

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Διδάσκων: Α. Μουχτάρης

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς- 1η Σειρά Ασκήσεων 07/03/2012

Ημερομηνία Ανάθεσης 07/03/2012 - Ημερομηνία Παράδοσης 20/03/2012

Άσκηση 1.

1. Χρησιμοποιώντας τη σχέση του Euler, αποδείξτε τις παρακάτω σχέσεις:

(i) $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$

(ii) $\sin \theta = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$

(iii) $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$

(iv) $(\sin \theta)(\sin \phi) = \frac{1}{2} \cos(\theta - \phi) - \frac{1}{2} \cos(\theta + \phi)$

(v) $\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi$

2. Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός

$$z = x + jy = re^{j\theta}$$

Ο συζυγής μιγαδικός του z συμβολίζεται με z^* και είναι

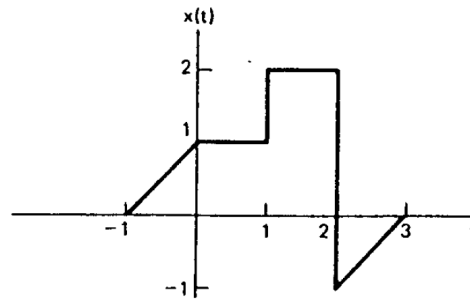
$$z^* = x - jy = re^{-j\theta}$$

Αποδείξτε τις παρακάτω σχέσεις, όπου $z, z_1,$ και z_2 είναι τυχαίοι μιγαδικοί αριθμοί.

(i) $(az_1z_2)^* = az_1^*z_2^*$, όπου a ένας τυχαίος πραγματικός αριθμός

(ii) $\Re \left\{ \frac{z_1}{z_2} \right\} = \frac{1}{2} \left[\frac{z_1z_2^* + z_1^*z_2}{z_2z_2^*} \right]$

(iii) $\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$



Σχήμα 1

Άσκηση 2.

Ένα συνεχές σήμα $x(t)$ φαίνεται στο Σχήμα 1. Σχεδιάστε και σημειώστε προσεκτικά τα σωστά σημεία στο διάγραμμα για κάθε ένα από τα παρακάτω σήματα :

(i) $x(t - 2)$

(ii) $x(1 - t)$

(iii) $x(2t + 2)$

(iv) $x(2 - t/3)$

(v) $[x(t) + x(2 - t)]u(1 - t)$

(vi) $x(t) \left[\delta\left(t + \frac{3}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{3}{2}\right) \right]$

Άσκηση 3.

1. Προσδιορίστε αν τα παρακάτω σήματα είναι περιοδικά ή όχι. Αν ένα σήμα είναι περιοδικό, βρείτε τη θεμελιώδη περίοδο του.

(i) $x(t) = 2 \cos(3t + \pi/4)$

(ii) $x(t) = e^{j(\pi t - 1)}$

(iii) $x(t) = [\sin(t - \pi/6)]^2$

(iv) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(t-3n)^2}$

2. Έστω $x(t)$ και $y(t)$ δύο περιοδικά σήματα με θεμελιώδη περίοδο T_1 και T_2 αντίστοιχα. Κάτω από ποιές συνθήκες είναι το άθροισμα

$$x(t) + y(t)$$

περιοδικό και ποια είναι η θεμελιώδης περίοδος του, αν είναι περιοδικό ;

Άσκηση 4.

1. Για κάθε ένα από τα παρακάτω συστήματα αποφασίστε αν είναι (1) χωρίς μνήμη, (2) χρονικά αμετάβλητο, (3) γραμμικό, (4) αιτιατό και (5) ευσταθές. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας. Σε κάθε ερώτημα το $y(t)$ συμβολίζει την έξοδο του συστήματος και το $x(t)$ την είσοδο του συστήματος.

