Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Διδάσκων: Α. Μουχτάρης

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς-Λύσεις 4ης Σειράς Ασκήσεων 17/05/2012

Λύσεις 4ης Σειράς Ασκήσεων 17/05/2012

Άσκηση 1.

(i) Χρησιμοποιούμε τον ορισμό για τον αμφίπλευρο μετασχηματισμό Laplace (LT), οπότε:

$$\begin{aligned}
X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-4t}u(t) + e^{-5t}(\sin 5t)u(t)\right) e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4t}u(t)e^{-st}\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-5t}(\sin 5t)u(t)e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-4t}e^{-st}\mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} e^{-5t}(\sin 5t)e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-4t}e^{-st}\mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} e^{-5t}\frac{e^{j5t}-e^{-j5t}}{2j}e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-4t}e^{-st}\mathrm{d}t + \frac{1}{2j}\left(\int_{0}^{\infty} e^{-5t}e^{j5t}e^{-st}\mathrm{d}t - \int_{0}^{\infty} e^{-5t}e^{-j5t}e^{-st}\mathrm{d}t\right) \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{(-4-s)t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2j}\left(\int_{0}^{\infty} e^{(-5+j5-s)t}\mathrm{d}t - \int_{0}^{\infty} e^{(-5-j5-s)t}\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{s+4} + \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s+5-j5} - \frac{1}{s+5+j5}\right), \qquad Re\{s\} > -4 \quad \& \quad Re\{s\} > -5 \\
&= \frac{1}{s+4} + \frac{1}{2j}\left(\frac{j10}{(s+5-j5)(s+5+j5)}\right), \qquad Re\{s\} > -4 \\
&= \frac{1}{s+4} + \frac{5}{s^2+10s+50}, \qquad Re\{s\} > -4 \\
&= \frac{s^2+15s+70}{s^3+14s^2+90s+200}, \qquad Re\{s\} > -4
\end{aligned}$$

Τα μηδενικά είναι στα $-7,5 \pm 3.7j$ και οι πόλοι στα $-5 \pm 5j$

Παρατήρηση : αυτός ο αμφίπλευρος LT ταυτίζεται με τον αντίστοιχο μονόπλευρο LT. Μπορείτε να απαντήσετε γιατί ;

(ii) από τον ορισμό, όπως και πριν :

$$\begin{aligned}
X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{2t}u(-t) + e^{3t}u(-t)\right) e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2t}u(-t)e^{-st}\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{\infty} e^{3t}u(-t)e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{2t}e^{-st}\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{0} e^{3t}e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{(2-s)t}\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{0} e^{(3-s)t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2-s} + \frac{1}{3-s} \qquad Re\{s\} < 2 \quad \& \quad Re\{s\} < 3 \\
&= \frac{5-2s}{s^2-5s+6} \qquad Re\{s\} < 2
\end{aligned}$$

Έχω ένα μηδενικό στο $5/2$ και πόλους στο 3 και στο 2

(iii) Από ορισμό:

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} |t|e^{-2|t|}e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{0} -te^{2t}e^{-st}\mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} te^{-2t}e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= -\int_{-\infty}^{0} te^{2t}e^{-st}\mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} te^{-2t}e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= -\int_{-\infty}^{0} te^{(2-s)t}\mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} te^{(-2-s)t}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2-s}\int_{-\infty}^{0} t\left(e^{(2-s)t}\right)'\mathrm{d}t + \frac{1}{-2-s}\int_{0}^{\infty} t\left(e^{(-2-s)t}\right)'\mathrm{d}t \qquad Re\{s\} < 2 \quad \& \quad Re\{s\} > -2 \\
&= \frac{1}{s-2}\left[te^{(2-s)t}\big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^{(2-s)t}\mathrm{d}t\right] - \frac{1}{s+2}\left[te^{(-2-s)t}\big|_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} e^{(-2-s)t}\mathrm{d}t\right] \qquad -2 < Re\{s\} < 2 \\
&= \frac{1}{s-2}\left[0 - \frac{1}{2-s}e^{(2-s)t}\big|_{-\infty}^{0}\right] - \frac{1}{s+2}\left[0 - \frac{1}{-2-s}e^{(-2-s)t}\big|_{0}^{\infty}\right] \qquad -2 < Re\{s\} < 2 \\
&= \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{1}{(s+2)^2} \qquad -2 < Re\{s\} < 2 \\
&= \frac{2s^2+8}{(s-2)^2(s+2)^2} \qquad -2 < Re\{s\} < 2
\end{aligned}
$$

