Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Διδάσκων: Α. Μουχτάρης

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς- Λύσεις 3η Σειρά Ασκήσεων 03/05/2012

Λύσεις 3ης Σειράς Ασκήσεων 03/05/2012

Άσκηση 1.

1. (i) Έστω $x(t) = e^{-2(t-1)}u(t-1)$. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση της ανάλυσης $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$, έχουμε:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-1)}u(t-1)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

Όμως το $e^{-2(t-1)}u(t-1)$ είναι διάφορο του μηδενός για $t \geq 1$, και από τον ορισμό της βηματικής συνάρτησης, $e^{-2(t-1)}u(t-1) = e^{-2(t-1)}$ για $t \geq 1$, οπότε:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-1)}u(t-1)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \int_{1}^{\infty} e^{-2(t-1)}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \int_{1}^{\infty} e^{-2(t-1)-j\omega t}\mathrm{d}t = \int_{1}^{\infty} e^{2}e^{(-2-j\omega)t}\mathrm{d}t$$
$$= e^{2}\int_{1}^{\infty} e^{(-2-j\omega)t}\mathrm{d}t = e^{2}\frac{1}{-2-j\omega}e^{(-2-j\omega)t}\Big|_{1}^{\infty} = \frac{e^{-j\omega}}{2+j\omega}$$

(ii) Αν $x(t) = e^{-2|t-1|}$, τότε $x(t) = e^{-2(t-1)}$ για $t \geq 1$ και $x(t) = e^{-2(1-t)} \Rightarrow x(t) = e^{2(t-1)}$ για $t \leq 1$. Οπότε χρησιμοποιώντας την εξίσωση της ανάλυσης:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t-1|}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{1} e^{2(t-1)}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t + \int_{1}^{\infty} e^{-2(t-1)}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$
$$= \int_{-\infty}^{1} e^{-2}e^{(2-j\omega)t}\mathrm{d}t + \int_{1}^{\infty} e^{2}e^{(-2-j\omega)t}\mathrm{d}t = e^{-2}\frac{1}{2-j\omega}e^{(2-j\omega)t}\Big|_{-\infty}^{1} + e^{2}\frac{1}{-2-j\omega}e^{(-2-j\omega)t}\Big|_{1}^{\infty}$$
$$= \frac{e^{-2}e^{2-j\omega}}{2-j\omega} + \frac{e^{2}e^{-2-j\omega}}{2+j\omega} = \frac{e^{-j\omega}}{2-j\omega} + \frac{e^{-j\omega}}{2+j\omega} = \frac{[e^{-j\omega}(2+j\omega)] + [e^{-j\omega}(2-j\omega)]}{(2-j\omega)(2+j\omega)} = \frac{4e^{-j\omega}}{4+\omega^2}$$

(iii) Από την εξίσωση της ανάλυσης:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t+1)+\delta(t-1)]e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+1)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$
$$= e^{-j\omega t}\Big|_{t=-1} + e^{-j\omega t}\Big|_{t=1} = e^{j\omega} + e^{-j\omega} = \cos(\omega) + j\sin(\omega) + \cos(\omega) - j\sin(\omega) = 2\cos(\omega)$$

(iv) Γνωρίζουμε ότι $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) = \delta(t)$, οπότε $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(-2-t)+u(t-2)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(-2-t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t-2) = -\delta(t+2)+\delta(t-2)$. Οπότε από την εξίσωση της ανάλυσης:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}[\delta(t-2)-\delta(t+2)]e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-2)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t+1)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$
$$= e^{-j\omega t}\Big|_{t=2} - e^{-j\omega t}\Big|_{t=-2} = e^{-j2\omega}-e^{j2\omega} = \cos(2\omega)-j\sin(2\omega)-\cos(2\omega)-j\sin(2\omega) = -2j\sin(2\omega)$$

(v) Χρησιμοποιώντας τη σχέση του Euler, μπορούμε να γράψουμε $\left(e^{-\alpha t}\cos\omega_o t\right)u(t) = e^{-\alpha t}\dfrac{e^{j\omega_o t}+e^{-j\omega_o t}}{2}u(t) = \frac{1}{2}e^{(-\alpha+j\omega_o)t}u(t)+\frac{1}{2}e^{(-\alpha-j\omega_o)t}u(t)$. Και από ιδιότητα γραμμικότητας και από το ζεύγος $e^{-at}u(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{a+j\omega}$, $Re\{a\}>0$ με $a=\alpha-j\omega_o$ για τον πρώτο όρο του αθροίσματος και $a=\alpha+j\omega_o$ για τον δεύτερο, έχουμε

$$\frac{1}{2}e^{(-\alpha+j\omega_o)t}u(t)+\frac{1}{2}e^{(-\alpha-j\omega_o)t}u(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2(\alpha-j\omega_o+j\omega)}+\frac{1}{2(\alpha+j\omega_o+j\omega)}$$

