

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Διδάσκων: Α. Μουχτάρης

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς- 3η Σειρά Ασκήσεων 03/05/2012

Ημερομηνία Ανάθεσης 03/05/2012 - Ημερομηνία Παράδοσης 17/05/2012

Άσκηση 1.

1. Να υπολογίσετε το μετασχηματισμό Fourier (FT) των σημάτων που ακολουθούν. Για τα σήματα (i)-(iv) χρησιμοποιήστε την εξίσωση της αναλύσης. Για τα σήματα (v)-(viii) μπορείτε να χρησιμοποιήσετε γνωστά ζεύγη FT ή τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα.

(i) $e^{-2(t-1)}u(t-1)$

(ii) $e^{-2|t-1|}$

(iii) $\delta(t+1) + \delta(t-1)$

(iv) $\frac{d}{dt}(u(-2-t) + u(t-2))$

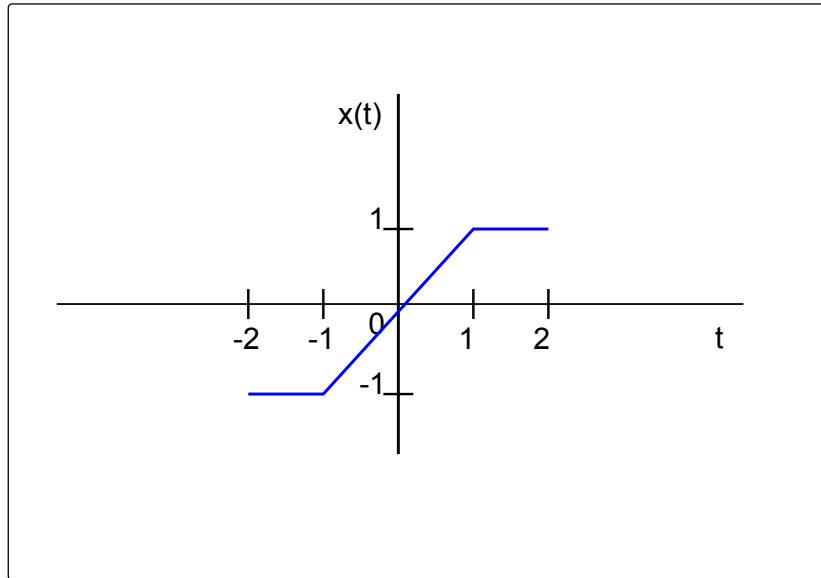
(v) $(e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t) u(t) \quad \alpha > 0$

(vi) $x(t) = \begin{cases} 1 + \cos \pi t, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$

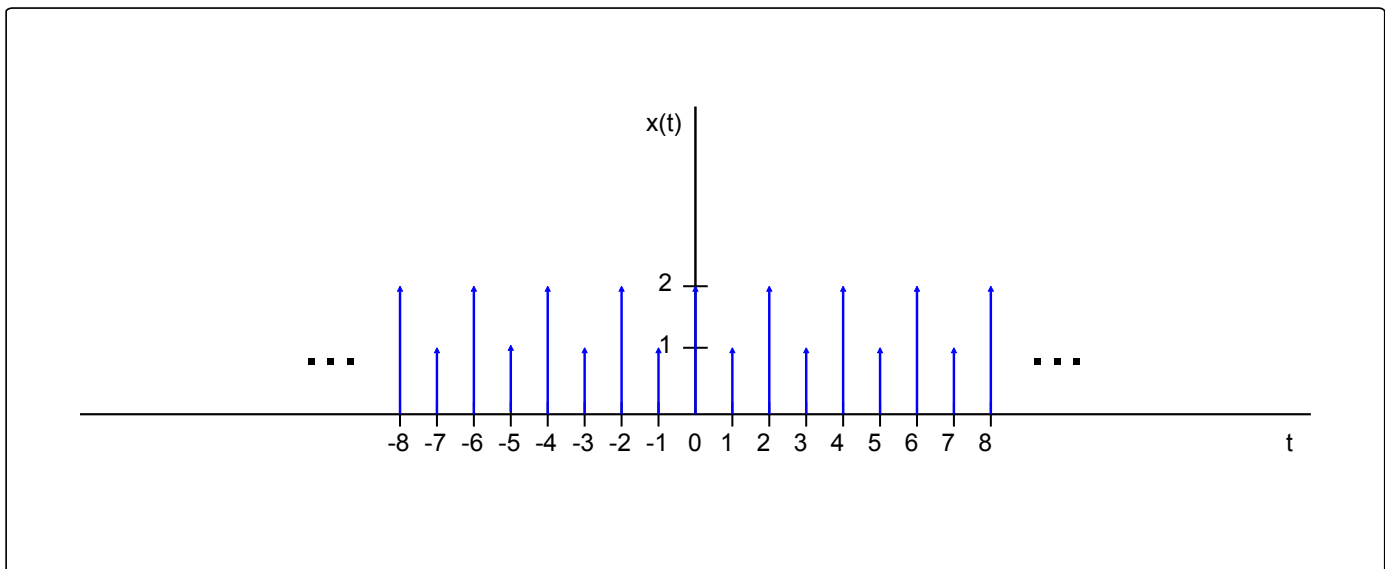
(vii) $x(t)$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 1