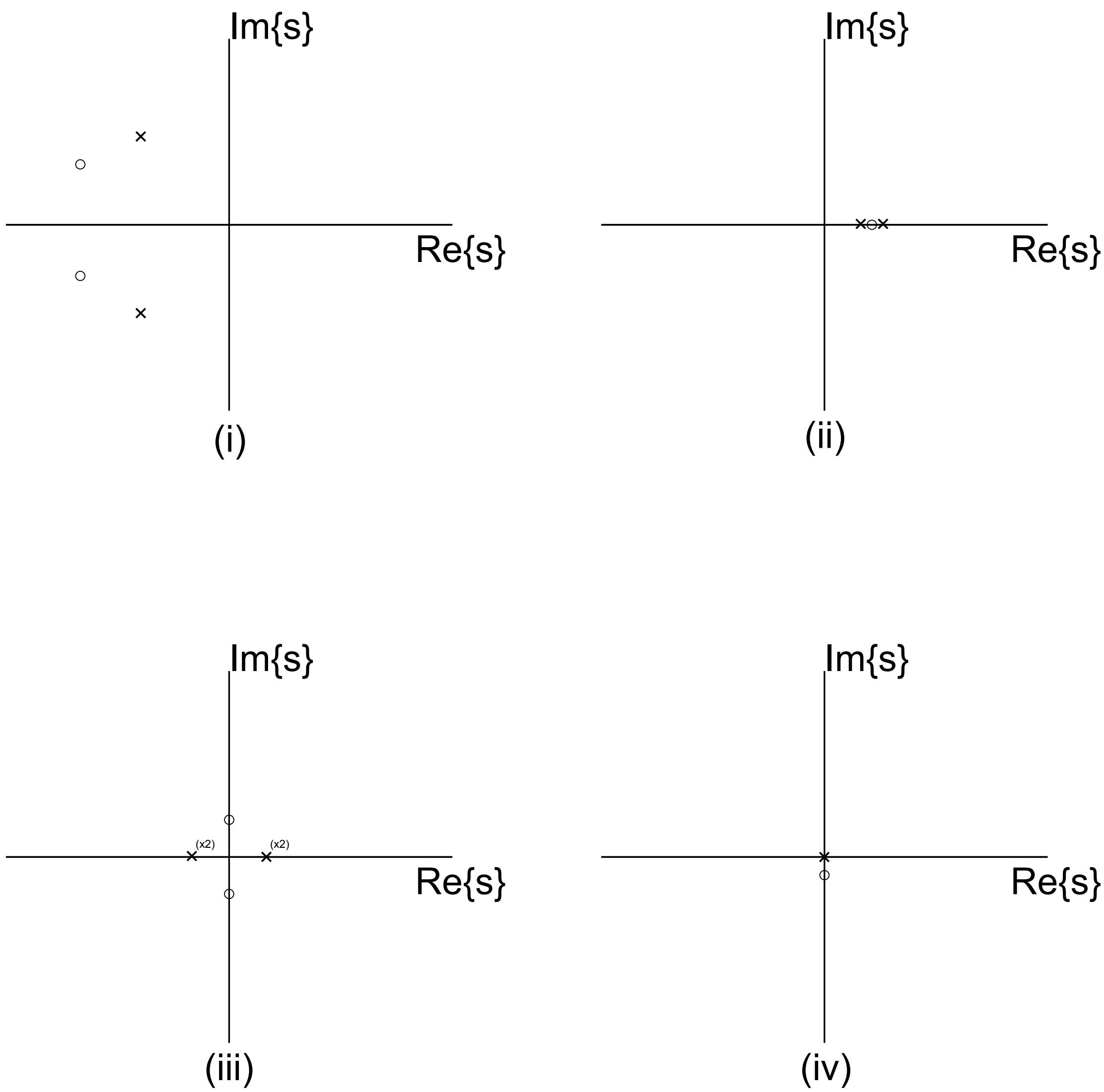
Έχω μηδενικά στα $\pm 2j$ και διπλό πόλο στο 2 και διπλό πόλο στο -2