(i) $y(t) = e^{x(t)}$

(ii) $y(t) = x(t - 1) - x(1 - t)$

(iii) $y(t) = \int_{-\infty}^{3t} x(\tau) d\tau$

(iv) $y(t) = x(t/2)$

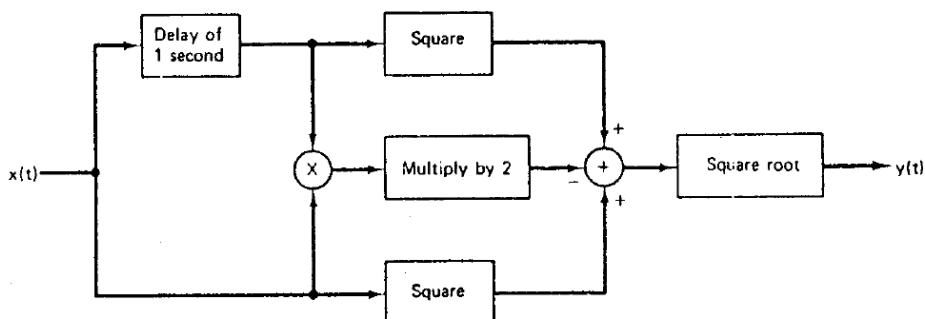
2. Έστω το σύστημα που φαίνεται στο Σχήμα 2. Η ενέργεια Square Root (τετραγωνική ρίζα) παράγει θετικό αριθμό.

(i) Βρείτε την σχέση μεταξύ $y(t)$ και $x(t)$

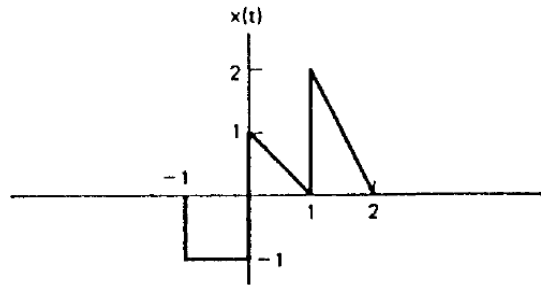
(ii) Είναι το σύστημα γραμμικό ;

(iii) Είναι το σύστημα χρονικά αμετάβλητο ;

(iv) Βρείτε την απόκριση του συστήματος $y(t)$ όταν η είσοδος είναι αυτή που φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 2



Σχήμα 3

Άσκηση 5.

Για κάθε ένα από τα παρακάτω ζευγάρια κυματομορφών, χρησιμοποιείστε το συνελκτικό ολοκλήρωμα για να βρείτε την απόκριση $y(t)$ του Γραμμικά και Χρονικά Αμετάβλητου (ΓΧΑ) συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t)$ στην είσοδο $x(t)$. Σχεδιάστε τα αποτελέσματα.

(i) $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$

$h(t) = e^{-\beta t}u(t)$

Υπολογίστε το για $\alpha \neq \beta$ και για $\alpha = \beta$

(ii) $x(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5)$

$h(t) = e^{2t}u(1-t)$

(iii) $x(t) = e^{-3t}u(t)$

$h(t) = u(t-1)$

(iv) $x(t) = e^{-2t}u(t+2) + e^{3t}u(-t+2)$

$h(t) = e^t u(t-1)$

(v) $x(t) = \begin{cases} e^t, & t < 0 \\ e^{5t} - 2e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$

$h(t)$ όπως στο Σχήμα 4(a)

(vi) $x(t)$ και $h(t)$ όπως στο Σχήμα 4(b)

(vii) $x(t)$ όπως στο Σχήμα 4(c)

$h(t) = u(-2-t)$

(viii) $x(t) = \delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2)$ και $h(t)$ όπως στο Σχήμα 4(d)

(ix) $x(t)$ και $h(t)$ όπως στο Σχήμα 4(e)

(x) $x(t)$ και $h(t)$ όπως στο Σχήμα 4(f)

(xi) $x(t)$ και $h(t)$ όπως στο Σχήμα 4(g)

(xii) $x(t)$ όπως στο Σχήμα 4(h)

$$h(t) = e^{-t}[u(t-1) - u(t-2)]$$

(xiii) $x(t)$ και $h(t)$ όπως στο Σχήμα 4(i)

Άσκηση 6.