(vi) Από την εξίσωση της ανάλυσης και χρησιμοποιώντας τη σχέση του Euler, έχουμε:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}(1+\cos\pi t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1}(1+\cos\pi t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1}e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1}\cos\pi t e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\frac{e^{j\pi t}+e^{-j\pi t}}{2}e^{j\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-j\omega}-e^{j\omega}}{-j\omega}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^{(j\pi+j\omega)t}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^{(-j\pi+j\omega)t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2}{\omega}\frac{e^{j\omega}-e^{-j\omega}}{2j}+\frac{e^{(j\pi+j\omega)t}}{2j(\pi+\omega)}\Big|_{-1}^{1}+\frac{e^{(-j\pi+j\omega)t}}{2j(\omega-\pi)}\Big|_{-1}^{1}$$
$$= \frac{2}{\omega}\sin(\omega)+\frac{1}{\pi+\omega}\frac{e^{j(\pi+\omega)}-e^{-j(\pi+\omega)}}{2j}+\frac{1}{\omega-\pi}\frac{e^{j(\omega-\pi)}-e^{-j(\omega-\pi)}}{2j}$$
$$= \frac{2\sin(\omega)}{\omega}+\frac{\sin(\omega+\pi)}{\omega+\pi}+\frac{\sin(\omega-\pi)}{\omega-\pi} == \frac{2\sin(\omega)}{\omega}-\frac{\sin(\omega)}{\omega+\pi}-\frac{\sin(\omega)}{\omega-\pi}$$

(vii) Το $x(t)$ βάσει του σχήματος είναι:

$$x(t) = \begin{cases} -1, & -2 \le t \le -1 \\ t, & -1 \le t \le 1 \\ 1, & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

Μπορώ να γράψω το $x(t)$ ως άθροισμα: $x(t) = x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)$, όπου το $x_1(t)$ είναι τετραγωνικός παλμός, διάρκειας 1, πλάτους 1 μετατοπισμένος κατά $-\frac{3}{2}$ και ανεστραμμένος. Επίσης ο $x_3(t)$ είναι

είναι τετραγωνικός παλμός, διάρκειας 1, πλάτους 1 και μετατοπισμένος επίσης κατά $\frac{3}{2}$. Τέλος το $x_2(t) = t$, για $-1 \leq t \leq 1$. Άρα από το ζεύγος: $y(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases} \xleftrightarrow{FT} y(\omega) = \dfrac{2sin(\omega T)}{\omega}$, την ιδιότητα της γραμμικότητας και την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης έχουμε:

$$X_1(\omega) = -e^{j\omega\frac{3}{2}}\frac{2\sin(\frac{\omega}{2})}{\omega}$$

και

$$X_3(\omega) = e^{-j\omega\frac{3}{2}}\frac{2\sin(\frac{\omega}{2})}{\omega}$$

και για το $x_2(t)$ από την εξίσωση της ανάλυσης έχουμε:

$$\begin{aligned}
X_2(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} te^{-j\omega t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{j\omega}\int_{-1}^{1} t\left(e^{-j\omega t}\right)'\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{j\omega}\left[\left(te^{-j\omega t}\right)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t\right] \\
&= -\frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega} + e^{j\omega} + \frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-1}^{1}\right] = -\frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega} + e^{j\omega} + \frac{1}{j\omega}e^{-j\omega} - \frac{1}{j\omega}e^{j\omega}\right] \\
&= -\frac{1}{j\omega}\left[2\frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2} - \frac{2}{\omega}\frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j}\right] = -\frac{1}{j\omega}\left(2\cos\omega - \frac{2}{\omega}\sin\omega\right)
\end{aligned}$$