(iv) Το $\delta(t)$ είναι ίσο με το $\delta(3t)$ και το $u(t)$ είναι ίσο με το $u(3t)$. Άρα από πίνακες:

$X(s) = 1 + \dfrac{1}{s} \Rightarrow X(s) = \dfrac{s+1}{s}, \qquad Res > 0$

Έχω μηδενικό στα -1 και πόλο στο 0

Ακολουθούν τα διαγράμματα με τους πόλους και τα μηδενικά για κάθε μία εκ των ανωτέρω περιπτώσεων



Σχήμα 1

Άσκηση 2.

Αντιμετωπίζουμε όλα τα ερωτήματα με ανάλυση σε μερικά κλάσματα

(α')

$$X(s) = \frac{s+2}{s^2+7s+12}, \qquad -4 < Re\{s\} < -3$$
$$\Rightarrow X(s) = \frac{s+2}{(s+4)(s+3)} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+3}, \qquad -4 < Re\{s\} < -3$$
$$\Rightarrow A = 2 \quad \& \quad B = -1$$
$$\Rightarrow X(s) = \frac{2}{s+4} - \frac{1}{s+3}, \qquad -4 < Re\{s\} < -3$$

Από τα ζεύγη:

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+a}, \quad Re\{s\} > -Re\{a\}$$
$$-e^{-at}u(-t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+a}, \quad Re\{s\} < -Re\{a\}$$

και λαμβάνοντας υπόψιν τη δοθείσα ROC, έχω τελικά:

$$x(t) = 2e^{-4t}u(t) + e^{-3t}u(-t)$$

(β')

$$X(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}, \qquad -3 < Re\{s\} < -2$$
$$\Rightarrow X(s) = \frac{s+1}{(s+3)(s+2)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+2}, \qquad -3 < Re\{s\} < -2$$
$$\Rightarrow A = 2 \quad \& \quad B = -1$$
$$\Rightarrow X(s) = \frac{2}{s+3} - \frac{1}{s+2}, \qquad -3 < Re\{s\} < -2$$

Από τα ζεύγη:

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+a}, \quad Re\{s\} > -Re\{a\}$$
$$-e^{-at}u(-t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+a}, \quad Re\{s\} < -Re\{a\}$$

και λαμβάνοντας υπόψιν τη δοθείσα ROC, έχω τελικά:

$$x(t) = 2e^{-3t}u(t) + e^{-2t}u(-t)$$

(γ') Αριθμητής και παρονομαστής είναι ιδίας τάξης, οπότε αρχικά κάνω διαίρεση και κατόπιν προχωρώ με ανάλυση σε μερικά κλάσματα στο κλάσματικό μέρος της διαίρεσης:

$$\begin{aligned}
&X(s) = \frac{(s+1)^2}{s^2-s+1}, \qquad Re\{s\} > \frac{1}{2}\\
&\Rightarrow X(s) = \frac{s^2+2s+1}{s^2-s+1}, \qquad Re\{s\} > \frac{1}{2}\\
&\Rightarrow X(s) = 1 + \frac{3s}{s^2-s+1}, \qquad Re\{s\} > \frac{1}{2}\\
&\Rightarrow X(s) = 1 + \frac{3s}{(s-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2})(s-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2})} = 1 + \frac{A+jB}{s-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{A-jB}{s-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}}, \qquad Re\{s\} > \frac{1}{2}\\
&\Rightarrow A+jB = \frac{3s}{s-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}}\Big|_{s=\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\Rightarrow A = \frac{3}{2} \quad \& \quad B = -j\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\Rightarrow X(s) = 1 + \frac{3/2 - j\sqrt{3}/2}{s-1/2-j\sqrt{3}/2} + \frac{3/2+j\sqrt{3}/2}{s-1/2+j\sqrt{3}/2}, \qquad Re\{s\} > \frac{1}{2}\\
&\Rightarrow X(s) = 1 + \frac{3}{2}\frac{1}{s-1/2-j\sqrt{3}/2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{s-1/2-j\sqrt{3}/2} + \frac{3}{2}\frac{1}{s-1/2+j\sqrt{3}/2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{s-1/2+j\sqrt{3}/2}
\end{aligned}$$

Από τα ζεύγη:

$$\delta(t) \overset{LT}{\longleftrightarrow} 1, \quad ROC = \text{όλο το μιγαδικό επίπεδο}$$

$$e^{-at}u(t) \overset{LT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+a}, \quad Re\{s\} > -Re\{a\}$$

και λαμβάνοντας υπόψιν τη δοθείσα ROC, έχω τελικά:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \delta(t) + \frac{3}{2}e^{(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2})t}u(t) - j\frac{\sqrt{3}}{2}e^{(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2})t}u(t) + \frac{3}{2}e^{(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2})t}u(t) + j\frac{\sqrt{3}}{2}e^{(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2})t}u(t)\\
&= \delta(t) + 3e^{t/2}u(t)\frac{e^{j\sqrt{3}/2}+e^{-j\sqrt{3}/2}}{2} - j\sqrt{3}e^{t/2}u(t)\frac{e^{j\sqrt{3}/2}-e^{-j\sqrt{3}/2}}{2}\\
&= \delta(t) + 3e^{t/2}u(t)\frac{e^{j\sqrt{3}t/2}+e^{-j\sqrt{3}t/2}}{2} + \sqrt{3}e^{t/2}u(t)\frac{e^{j\sqrt{3}t/2}-e^{-j\sqrt{3}t/2}}{2j}\\
&= \delta(t) + 3e^{t/2}\cos(\sqrt{3}t/2)u(t) + \sqrt{3}e^{t/2}\sin(\sqrt{3}t/2)u(t)
\end{aligned}$$

Παρατήρηση: Το κλάσμα $\frac{3s}{s^2-s+1}$ μπορεί να γραφτεί και ως:

$$\frac{3s}{s^2-s+1} = 3\frac{s-1/2}{(s-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} + \frac{3/2}{(s-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}$$

οπότε χρησιμοποιώντας τα ζεύγη:

$$e^{-at}\cos(\omega_o t)u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_o^2}, \quad Re\{s\} > -Re\{a\}$$
$$e^{-at}\sin(\omega_o t)u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{\omega_o}{(s+a)^2+\omega_o^2}, \quad Re\{s\} > -Re\{a\}$$

καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

(δ') Πάλι κάνουμε πρώτα διαίρεση και μετά συνεχίζουμε σε ανάλυση μερικών κλασμάτων, οπότε:

$$X(s) = \frac{s^2-s+1}{(s+1)^2}, \qquad Re\{s\} > -1$$
$$\Rightarrow X(s) = 1 - \frac{3s}{(s+1)^2} = 1 + \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2}, \qquad Re\{s\} > -1$$
$$\Rightarrow A = -3 \quad B = 3$$
$$\Rightarrow X(s) = 1 - \frac{3}{s+1} + \frac{3}{(s+1)^2}, \qquad Re\{s\} > -1$$