Έστω ένα γραμμικό σύστημα με την ακολουθη απόκριση στο $\delta(t - \tau)$

$$h_\tau(t) = u(t - \tau) - u(t - 2\tau)$$

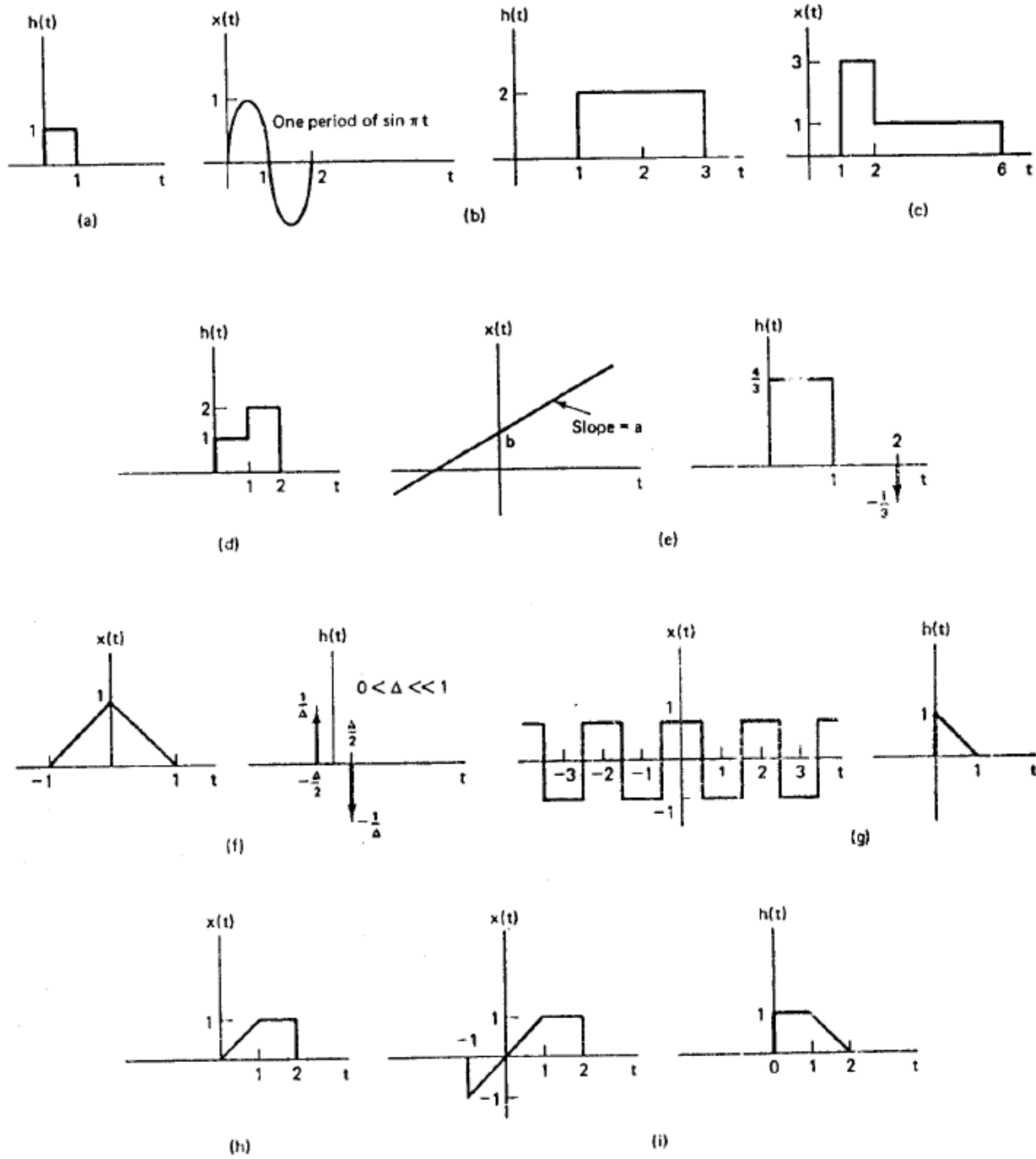
(i) Είναι το σύστημα χρονικά αμετάβλητο ;

(ii) Είναι αιτιατό ;

(iii) Υπολογίστε την απόκριση του συστήματος σε κάθε μία από τις παρακάτω δύο εισόδους

α) $x_1(t) = u(t - 1) - u(t - 3)$

β) $x_2(t) = e^{-t}u(t)$



Σχήμα 4