Άρα για το $X(\omega)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= X_1(\omega) + X_2(\omega) + X_3(\omega) \\
\Rightarrow X(\omega) &= -e^{j\omega\frac{3}{2}}\frac{2\sin(\frac{\omega}{2})}{\omega} - \frac{1}{j\omega}\left(2\cos\omega - \frac{2}{\omega}\sin\omega\right) + e^{-j\omega\frac{3}{2}}\frac{2\sin(\frac{\omega}{2})}{\omega} \\
&= \frac{2\sin(\frac{\omega}{2})}{\omega}\left(e^{-j\omega\frac{3}{2}} - e^{j\omega\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{j\omega}\left(2\cos\omega - \frac{2}{\omega}\sin\omega\right) \\
&= \frac{2\sin(\frac{\omega}{2})}{\omega}(-2j)\frac{e^{j\omega/3} - e^{-j\omega/3}}{2j} - \frac{1}{j\omega}\left(2\cos\omega - \frac{2}{\omega}\sin\omega\right) \\
&= \frac{4\sin(\frac{\omega}{2})}{j\omega}\sin(3\omega/2) - \frac{2\cos\omega}{j\omega} + \frac{2\sin\omega}{j\omega^2} = \dots
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα: $\sin\theta\sin\phi = \frac{\cos(\theta-\phi)-\cos(\theta+\phi)}{2}$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\ldots &= \frac{4}{j\omega}\frac{\cos(\omega/2-3\omega/2)-\cos(\omega/2+3\omega/3)}{2} - \frac{2\cos\omega}{j\omega} + \frac{2\sin\omega}{j\omega^2} \\
&= \frac{2}{j\omega}[\cos(-\omega)-\cos(2\omega)] - \frac{2\cos\omega}{j\omega} + \frac{2\sin\omega}{j\omega^2} \\
&= \frac{2\cos(\omega)}{j\omega} - \frac{2\cos(2\omega)}{j\omega} - \frac{2\cos\omega}{j\omega} + \frac{2\sin\omega}{j\omega^2} \\
&= \frac{2j}{\omega}[\cos(2\omega) - \frac{\sin\omega}{\omega}]
\end{aligned}$$

(viii) Παρατηρώ ότι το σήμα $x(t)$ απαρτίζεται από παλμούς Dirac πλάτους 1 στα περιττά πολλαπλάσια της χρονικής μονάδας και από παλμούς Dirac πλάτους 2 στα άρτια πολλαπλάσια. Άρα αν εκφράσουμε ως:

$$x_o(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-2n)$$

ένα τρένο παλμών με περίοδο $T=2$ τότε το σήμα στο Σχήμα 2 μπορεί να γραφτεί ως:

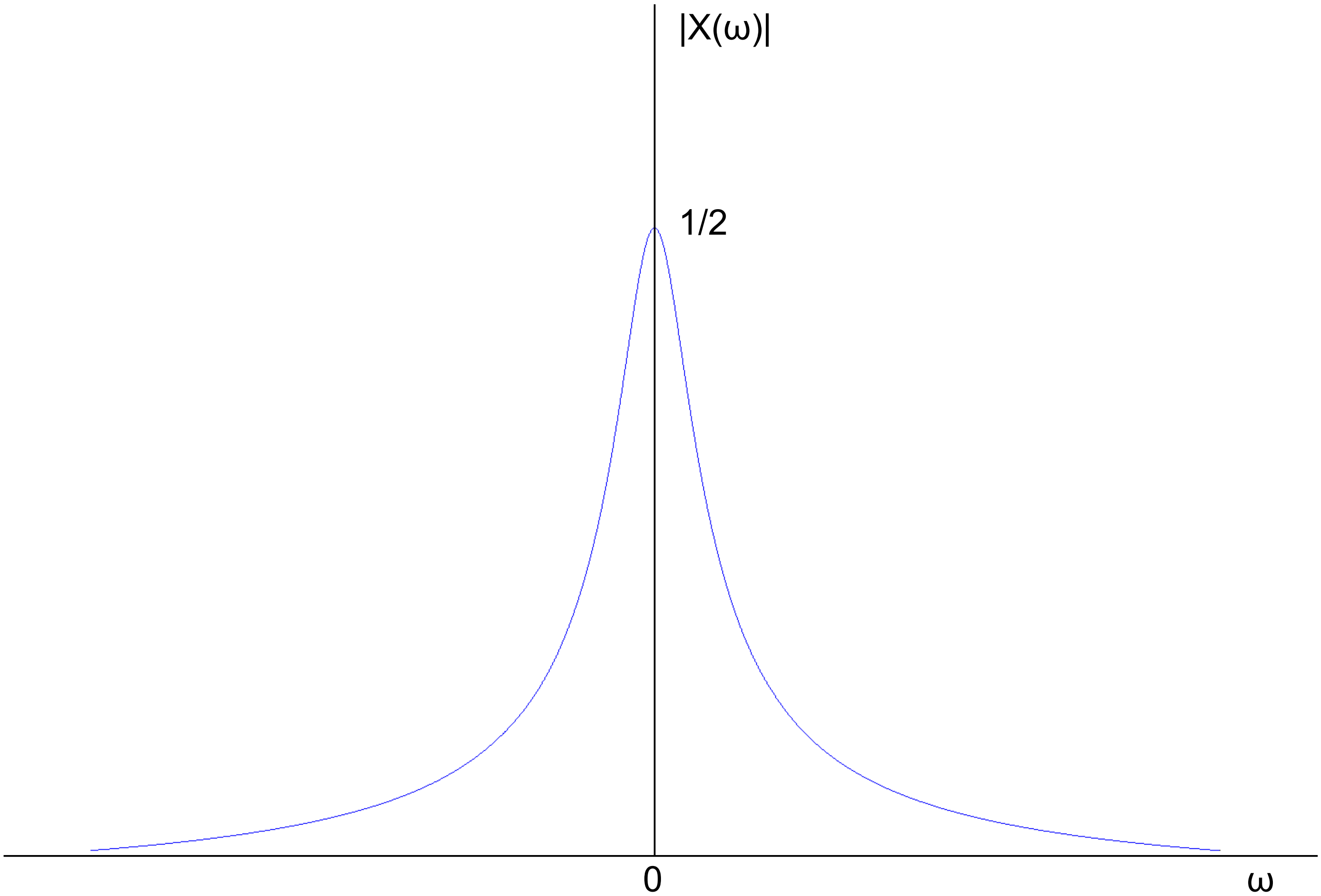
$$x(t) = 2x_o(t) + x_o(t-1)$$

Άρα χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της γραμμικότητας, την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης και το ζεύγος FT $x(t) = \sum_{n=\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \xleftrightarrow{FT} X(\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= 2\frac{2\pi}{2}\sum_{k=\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\frac{2\pi}{2}) + e^{-j\omega}\frac{2\pi}{2}\sum_{k=\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\frac{2\pi}{2}) \\
\Rightarrow X(\omega) &= \pi(2+e^{-j\omega})\sum_{k=\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\pi) \\
\Rightarrow X(\omega) &= \pi\sum_{k=\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\pi)(2+e^{-jk\pi}) \\
\Rightarrow X(\omega) &= \pi\sum_{k=\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\pi)(2+(-1)^k)
\end{aligned}$$

2. (i) Έχω $X(\omega) = \frac{e^{-j\omega}}{2+j\omega} \Rightarrow |X(\omega)| = \left|\frac{e^{-j\omega}}{2+j\omega}\right| = \frac{|e^{-j\omega}|}{|2+j\omega|} = \frac{1}{|2+j\omega|} = \frac{|2-j\omega|}{|4+\omega^2|} = \frac{\sqrt{4+\omega^2}}{4+\omega^2}$. Το πλάτος του μετασχηματισμού Fourier φαίνεται στο σχήμα 1.2.i

(ii) Έχω $X(\omega) = \frac{4e^{-j\omega}}{4+\omega^2} \Rightarrow |X(\omega)| = \left|\frac{4e^{-j\omega}}{4+\omega^2}\right| = \frac{4}{4+\omega^2}$. Το πλάτος του μετασχηματισμού Fourier