οπότε χρησιμοποιώντας τα ζεύγη:

$$e^{-at}\cos(\omega_o t)u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_o^2}, \quad Re\{s\} > -Re\{a\}$$
$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{(s+a)^n}, \quad Re\{s\} > -Re\{a\}$$

και λαμβάνοντας υπόψιν τη δοθείσα ROC, έχω τελικά:

$$x(t) = \delta(t) - 3e^{-t}u(t) + 3te^{-t}u(t)$$

Παρατήρηση:Ένας 2ος τόπος λύσης είναι να χρησιμοποιήσουμε το ζεύγος $tu(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s^2}, \quad Re\{s\} > 0$, να εφαρμόσουμε σε αυτό μετατόπιση στη μιγαδική συχνότητα κάτα 1 προς τα αριστερά, οπότε $e^{-t}tu(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{(s+1)^2}, \quad Re\{s\} > -1$ και τέλος, να εφαρμόσουμε την ιδιότητα της παραγώγισης στο χρόνο, οπότε: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-t}tu(t)\right) \xleftrightarrow{LT} \frac{s}{(s+1)^2}, \quad Re\{s\} > -1 \Rightarrow -e^{-t}tu(t) + e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{s}{(s+1)^2}, \quad Re\{s\} > -1$. Οπότε από το $X(s) = 1 - \frac{3s}{(s+1)^2}$ έχουμε πάλι $x(t) = \delta(t) - 3\left[-e^{-t}tu(t) + e^{-t}u(t)\right] \Rightarrow x(t) = \delta(t) + 3te^{-t}u(t) - 3e^{-t}u(t)$

Άσκηση 3.

(α') Εφαρμόζουμε το 2ο νόμο Kirchhoff στο κλειστό βρόχο του κυκλώματος (2ος νόμοςKirchhoff: Το αλγεβρικό άθροισμα όλων των τάσεων σε κάθε βρόγχο ενός κυκλώματος είναι ίσο με μηδέν.), οπότε:

$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = x(t)$$

Για την τάση στα άκρα του πηνίου ισχύει: $v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$. Για την ένταση που περνάει από τον πυκνωτή ισχύει: $i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}$. και για την τάση στα άκρα της ωμικής αντίστασης (από νόμο του Ohm) ισχύει: $v_R(t) = Ri_R(t)$ Οπότε:

$$\begin{aligned}
& v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = x(t) \\
\Rightarrow\ & Ri_R(t) + L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + v_C(t) = x(t) \\
\xRightarrow{i_R(t)=i_L(t)=i_C(t)=i(t)}\ & Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + v_C(t) = x(t) \\
\xRightarrow{i(t)=i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}}\ & RC\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + v_C(t) = x(t) \\
\xRightarrow{v_C(t)=y(t)}\ & R\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} + y(t) = x(t) \\
& LC\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + y(t) = x(t)
\end{aligned}$$

Στην ως άνω σχέση εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace έχοντας υπόψιν ότι θέλουμε να βρούμε τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(s)$, η οποία αντιστοιχεί σε μηδενικές αρχικές συνθήκες και είναι ανεξάρτητη της εισόδου, οπότε:

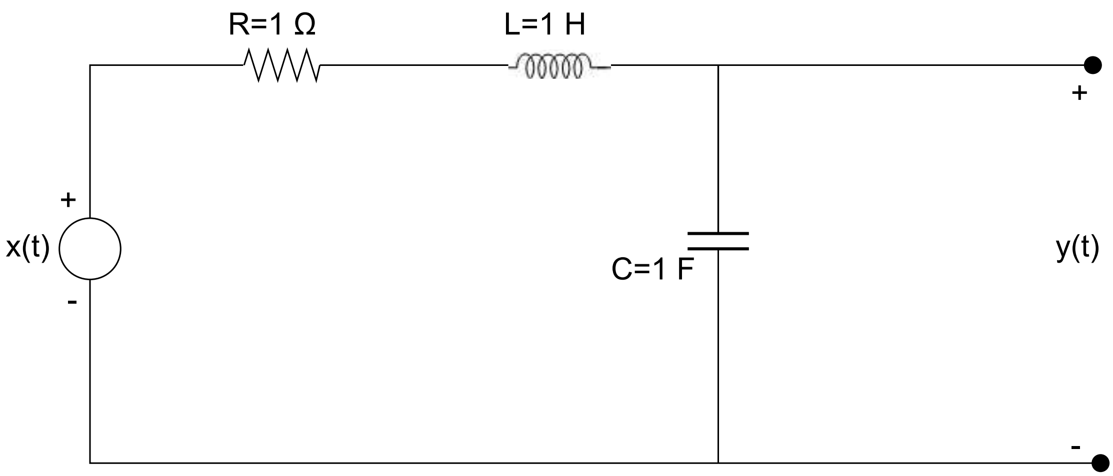
$$\begin{aligned}
& LC\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + y(t) = x(t) \\
\xRightarrow{R=1\quad L=1\quad C=1}\ & \frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + y(t) = x(t) \\
\xRightarrow{\text{Laplace transform and initial rest}}\ & s^2Y(s) + sY(s) + Y(s) = X(s) \\
\Rightarrow\ & \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2+s+1} \\
\Rightarrow\ & H(s) = \frac{1}{s^2+s+1}
\end{aligned}$$

Για να ορίσουμε την περιοχή σύγκλισης, πρέπει να βρούμε τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς, οπότε $s^2 + s + 1 = 0 \Rightarrow$ πόλοι στα $-\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$. Άρα δεδομένου ότι το σύστημα ειναι αιτιατό και ευσταθές η ROC είναι: $Re\{s\} > -\frac{1}{2}$

(β')

$$
\begin{aligned}
LC\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + y(t) &= x(t) \\
\xRightarrow{R=10^{-3} \quad L=1 \quad C=1} \frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} + 10^{-3}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + y(t) &= x(t) \\
\xRightarrow{\text{Laplace transform and initial rest}} s^2Y(s) + 0.001sY(s) + Y(s) &= X(s) \\
\Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} &= \frac{1}{s^2 + 0.001s + 1} \\
\Rightarrow H(s) &= \frac{1}{s^2 + 0.001s + 1}
\end{aligned}
$$

Για τους πόλους έχουμε $s^2 + 0.001s + 1 = 0$. Οπότε οι πόλοι είναι στα $-0.0005 \pm j2$. Άρα δεδομένου ότι το σύστημα ειναι αιτιατό και ευσταθές η ROC είναι: $Re\{s\} > -0.0005$



Σχήμα 1

Άσκηση 4. Τα στοιχεία που μας δίνονται είναι:

(i) Το $X(s)$ έχει ακριβώς 2 πόλους.

(ii) Το $X(s)$ δεν έχει κανένα πεπερασμένο μηδενικό.

(iii) Το $X(s)$ έχει έναν πόλο στο $s = -1 + j$

(iv) Το $e^{2t}x(t)$ δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμο.

(v) $X(0) = 8$.

Από τα 2 πρώτα στοιχεία καταλήγω στο συμπέρασμα ότι το $X(s)$ θα είναι της μορφής:

$$X(s) = \frac{A}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

όπου A είναι κάποια αριθμητική σταθερά και p_1 και p_2 είναι οι 2 πόλοι. Από το 3ο στοιχείο ξέρω τον έναν πόλο $p_1 = -1 + j$ και συνεπώς μπορώ να βρω και τον 2ο, αφού οι πόλοι εμφανίζονται σε ζεύγη συζυγών αριθμών, οπότε $p_2 = -1 - j$. Άρα το το $X(s)$ θα είναι της μορφής:

$$X(s) = \frac{A}{(s+1-j)(s+1+j)}$$

και από το τελευταίο στοιχείο έχω

$$\xRightarrow{X(0)=8} X(0) = \frac{A}{(0+1-j)(0+1+j)} = \frac{A}{2} \Rightarrow A = 16$$