(viii) $x(t)$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 2

2. Για τα σήματα (i)-(iv) του ερωτήματος (1.) να σχεδιαστεί το πλάτος του FT.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Άσκηση 2.

1. Έστω το σήμα $x(t)$ με μετασχηματισμό Fourier (FT), $X(\omega)$. Εκφράστε τους FT των σημάτων που ακολουθούν συναρτήσει του $X(\omega)$. Χρησιμοποιείστε τις ιδιότητες του FT.

(α) $x_1(t) = x(1-t) + x(-1-t)$

(β) $x_2(t) = x(3t-6)$

(γ) $x_3(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t-1)$

2. Για κάθε έναν από τους FT που ακολουθούν, αποφανθείτε για το αν το αντίστοιχο σήμα στο πεδίο του χρόνου είναι (i) πραγματικό ή φανταστικό ή τίποτα από τα δύο και (ii) άρτιο ή περιττό ή τίποτα από τα δύο. Για να απαντήσετε χρησιμοποιείτε τις ιδιότητες του FT, μην υπολογίσετε τον αντίστροφο FT.

$$(α) X_1(\omega) = u(\omega) - u(\omega - 2)$$

$$(β) X_2(\omega) = \cos(2\omega) \sin\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

$$(γ) X_3(\omega) = A(\omega)e^{jB(\omega)} \text{ όπου } A(\omega) = \frac{\sin 2\omega}{\omega} \text{ και } B(\omega) = 2\omega + \frac{\pi}{2}$$

$$(δ) X_4(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} \delta\left(\omega - \frac{k\pi}{4}\right)$$

Άσκηση 3.

1. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του FT και γνωστά ζεύγη FT, βρείτε τον FT του σήματος:

$$x(t) = t \left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^2$$

2. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (1) και τη σχέση του Parseval, υπολογίστε το:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^4 dt$$

Άσκηση 4. Έστω το ζεύγος FT:

$$e^{-|t|} \xleftrightarrow{FT} \frac{2}{1 + \omega^2}$$

- (i) Χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες ιδιότητες, βρείτε τον FT του σήματος $te^{-|t|}$
- (ii) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (i) και την ιδιότητα της δυικότητας (duality property), βρείτε τον FT του σήματος:

$$\frac{4t}{(1 + t^2)^2}$$

Άσκηση 5.

Έστω ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα με απόκριση συχνότητας:

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 3}$$

Σε είσοδο $x(t)$ το σύστημα δίνει έξοδο:

$$y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$$

Βρείτε το $x(t)$.

Άσκηση 6.

