ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2013
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 28/02/2013 Ημερομηνία Παράδοσης: 12/03/2013

Άσκηση 1.

(α) Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού ειναι: $r = \sqrt{1+3} = 2$ και για κάθε όρισμα του θ ισχύουν: $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Τότε η γωνία προκύπτει οτι είναι $\theta = \frac{\pi}{3}$.
Άρα,η πολική μορφή του μιγαδικου αριθμού θα είναι: $1 + j\sqrt{3} = 2e^{\frac{j\pi}{3}}$.

(β) Το μέτρο του μιγαδικου αριθμού είναι $r = \sqrt{(-5)^2} = 5$. Έχουμε ότι: $\cos\theta = \frac{-5}{5} = -1$ και $sin\theta = 0$. Τότε η πολική μορφή θα είναι: $5e^{-j\pi}$.

(γ) Το μέτρο του μιγαδικου αριθμού ειναι: $r = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$. Επίσης , $\cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ και $sin\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. Η γωνία θ θα είναι: $\frac{5\pi}{4}$. Τότε η πολική μορφή γίνεται: $5\sqrt{2}e^{\frac{j5\pi}{4}}$.

(δ) Ο μιγαδικός αριθμός γινεται:
$(1 - j\sqrt{3})^3 = 1^3 - 3j\sqrt{3} + 3(j\sqrt{3})^2 - (j\sqrt{3})^3 = 1 - j3\sqrt{3} - 9 + j3\sqrt{3} = -8$. Άρα το μέτρο του μιγαδικού αριθμού είναι: $r = \sqrt{(-8)^2} = 8$. Για το όρισμα θ ισχύει ότι: $\cos\theta = -1$ και $\sin\theta = 0$. Άρα η πολικη μορφη γινεται: $8e^{-j\pi}$.

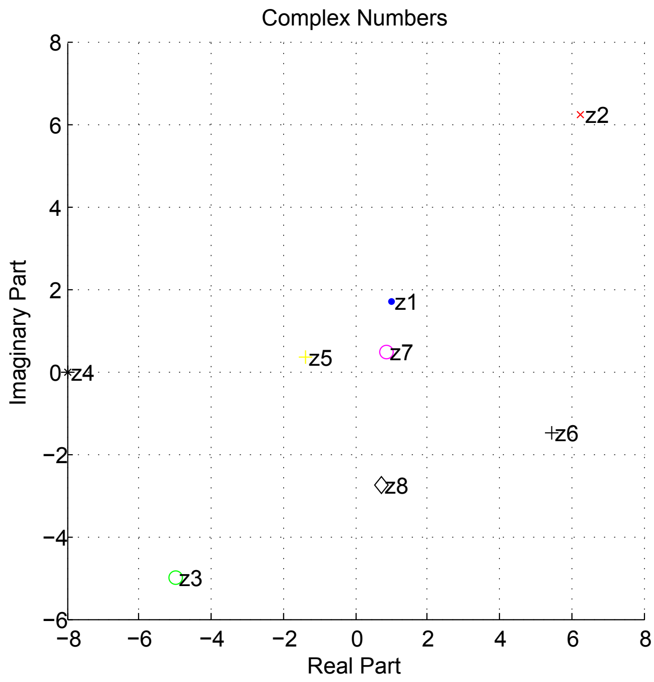
(ε) Ο μιγαδικός αριθμός $j(1+j)e^{\frac{j\pi}{6}}$ γίνεται: Η πολική μορφή του j είναι: $e^{\frac{j\pi}{2}}$, διότι το μέτρο του j είναι 1 και η γωνία του είναι $\frac{\pi}{2}$. Η πολική μορφή του $1 + j$ είναι $\sqrt{2}e^{\frac{j\pi}{4}}$, διότι το μέτρο του είναι $r = \sqrt{2}$ και $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Άρα η πολική μορφή του $j(1+j)e^{\frac{j\pi}{6}}$ θα είναι: $e^{\frac{j\pi}{2}}\sqrt{2}e^{\frac{j\pi}{4}}e^{\frac{j\pi}{6}} = \sqrt{2}e^{\frac{j11\pi}{12}}$.

(στ)Για τον μιγαδικό αριθμό $(\sqrt{3}+j)2\sqrt{2}e^{\frac{-j\pi}{4}}$ έχουμε: Το μέτρο του $(\sqrt{3}+j)$ είναι:
$r = \sqrt{3^2 + 1^2} = 2$. Επίσης, $\sin\theta = \frac{1}{2}$ και $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Άρα η γωνία είναι $\frac{\pi}{6}$. Η πολικη μορφή του είναι $(\sqrt{3}+j) = 2e^{\frac{j\pi}{6}}$. Επομένως, ο μιγαδικός αριθμός $(\sqrt{3}+j)2\sqrt{2}e^{\frac{-j\pi}{4}}$ σε πολική μορφή γράφεται ως: $2e^{\frac{j\pi}{6}}2\sqrt{2}e^{\frac{-j\pi}{4}} = 4\sqrt{2}e^{\frac{-j\pi}{12}}$.

(ζ) Ο μιγαδικός αριθμός γίνεται:
$\frac{(1+j\sqrt{3})}{\sqrt{3}+j} = \frac{(1+j\sqrt{3})(\sqrt{3}-j)}{(\sqrt{3}+j)(\sqrt{3}-j)} = \frac{\sqrt{3}-j+3j+\sqrt{3}}{3-j^2} = \frac{2\sqrt{3}+2j}{3+1} = \frac{2(\sqrt{3}+j)}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j$. Τότε το μέτρο θα είναι: $r = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = 1$. Έχουμε ότι $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $sin\theta = \frac{1}{2}$.Άρα η γωνία θ είναι $\frac{\pi}{6}$. Οπότε η πολικη μορφη του μιγαδικου αριθμού γίνεται: $e^{\frac{j\pi}{6}}$.

(η)Έχουμε ότι $(\sqrt{3} - j^3)(1-j) = (\sqrt{3} - j)(1-j)$. Για τον μιγαδικό αριθμό $(\sqrt{3} - j^3)$ έχουμε ότι το μέτρο του είναι $r = 4$. Για τα ορίσματα θ έχουμε: $\sin\theta = \frac{-1}{2}$ και $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Άρα η γωνία $\theta = \frac{-\pi}{6}$
Οπότε η πολική του μορφη γίνεται: $(\sqrt{3} - j^3) = 2e^{\frac{-j\pi}{6}}$.
Για τον μιγαδικό αριθμό $(1 - j)$, το μέτρο του ειναι $\sqrt{2}$ και για το όρισμα ϕ έχουμε $\sin\phi = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ και $\cos\phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.Οπότε η γωνία είναι $\phi = \frac{-\pi}{4}$. Η πολική του μορφή θα είναι $(1-j) = \sqrt{2}e^{\frac{-j\pi}{4}}$.
Επομένως, έχουμε ότι $(\sqrt{3} - j^3)(1-j) = (\sqrt{3} - j)(1-j) = 2e^{\frac{-j\pi}{6}}\sqrt{2}e^{\frac{-j\pi}{4}} = 2\sqrt{2}e^{\frac{-j5\pi}{12}}$.

Οι γραφικές παραστάσεις των παραπάνω μιγαδικών αριθμών φαίνονται στο Σχήμα 1:



Σχήμα 1.

Άσκηση 2.

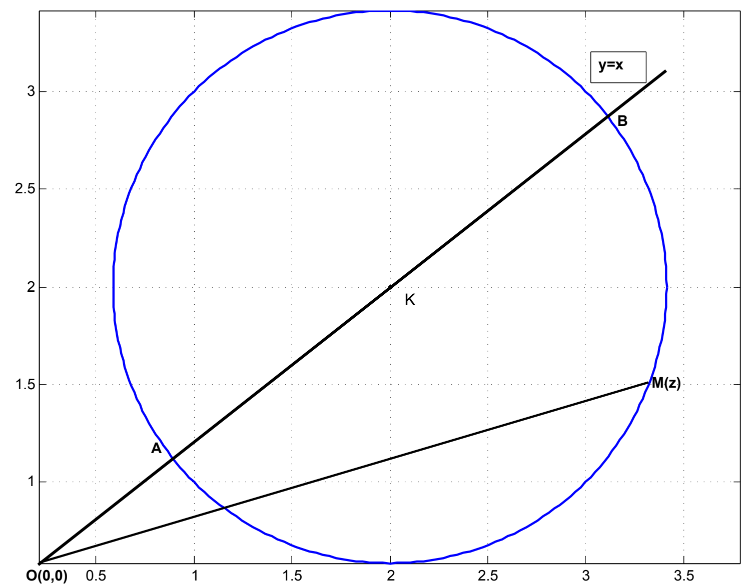
(α) Η ισότητα $|z-(2+j2)| = \sqrt{2}$ επαληθεύεται από όλους τους μιγαδικούς z που έχουν την ιδιότητα οι εικόνες τους να απέχουν από το σημείο K(2,2) σταθερή απόσταση ίση με $\sqrt{2}$ και μόνο από αυτούς. Επομένως ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος ειναι ο κύκλος με κέντρο K(2,2) και ακτίνα $r = \sqrt{2}$. Δηλαδή ο κύκλος $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$.

(β) Το $|z|$ είναι η απόσταση της εικόνας $M(z)$ από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$. Δηλαδη το μήκος (OM) στο Σχήμα 2. Γνωρίζουμε όμως ότι αν η ευθεία OK τέμνει τον κύκλο στα A και B, τότε $(OA) \leq (OM) \leq (OB)$, που σημαίνει ότι η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι το μήκος (OB) και η ελάχιστη το μήκος (OA).

Η εξίσωση της ευθείας OK είναι η $y = x$. Επομένως οι συντεταγμένες των σημείων A και B θα είναι οι λύσεις του συστηματος

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2 \\ y = x. \end{cases}$$

που ειναι τα ζεύγη $(1,1)$ και $(3,3)$. Άρα η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι ίση με $(OB) = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$ και η ελάχιστη ίση με $(OA) = \sqrt{1^2+1^2}$.



Σχήμα 2.

Άσκηση 3.

(α) Έχουμε $e^{j(\theta+\phi)} = e^{j\theta}e^{j\phi}$.
Τότε, $\cos(\theta+\phi) + j\sin(\theta+\phi) = (\cos\theta cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + j(\sin\theta cos\phi + \cos\theta\sin\phi)$ (3.1)
Θέτουμε $\theta = \phi$ στην σχέση (3.1) και έχουμε: $\cos 2\theta = \cos^2\theta - sin^2\theta$ (3.2)
Θέτουμε $\theta = -\phi$ στην (3.1) και προκύπτει :
$1 = \cos^2\theta + sin^2\theta$ (3.3)
Προσθέτουμε κατά μέλη τις 2 εξισώσεις (3.2), (3.3) και έχουμε ότι: $\cos^2 = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$

(β) Εξισώνοντας τα πραγματικά μέλη της εξίσωσης (3.1) με τα $(\theta+\phi)$ και $(\theta-\phi)$ έχουμε ότι:
$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$
και
$\cos(\theta-\phi) = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi$.
Αφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι:
$\sin\theta\sin\phi = \frac{1}{2}[\cos(\theta-\phi) - \cos(\theta+\phi)]$.

(γ) Εξισώνοντας τα πραγματικα μέλη στην εξίσωση (3.1) έχουμε οτι:
$\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$.

Άσκηση 4. Έστω $z = x + jy$.

(α) $zz^* = re^{j\theta}re^{-j\theta} = r^2$

(β) $\frac{z}{z^*} = re^{j\theta}r^{-1}e^{j\theta} = e^{j2\theta}$

(γ) $z + z^* = x + jy + x - jy = 2x = 2\mathrm{Re}\{z\}$

(δ) $z - z^* = x + jy - x + jy = 2jy = 2\mathrm{Im}\{z\}$

(ε) $(z_1 + z_2)^* = ((x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2))^* = x_1 - jy_1 + x_2 - jy_2 = z_1^* + z_2^*$

(στ) Έστω$(\alpha z_1 z_2)^*$. Για $\alpha > 0$ έχουμε
$(\alpha z_1 z_2)^* = (\alpha r_1 r_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)})^* = \alpha r_1 e^{-j\theta_1} r_2 e^{-j\theta_2} = \alpha z_1^* z_2^*$

Για $\alpha < 0$ έχουμε $\alpha = |\alpha| e^{j\pi}$

$(\alpha z_1 z_2)^* = (|\alpha| r_1 r_2 e^{j(\theta_1+\theta_2+\pi)})^* = |\alpha| r_1 e^{-j\theta_1} r_2 e^{-j\theta_2} = \alpha z_1^* z_2^*$.

(ζ) Για $|z_2| \neq 0$, $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{r_1}{r_2} e^{-j\theta_1} e^{-j\theta_2} = \frac{z_1^*}{z_2^*}$

(η) Από το (γ) έχουμε :Re$\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\} = \frac{1}{2}[\frac{z_1}{z_2} + (\frac{z_1}{z_2})^*]$. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω καταλήγουμε:

Re$\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\} = \frac{1}{2}[\frac{z_1}{z_2} + \frac{{z_1}^*}{{z_2}^*}] = \frac{1}{2}[\frac{z_1 z_2^* + z_1^* z_2}{z_2 z_2^*}] = \frac{1}{2}\left[\frac{z_1 z_2^* + z_1^* z_2}{z_2 z_2^*}\right]$

Άσκηση 5.

(α) Έστω $z = x + jy$. Τότε: $(e^z)^* = (e^x e^{jy})^*$=$e^x e^{-jy}$=e^{x-jy}=e^{z^*}

(β) Έστω z_3=$z_1 z_2^*$ και $z_4 = z_1^* z_2$. Τότε:
$z_1 z_2^* + z_1^* z_2$ =$z_3 + z_3^*$=2Re$\{z_3\}$= 2Re$\{z_1 z_2^*\}$= $z_4 + z_4^*$=2Re$\{z_3\}$=2Re$\{z_1^* z_2\}$

(γ) $|z| = |re^{j\theta}| = r = |re^{-j\theta}| = |z^*|$

(δ) $|z_1 z_2| = |r_1 r_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)}| = |r_1 r_2| = |r_1||r_2| = |z_1||z_2|$

(ε) Έστω $z = x + jy$,$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, από την τριγωνικη ανίσοτητα έχουμε:
Re$\{z\} = x \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ και

(στ) Έστω $z = x + jy$,$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, από την τριγωνικη ανίσοτητα έχουμε:
Im$\{z\} = y \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

(ζ) $|z_1 z_2^* + z_1^* z_2| = 2\text{Re}\{z_1 z_2^*\} = |2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)| \leq 2r_1 r_2 = 2|z_1 z_2|$

(η) Επειδή $r_1 \geq 0$,$r_2 \geq 0$ και $-1 \leq \cos(\theta_1 - \theta_2) \leq 1$. Τότε:

$(|z_1| - |z_2|)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \leq r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) = |z_1 + z_2|^2$

Και

$(|z_1| + |z_2|)^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \geq |z_1 + z_2|^2$.

Άσκηση 6.

(α) Έχουμε: $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots + \omega^{n-1} = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = \frac{1-1}{1-\omega} = 0$

(β) $1 \cdot \omega \cdot \omega^2 \cdot \omega^3 \cdot \cdots \cdot \omega^{n-1} = \omega^{1+2+3+\cdots+(n-1)}$= $\omega^{\frac{n(n-1)}{2}}$ = $(\cos(\frac{2\pi}{n}) + j\sin(\frac{2\pi}{n}))^{\frac{n(n-1)}{2}}$=
$\cos(\frac{2\pi n(n-1)}{2n}) + j\sin(\frac{2\pi n(n-1)}{2n})$=$\cos(n-1)\pi + j\sin(n-1)\pi$=$(\cos\pi + j\sin\pi)^{n-1}$=$(-1)^{n-1}$