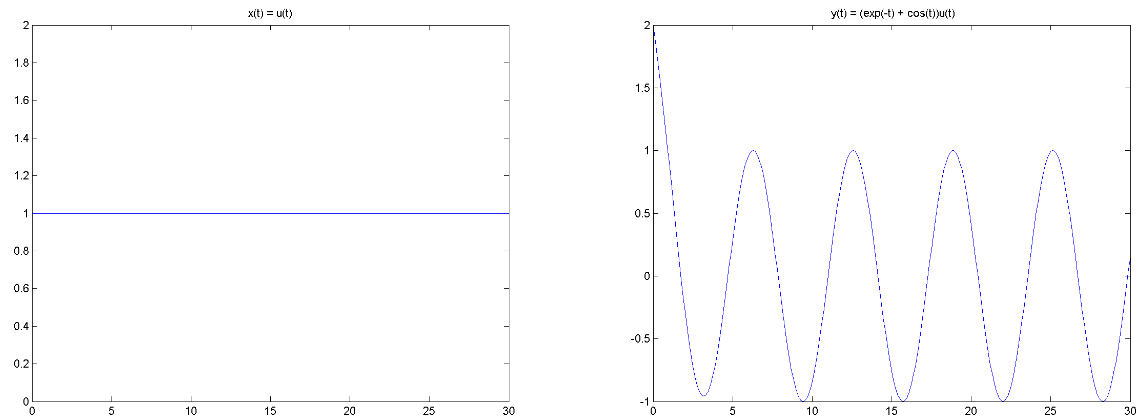
$$c_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{t-5}^{t} cos(\tau)d\tau = [sin(\tau)]_{t-5}^{t} = sin(t) - sin(t-5).$$

Το αποτέλεσμα της συνελιξής τους απεικονίζεται γραφικα παρακάτω:



Σχήμα 14:

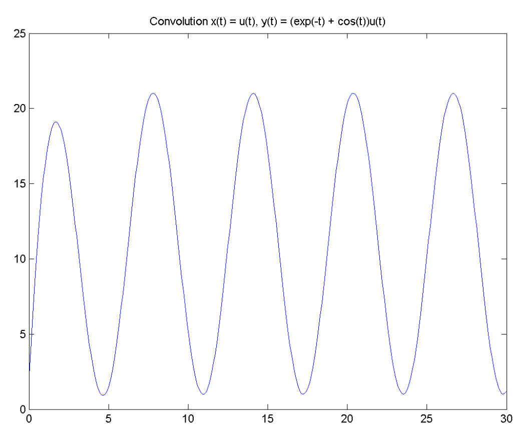
(γ)
Στα παρακάτω σχήματα απεικονίζονται τα σήματα $x(t)$ και $y(t)$. Το σήμα που ανακλάται και μετατοπίζεται σε αυτή την περίπτωση είναι το $x(t)$.



Σχήμα 15:

Ομοίως και εδώ μπορούμε να βάσει του ορισμού της συνέλιξης και επιλέγοντας για ανακλάση και μετατοπίση το απλούστερο σήμα υπολογίζουμε την συνέλιξη:
$c_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} (e^{-\tau} + cos(\tau))u(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} (e^{-\tau} + cos(\tau))d\tau = \left[-e^{-\tau} + sin(\tau)\right]_0^t = -e^{-t} + sin(t) + 1.$

Το τελικό αποτέλεσμα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 16:

Άσκηση 5.
(a) Για την εύρεση της κρουστικής απόκρισης του συστήματος απο το νόμο τάσεων του Kircoff:
$-x(t) + IR + y(t) = 0$
$I = C\frac{dy(t)}{dt}$
Αντικαθιστώντας την ένταση ρεύματος στην παραπάνω σχέση έχουμε:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t) \tag{1}$$

Η λύση αυτης της διαφορικής εξίσωσης ειναι η:
$h(t) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$
Για την επιλυση της δ.ε ακολουθησάμε την εξής διαδικασία. Η διαφορική αυτή εξίσωση ειναι πρώτης τάξης. Η λύση της προέρχεται απο το άθροισμα της λύσης της ομογενούς και μιας μερικής λύσης. Για την λύση της ομογενούς:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = 0 \Rightarrow \frac{dy(t)}{y} + \frac{1}{RC}dt \Rightarrow \int\frac{1}{y}dy = -\int\frac{1}{RC}dt + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ln|y| = -\frac{1}{RC}t + c \Rightarrow |y| = e^{-\frac{1}{RC}t}u(t)e^{c} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = c_1e^{-\frac{1}{RC}t}u(t)$$