Έστω $X(\omega)$ ο FT του σήματος $x(t)$ που φαίνεται στο Σχήμα 3. Χωρίς να υπολογίσετε το $X(\omega)$:

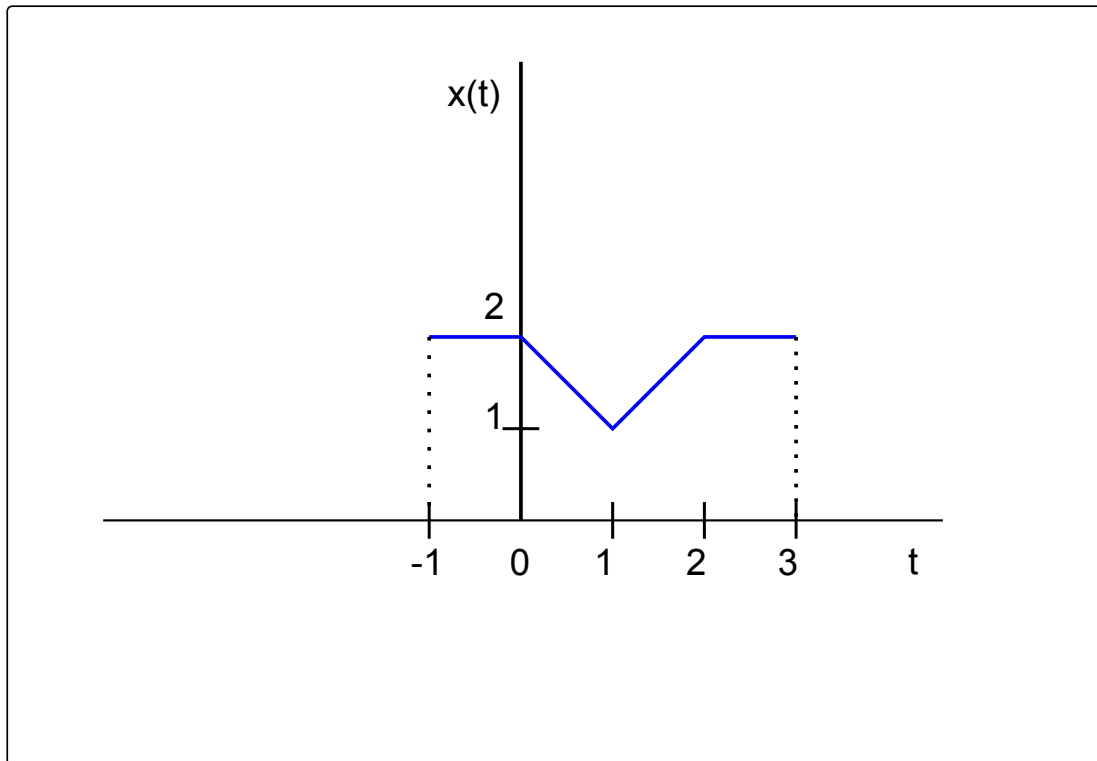
- (i) Υπολογίστε το $\arg(X(\omega))$
- (ii) Υπολογίστε το $X(0)$
- (iii) Υπολογίστε το $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega$
- (iv) Υπολογίστε το $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \frac{2 \sin \omega}{\omega} e^{j2\omega} d\omega$
- (v) Υπολογίστε το $\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$
- (vi) Σχεδιάστε τον αντίστροφο FT του $Re\{X(\omega)\}$

Άσκηση 7.

1. Η διαφορική εξίσωση που ακολουθεί περιγράφει τη σχέση εισόδου-εξόδου ενός αιτιατού ΓΧΑ συστήματος

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 2x(t)$$

- (i) Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος



Σχήμα 3

(ii) Ποια είναι η απόκριση του συστήματος αν

$$x(t) = te^{-2t}u(t)$$

(iii) Επαναλάβετε το ερώτημα (1i) για το αιτιατό σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \sqrt{2}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 2x(t)$$

2. Το αιτιατό και ευσταθές σύστημα S έχει απόκριση συχνότητας:

$$H(\omega) = \frac{j\omega + 4}{6 - \omega^2 + 5j\omega}$$

(i) Βρείτε μία διαφορική εξίσωση που να συνδέει την είσοδο $x(t)$ με την έξοδο $y(t)$ του συστήματος S.

(ii) Βρείτε την κρουστική απόκριση $h(t)$ του S.

(iii) Ποια είναι η έξοδος $y(t)$ του συστήματος του S όταν η είσοδος είναι $x(t) = e^{-4t}u(t) - te^{4t}u(t)$.