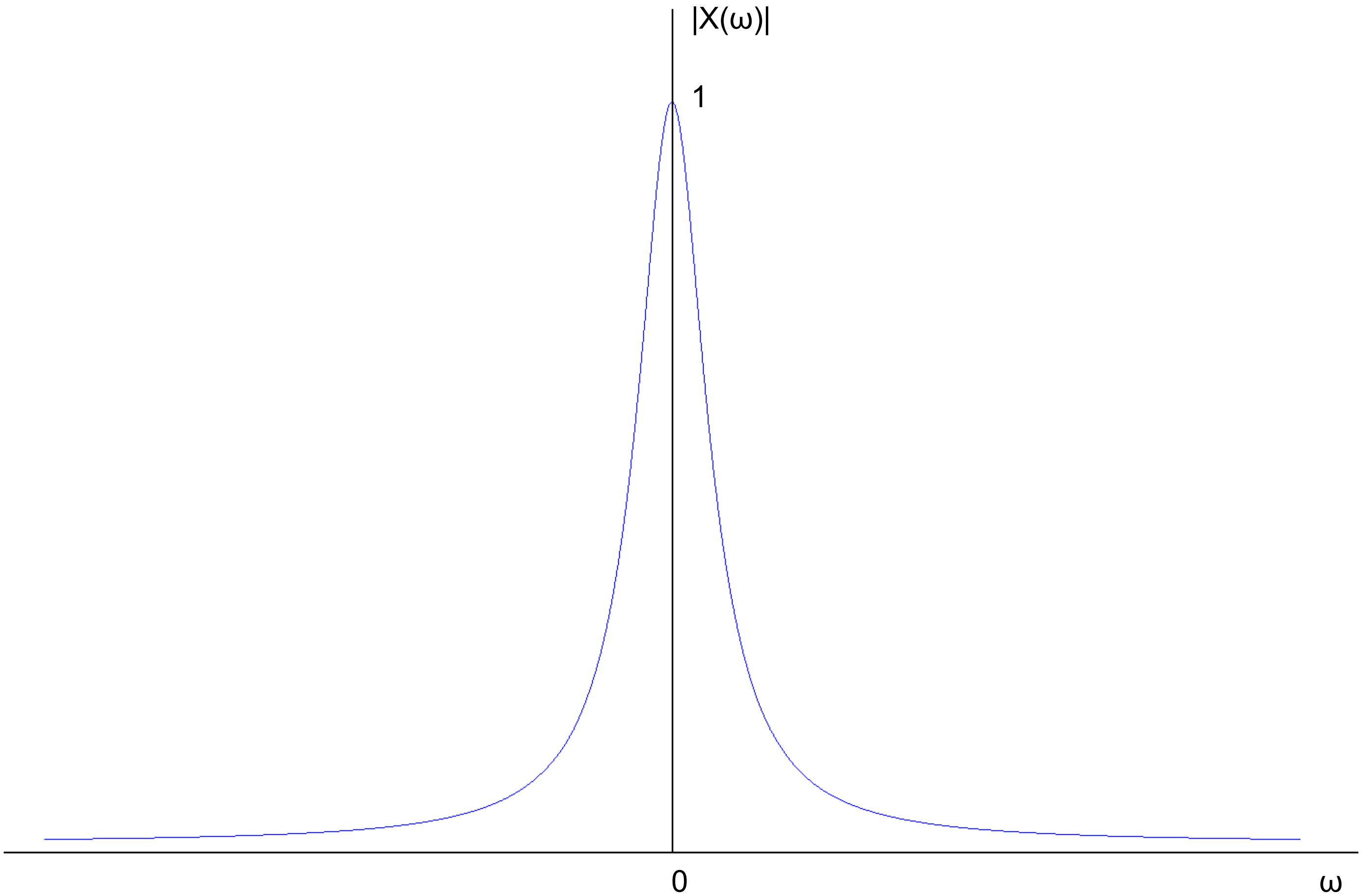


Σχήμα 1.2.i

φαίνεται στο σχήμα 1.2.ii

(iii) Έχω $X(\omega) = 2\cos\omega \Rightarrow |X(\omega)| = |2\cos\omega| = 2|\cos\omega|$. Το πλάτος του μετασχηματισμού Fourier φαίνεται στο σχήμα 1.2.iii

(iv) Έχω $X(\omega) = -2j\sin(2\omega) \Rightarrow |X(\omega)| = |-2j\sin(2\omega)| = 2|\sin(2\omega)|$ Το πλάτος του μετασχηματισμού Fourier φαίνεται στο σχήμα 1.2.iv



Σχήμα 1.2.ii

Άσκηση 2.

1. (α΄) Χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες της γραμμικότητας, της κλιμάκωσης και της χρονικής μετατόπισης, οπότε:

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(\omega)$$

$$x(-t) \xleftrightarrow{FT} X(-\omega)$$

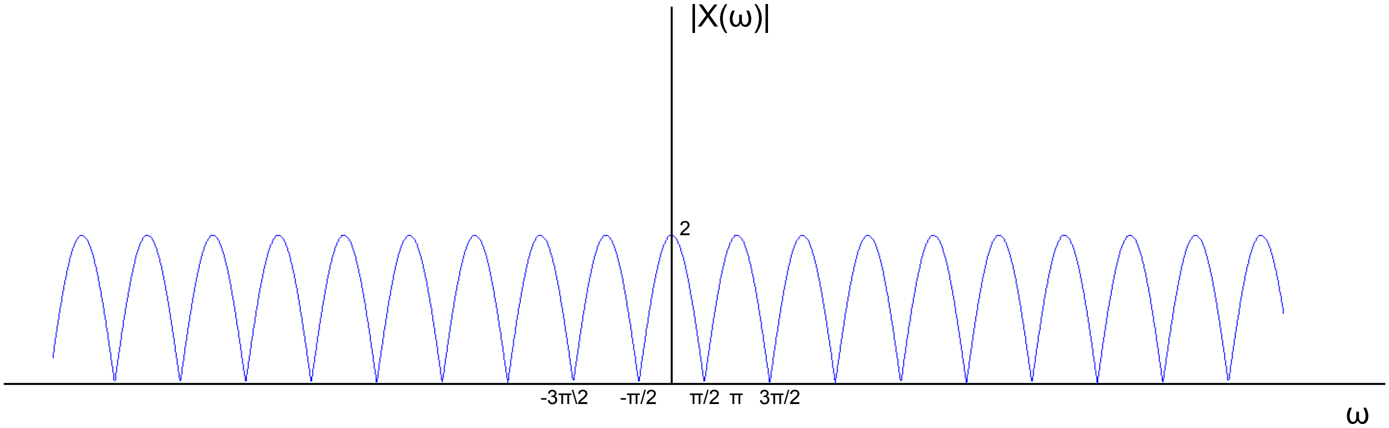
$$x(-t-1) \xleftrightarrow{FT} e^{-j(-\omega)(1)}X(-\omega)$$

$$x(1-t) \xleftrightarrow{FT} e^{-j(-\omega)(-1)}X(-\omega)$$

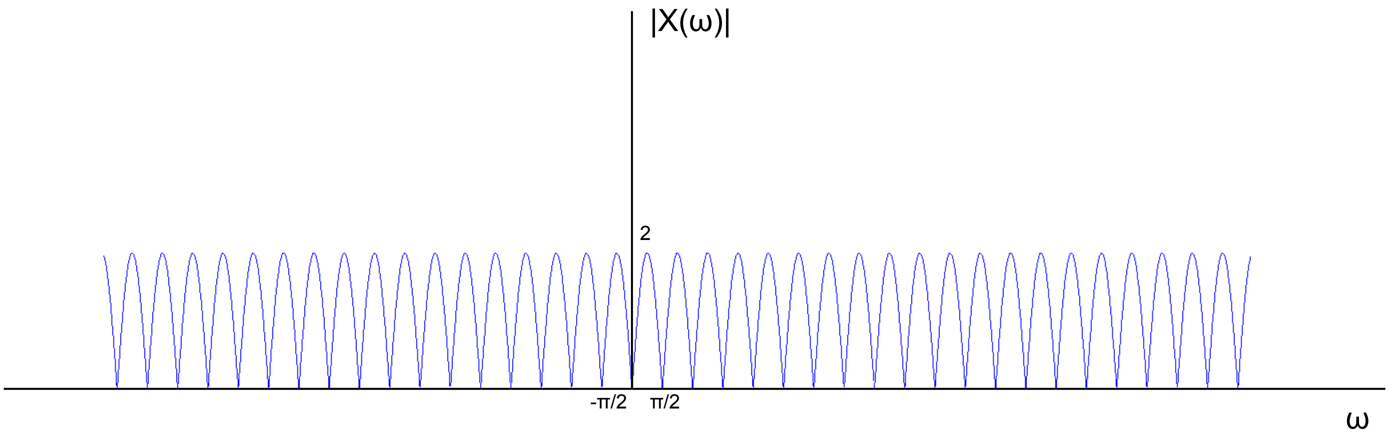
$$x_1(t) = x(1-t) + x(-1-t) \xleftrightarrow{FT} e^{-j(-\omega)(-1)}X(-\omega) + e^{-j(-\omega)(1)}X(-\omega)$$

$$x_1(t) \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega}X(-\omega) + e^{j\omega}X(-\omega) = X(-\omega)(e^{-j\omega} + e^{j\omega})$$

$$x_1(t) \xleftrightarrow{FT} X(-\omega)2\cos\omega$$



Σχήμα 1.2.iii



Σχήμα 1.2.iv

(β΄) Χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες της κλιμάκωσης και της χρονικής μετατόπισης, οπότε:

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(\omega)$$
$$x(3t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{3}X(\frac{\omega}{3})$$
$$x(3t-6) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{3}e^{-j\frac{\omega}{3}6}X(\frac{\omega}{3})$$
$$x(3t-6) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{3}e^{-j2\omega}X(\frac{\omega}{3})$$

(γ΄) Χρησιμοποιούμε ιδιότητες χρονικής μετατόπισης και παραγώγισης στο χρόνο, την οποία εκτελούμε 2 φορές, άρα

$$
\begin{aligned}
x(t) &\xleftrightarrow{FT} X(\omega) \\
x(t-1) &\xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega} X(\omega) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t-1) &\xleftrightarrow{FT} j\omega e^{-j\omega} X(\omega) \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} x(t-1) &\xleftrightarrow{FT} (j\omega)^2 e^{-j\omega} X(\omega) \\
x_3(t) &\xleftrightarrow{FT} -\omega^2 e^{-j\omega} X(\omega)
\end{aligned}
$$

2. (α') (i)$X_1(\omega) = u(\omega) - u(\omega - 2)$, άρα αφού ο FT δεν έχει συζυγή συμμετρία, δηλαδή $X_1^*(\omega) \neq X_1(-\omega)$, το $x_1(t)$ δεν είναι πραγματικό σήμα. Επίσης $X^*(\omega) \neq -X(-\omega)$, άρα το $x_1(t)$ δεν είναι ούτε φανταστικό σήμα. (ii) Το $X_1(\omega) = u(\omega) - u(\omega - 2)$ είναι μεν πραγματικό σήμα άλλα δεν είναι ούτε περιττό ούτε άρτιο, άρα το $x_1(t)$ δεν είναι ούτε περιττό, ούτε άρτιο.

(β') $X_2(\omega) = \cos(2\omega)\sin(\frac{\omega}{\pi})$. Παρατηρώ ότι το σήμα $X_2(\omega) = \cos(2\omega)\sin(\frac{\omega}{\pi})$ είναι πραγματικό και περιττό σήμα (για να το δείξετε βρείτε τι συμμετρία έχει το $\cos(2\omega)$, τι συμμετρία έχει το $\sin(\frac{\omega}{\pi})$ και συνεπώς τι συμμετρία θα έχει το γινόμενό τους). Ξέρω ότι αν το σήμα στο πεδίο του χρόνου είναι πραγματικό και περιττό, τότε στο πεδίο των συχνοτήτων θα είναι φανταστικό και περιττό. Άρα έξαγω το συμπέρασμα ότι αν το σήμα στο πεδίο του χρόνου είναι φανταστικό και περιττό, τότε στο πεδίο των συχνοτήτων θα είναι πραγματικό και περιττό (μπορείτε να το αποδείξετε;). Άρα το $x_2(t)$ είναι φανταστικό και περιττό σήμα.

(γ') $X_3(\omega) = A(\omega)e^{jB(\omega)}$ όπου $A(\omega) = \frac{\sin 2\omega}{\omega}$ και $B(\omega) = 2\omega + \frac{\pi}{2}$, οπότε:
$X_3(\omega) = \dfrac{\sin 2\omega}{\omega} e^{j(2\omega + \frac{\pi}{2})} = \dfrac{\sin 2\omega}{\omega} e^{j2\omega} e^{\frac{\pi}{2}}$
Έστω το ζεύγος $y_3(t) \xleftrightarrow{FT} Y_3(\omega)$, όπου $Y_3(t) = \frac{\sin 2\omega}{\omega} e^{j2\omega}$. Από το $Y_3(t) = \frac{\sin 2\omega}{\omega} e^{j2\omega} = \frac{\sin(2\omega)\cos(2\omega)}{\omega} + j\frac{\sin(2\omega)\sin(2\omega)}{\omega}$ εξάγω το συμπέρασμα ότι το $y_3(t)$ είναι πραγματικό σήμα (δείχνω ότι $Y^*(\omega) = Y(-\omega)$). Άρα από ιδιότητα γραμμικότητας:

$$
\begin{aligned}
y_3(t) &\xleftrightarrow{FT} Y_3(\omega) \\
jy_3(t) &\xleftrightarrow{FT} jY_3(\omega)
\end{aligned}
$$

Αλλά το $jY_3(\omega) = e^{j\frac{\pi}{2}} Y_3(\omega) = X_3(\omega)$. Άρα έχω βρεί το ζεύγος:

$$
x_3(t) = jy_3(t) \xleftrightarrow{FT} jY_3(\omega) = X_3(\omega)
$$

Συνεπώς επειδή το $y_3(t)$ είναι πραγματικό, το $jy_3(t)$ είναι φανταστικό, άρα το $x_3(t)$ είναι φανταστικό.

Επείδη το $X_3(\omega)$ είναι μιγαδικό σήμα (ούτε πραγματικό, ούτε φανταστικό), το $x_3(t)$ δεν είναι ούτε περιττό, ούτε άρτιο.

(δ') $X_4(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} \delta(\omega - \frac{k\pi}{4})$. Το $X_4(t)$ είναι πραγματικό και άρτιο σήμα (γιατί είναι τρένο παλμών που το πλάτος τους καθορίζεται από το $|k|$ που εξασφαλίζει άρτια συμμετρία), άρα το $x_4(t)$ είναι πραγματικό και άρτιο σήμα επίσης.

Άσκηση 3.

1. Γνωρίζουμε το ζεύγος μετασχηματισμού Fourier

$$x(t) = \frac{1}{\pi t}\sin(Wt) \xleftrightarrow{FT} X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

Για ευκολία στην ανάγνωση θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $\mathrm{rect}(\frac{t}{\Delta}) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \Delta/2 \\ 0, & |t| > \Delta/2 \end{cases}$. Δηλαδή το $\mathrm{rect}(t/\Delta)$ είναι τετραγωνικός παλμός διάρκειας Δ με κέντρο το 0 (σημ. το $\mathrm{rect}((t-C)/\Delta)$ είναι τετραγωνικός παλμός διάρκειας Δ με κέντρο το C) Άρα από το ώς άνω ζεύγος και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του πολλαπλάσιασμού στο πεδίο του χρόνου, έχουμε:

$$\frac{1}{\pi t}\sin(t) \xleftrightarrow{FT} \mathrm{rect}(\omega/2)$$
$$\left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^2 = \left(\frac{1}{\pi t}\sin(t)\right)\left(\frac{1}{\pi t}\sin(t)\right) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2\pi}\mathrm{rect}(\omega/2) * \mathrm{rect}(\omega/2)$$

Η συνέλιξη 2 τετραγωνικών παλμών διάρκειας 2 με κέντρο το 0 είναι ένας τριγωνικός παλμός διάρκειας 4 με κέντρο το 0 και ύψους 2. Δίνεται ο συμβολισμός: $\mathrm{tri}(\frac{t}{\Delta}) = \begin{cases} 1 - |t|/\Delta, & |t| \leq \Delta \\ 0, & |t| > \Delta \end{cases}$ Άρα:

$$\left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^2 \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2\pi} 2\mathrm{tri}(\omega/2)$$