Για να απλοποιησουμε την διαδικασια (εύρεση μερικής λυσης) επιλυσης της διαφορικής, η λύση που βρήκαμε πρέπει να επαληθεύει την γενική διαφορική εξίσωση. Αντικαθιστώντας στην γενική εξίσωση της διαφορικής και έχοντας υποψην οτι ψάχνουμε την κρουστική απόκριση του συστήματος ($x(t) = \delta(t)$ οπότε και $h(t) = y(t)$) ·έχουμε:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t) \Rightarrow \frac{dh(t)}{dt} + \frac{1}{RC}h(t) = \frac{1}{RC}\delta(t) \Rightarrow \frac{d(c_1e^{\frac{-1}{RC}t}u(t))}{dt} + \frac{1}{RC}c_1e^{\frac{-1}{RC}t}u(t) = \frac{1}{RC}\delta t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1e^{\frac{-t}{RC}}u(t)\frac{-1}{RC} + \frac{1}{RC}c_1e^{\frac{-t}{RC}} + c_1e^{\frac{-t}{RC}}\frac{du(t)}{dt} = \frac{1}{RC}u(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1e^{\frac{-t}{RC}}\delta(t) = \frac{1}{RC}\delta(t) \Rightarrow c_1e^{0}\delta(0) = \frac{1}{RC}\delta(0) \Rightarrow c_1 = \frac{1}{RC}$$

(b) Η κρουστική απόκριση ενός κυκλώματος RC είναι $h(t) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$.Η έξοδος του συστήματος είναι το αποτέλεσμα της συνέλιξης του σήματος εισόδου $x(t)$ και της κρουστικής απόκρισης $h(t)$:
$y_p(t) = h(t) * p(t)$

για $t < 0$

$$y_p(t) = 0$$

για $t < T$ και $0 \leq t \leq T$

$$y_p(t) = \int_0^t \frac{1}{RC}e^{-\frac{(t-\tau)}{RC}}d\tau$$
$$y_p(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}$$

για $t \geq T$

$$y_p(t) = \int_0^T \frac{1}{RC}e^{-\frac{(t-\tau)}{RC}}d\tau$$
$$y_p(t) = e^{-\frac{(t-T)}{RC}} - e^{-\frac{t}{RC}}$$

Επομένως για την έξοδο $y_p(t)$ θα έχουμε:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-\frac{t}{RC}} & 0 \leq t \leq T \\ e^{-\frac{(t-T)}{RC}} - e^{-\frac{t}{RC}} & t \geq T \end{cases}$$

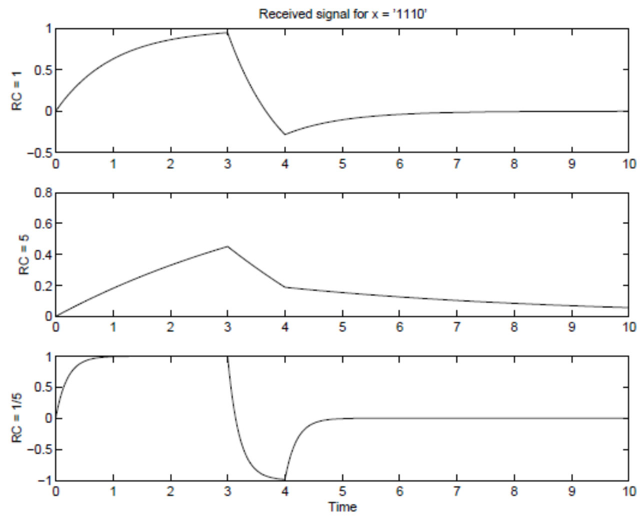
(c) (i)$RC = \frac{1}{T}$
(ii)$RC = \frac{5}{T}$
(iii)$RC = \frac{1}{5T}$
Έστω ότι $T = 1$
(1) Για το αρχικό μας κανάλι (σχήμα 17).

$$x(t) = p(t) + p(t-1) + p(t-2) - p(t-3)$$
$$y(t) = y_p(t) + y_p(t-1) + y_p(t-2) + y_p(t-3)$$

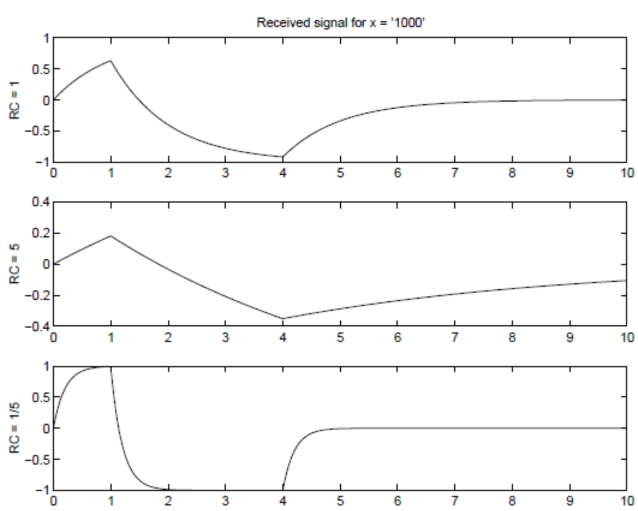
(2) Για $h(t) = \delta(t)$ (σχήμα 18).

$$x(t) = p(t) - p(t-1) - p(t-2) - p(t-3)$$
$$y(t) = y_p(t) - y_p(t-1) - y_p(t-2) + y_p(t-3)$$

Από τα σχήματα (17),(18) γίνεται ξεκάθαρο ότι όσο το T μικραίνει, τόσο αυξάνεται η διασυμβολική παρεμβολή στο τηλεπικοινωνιακό σύστημα. Τα bits επικαλύπτονται και γίνεται δύσκολη η απόφαση για το αν τελικά έχει μεταδοθεί το bit '1' ή '0'.



Σχήμα 17:



Σχήμα 18: