ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2013
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 28/02/2013 Ημερομηνία Παράδοσης: 12/03/2013

Άσκηση 1. Να εκφράσετε τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς σε πολική μορφή και να τους σχεδιάσετε στο μιγαδικό επίπεδο δείχνοντας το μέτρο και το όρισμα (γωνία) τους.

(α) $1 + j\sqrt{3}$
(β) -5
(γ) $-5 - 5j$
(δ) $(1 - j\sqrt{3})^3$
(ε) $j(1 + j)e^{j\pi/6}$
(στ) $(\sqrt{3} + j)2\sqrt{2}e^{-j\pi/4}$
(ζ) $\dfrac{1 + j\sqrt{3}}{\sqrt{3} + j}$
(η) $(\sqrt{3} + j^3)(1 - j)$

Άσκηση 2. Αν για το μιγαδικό z ισχύει ότι $|z - (2 + j2)| = \sqrt{2}$ να βρεθεί:

(α) Ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z στο μιγαδικό επίπεδο.
(β) Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z|$.

Άσκηση 3. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του Euler, να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

(α) $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$
(β) $(\sin\theta)(\sin\phi) = \frac{1}{2}\cos(\theta - \phi) - \frac{1}{2}\cos(\theta + \phi)$
(γ) $\sin(\theta + \phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$

Άσκηση 4. Να αποδείξετε τις παρακάτω σχέσεις, όπου z, z_1 και z_2 είναι τυχαίοι μιγαδικοί αριθμοί.

(α) $zz^* = r^2$
(β) $\frac{z}{z^*} = e^{j2\theta}$
(γ) $z + z^* = 2\mathrm{Re}\{z\}$
(δ) $z - z^* = 2j\mathrm{Im}\{z\}$
(ε) $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$
(στ) $(\alpha z_1 z_2)^* = \alpha z_1^* z_2^*$ όπου α τυχαίος πραγματικός αριθμός
(ζ) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$
(η) $\mathrm{Re}\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\} = \frac{1}{2}\left[\frac{z_1 z_2^* + z_1^* z_2}{z_2 z_2^*}\right]$

Άσκηση 5. Να αποδείξετε τις παρακάτω σχέσεις, όπου z, z_1 και z_2 είναι τυχαίοι μιγαδικοί αριθμοί.

(α) $(e^z)^* = e^{z^*}$
(β) $z_1 z_2^* + z_1^* z_2 = 2\mathrm{Re}\{z_1 z_2^*\} = 2\mathrm{Re}\{z_1^* z_2\}$
(γ) $|z| = |z^*|$
(δ) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
(ε) $\mathrm{Re}\{z\} \leq |z|$
(στ) $\mathrm{Im}\{z\} \leq |z|$
(ζ) $|z_1 z_2^* + z_1^* z_2| \leq 2|z_1 z_2|$
(η) $(|z_1| - |z_2|)^2 \leq |z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$

Άσκηση 6. Για τις n-στές ρίζες της μονάδας $1,\ \omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \ldots, \omega^{n-1}$, όπου $\omega = e^{j\frac{2\pi}{n}} = \cos(\frac{2\pi}{n}) + j\sin(\frac{2\pi}{n})$, να αποδειχτεί ότι:

(α) $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots + \omega^{n-1} = 0$
(β) $1 \cdot \omega \cdot \omega^2 \cdot \omega^3 \cdot \cdots \cdot \omega^{n-1} = (-1)^{n-1}$