Άρα

$$X(s) = \frac{16}{(s+1-j)(s+1+j)} \Rightarrow X(s) = \frac{16}{s^2+2s+2}$$

Για την περιοχή σύγκλισης χρησιμοποιούμε το 4ο στοιχείο. Άρα παρατηρώντας ότι το $e^{2t}x(t)$ αντιστοιχεί σε μετατόπιση στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας, έχουμε:

$$x(t) \overset{LT}{\Longleftrightarrow} X(s), \qquad \text{περιοχή σύγκλισης } R$$
$$e^{2t}x(t) \overset{LT}{\Longleftrightarrow} X(s-2), \qquad \text{περιοχή σύγκλισης } R \text{ μετατοπισμένη κατά 2 προς τα δεξιά}$$

Άρα αφού το $e^{2t}x(t)$ δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμο, δεν ορίζεται ο ΜΤΣΧ Fourier αυτού και συνεπώς η ROC του δε θα πρέπει να περιλαμβάνει τον άξονα των πραγματικών αριθμών. Οπότε η ROC του $x(t)$ είναι $Re\{s\} > -1$. Με αυτήν την ROC, η ROC του $e^{2t}x(t)$ είναι $Re\{s\} > 1$ που δεν περιλαμβάνει τον άξονα $j\omega$, ενώ στην αντίθετη περίπτωση θα ήταν $Re\{s\} < 1$ που περιλαμβάνει τον άξονα $j\omega$ και συνεπώς είναι αδύνατον.

Άσκηση 5.

Εφαρμόζω ΜΤΣΧ Laplace στη δοθείσα διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\mathrm{d}^3y(t)}{\mathrm{d}t^3}+6\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+11\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+6y(t)=x(t)$$
$$\stackrel{LT}{\Longleftrightarrow} s^3Y(s)-s^2y(0^-)-sy'(0^-)-y''(0^-)+6s^2Y(s)-6sy(0^-)-6y'(0^-)+11sY(s)-11y(0^-)+6Y(s)=X(s) \tag{1}$$

(α') Με μηδενικές αρχικές συνθήκες η ως άνω γίνεται:

$$s^3Y(s)+6s^2Y(s)+11sY(s)+6Y(s)=X(s)$$

Εφαρμόζοντας LT στη δοθείσα είσοδο,$x(t)=e^{-4t}u(t)$, έχουμε:

$$x(t)=e^{-4t}u(t)$$
$$\stackrel{LT}{\Longleftrightarrow} X(s)=\frac{1}{s+4}, \qquad Re\{s\}>-4$$

Οπότε η απόκριση του συστήματος είναι:

$$s^3Y(s)+6s^2Y(s)+11sY(s)+6Y(s)=X(s)$$
$$\Rightarrow s^3Y(s)+6s^2Y(s)+11sY(s)+6Y(s)=\frac{1}{s+4}$$
$$\Rightarrow Y(s)\left[s^3+6s^2+11s+6\right]=\frac{1}{s+4}$$
$$\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{(s+4)(s^3+6s^2+11s+6)}$$
$$\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{(s+4)(s^3+3s^2+3s^2+9s+2s+6)}$$
$$\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{(s+4)(s^2(s+3)+3s(s+3)+2(s+3))}$$
$$\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{(s+4)(s+3)(s^2+3s+2)}$$
$$\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{(s+4)(s+3)(s+2)(s+1)}=\frac{A}{s+4}+\frac{B}{s+3}+\frac{C}{s+2}+\frac{D}{s+1}$$
$$\Rightarrow A=-\frac{1}{6} \quad B=\frac{1}{2} \quad C=-\frac{1}{2} \quad D=\frac{1}{6}$$
$$\Rightarrow Y(s)=-\frac{1}{6}\frac{1}{s+4}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+3}-\frac{1}{2}\frac{1}{s+2}+\frac{1}{6}\frac{1}{s+1}, \qquad Re\{s\}>-1$$
$$\Rightarrow y(t)=-\frac{1}{6}e^{-4t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-3t}u(t)-\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)+\frac{1}{6}e^{-t}u(t)$$

(β΄) Χρησιμοποιώντας τις δοθείσες αρχικές συνθήκες και με μηδενική είσοδο, $x(t) = 0$, έχουμε από (1):

$$
\begin{aligned}
s^3Y(s) - s^2 + s - 1 + 6s^2Y(s) - 6s + 6 + 11sY(s) - 11 + 6Y(s) = 0 \\
\Rightarrow Y(s)\left[s^3 + 6s^2 + 11s + 6\right] = s^2 + 5s + 6 \\
\Rightarrow Y(s) = \frac{s^2 + 5s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \\
\Rightarrow Y(s) = \frac{(s+3)(s+2)}{(s+3)(s+2)(s+1)} \\
\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s+1} \\
\Rightarrow y(t) = e^{-t}u(t)
\end{aligned}
$$

(γ΄) Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες από το ερώτημα (β΄) και την είσοδο από το ερώτημα (α΄) έχουμε:

$$
\begin{aligned}
Y(s)\left[s^3 + 6s^2 + 11s + 6\right] = s^2 + 5s + 6 + \frac{1}{s+4} \\
\Rightarrow Y(s) = \frac{s^2 + 5s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} + \frac{1}{(s+4)(s^3 + 6s^2 + 11s + 6)} \\
\Rightarrow Y(s) = \frac{(s+3)(s+2)}{(s+3)(s+2)(s+1)} + \frac{1}{(s+4)(s+3)(s+2)(s+1)} \\
\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+4)(s+3)(s+2)(s+1)} \\
\Rightarrow Y(s) = \frac{(s+4)(s+3)(s+2) + 1}{(s+4)(s+3)(s+2)(s+1)} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+2}\frac{D}{s+1} \\
\Rightarrow A = -\frac{1}{6} \quad B = \frac{1}{2} \quad C = -\frac{1}{2} \quad D = \frac{7}{6} \Rightarrow Y(s) = -\frac{1}{6}\frac{1}{s+4} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+3} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+2} + \frac{7}{6}\frac{1}{s+1}, \qquad Re\{s\} > -1 \\
\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{6}e^{-4t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t) - \frac{1}{2}e^{-2t}u(t) + \frac{7}{6}e^{-t}u(t)
\end{aligned}
$$

Παρατήρηση: αν ονομάσουμε $y_{\text{ολική}}(t)$ το αποτέλεσμα του ερωτήματος (γ΄), (δηλαδή τη λύση της διαφορικής εξίσωσης με μη μηδενικές αρχικές συνθήκες και μη μηδενική είσοδο), $y_{\text{zero\_input}}(t)$ το αποτέλεσμα του ερωτήματος (β΄), (δηλαδή τη λύση της διαφορικής εξίσωσης με αρχικές συνθήκες και μηδενική είσοδο) και $y_{\text{zero\_state}}(t)$ το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α΄), (δηλαδή τη λύση της διαφορικής εξίσωσης με μηδενικές αρχικές συνθήκες και μη μηδενική είσοδο), από το αποτέλεσμα παρατηρούμε ότι:

$$
y_{\text{ολική}}(t) = y_{\text{zero\_input}}(t) + y_{\text{zero\_state}}(t)
$$

Το ως άνω ισχύει γενικά για γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές και μη μηδενικές αρχικές συνθήκες.