Συνεχίζουμε χρησιμοποιώντας την ιδιότητα παραγώγισης στο πεδίο των συχνοτήτων:

$$-jtx(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}X(\omega)$$
$$tx(t) \xleftrightarrow{FT} j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}X(\omega)$$

Άρα:

$$t\left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^2 \xleftrightarrow{FT} j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\frac{1}{\pi}\mathrm{tri}(\omega/2)$$

$$t\left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^2 \xleftrightarrow{FT} \begin{array}{ll} \dfrac{j}{2\pi}, & -2 \le t \le 0 \\ -\dfrac{j}{2\pi}, & 0 \le t \le 2 \\ 0, & |t| > 2 \end{array}$$

2.
$$A = \int_{-\infty}^{\infty} t^2\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^4 \mathrm{d}t = \int\limits_{-2}^{0}\left|\frac{j}{2\pi}\right|^2 \mathrm{d}\omega + \int\limits_{0}^{2}\left|-\frac{j}{2\pi}\right|^2 \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi^3}$$

Άσκηση 4.

(i) Χρησιμοποιώ την ιδιότητα της παραγώγισης στο πεδίο της συχνότητας και έχω:

$$-jte^{-|t|} \xleftrightarrow{FT} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)$$
$$te^{-|t|} \xleftrightarrow{FT} j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)$$
$$te^{-|t|} \xleftrightarrow{FT} -j\frac{4\omega}{(1+\omega^2)^2}$$

(ii) Η ιδιότητα της δυικότητας ορίζει ότι:

αν

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(\omega)$$

τότε

$$X(t) \xleftrightarrow{FT} 2\pi x(-\omega)$$

Άρα από το ερώτημα (i) με $X(\omega) = -j\dfrac{4\omega}{(1+\omega^2)^2}$ και βάζοντας όπου ω το t, έχω:

$$\begin{aligned} X(t) = -j\frac{4t}{(1+t^2)^2} &\xleftrightarrow{FT} 2\pi x(-\omega) = 2\pi(-\omega)e^{-|-\omega|} \\ -j\frac{4t}{(1+t^2)^2} &\xleftrightarrow{FT} -2\pi\omega e^{-|\omega|} \\ \frac{4t}{(1+t^2)^2} &\xleftrightarrow{FT} -j2\pi\omega e^{-|\omega|} \end{aligned}$$

Άσκηση 5.

Γνωρίζουμε ότι:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \Rightarrow X(\omega) = \frac{Y(\omega)}{H(\omega)}$$

Γνωρίζουμε το $H(\omega)$. Άρα μένει να βρούμε το $Y(\omega)$. Οπότε χρησιμοποιώντας το ζεύγος $e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{FT} \dfrac{1}{a+j\omega}$ έχουμε:

$$y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t) \Rightarrow Y(\omega) = \frac{1}{3+j\omega} - \frac{1}{4+j\omega}$$

Οπότε:

$$X(\omega) = \frac{\frac{1}{3+j\omega} - \frac{1}{4+j\omega}}{\frac{1}{3+j\omega}} \Rightarrow X(\omega) = \frac{1}{4+j\omega}$$

Χρησιμοποιώντας το ίδιο ζεύγος FT με πρίν έχουμε τελικά:

$$x(t) = e^{-4t}u(t)$$

Άσκηση 6.

(i) Παρατηρώ ότι αν μετατοπίσω το $x(t)$ κατά 1 προς τα αριστερά, παίρνω το $y(t) = x(t+1)$, που είναι ένα άρτιο και πραγματικό σήμα. Άρα ξέρω ότι το $Y(\omega)$ θα είναι ένα άρτιο και πραγματικό σήμα. Άλλα αν $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(\omega)$, τότε από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης έχω: $y(t) = x(t+1) \xleftrightarrow{FT} Y(\omega) = e^{j\omega}X(\omega)$. Επειδη το $Y(\omega)$ είναι πραγματικό:

$$\arg\{Y(\omega)\} = 0 \Rightarrow \arg\{e^{j\omega}X(\omega)\} = 0 \Rightarrow \arg\{e^{j\omega}\}+\arg\{\mathrm{X}(\omega)\} = 0 \Rightarrow \omega+\arg\{\mathrm{X}(\omega)\} = 0 \Rightarrow \arg\{\mathrm{X}(\omega)\} = -\omega$$

(ii) Από εξίσωση ανάλυσης:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t \xRightarrow{\omega=0} X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{d}t$$

και από τη γραφική παράσταση του $x(t)$:

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{d}t = X(0) = \int_{-1}^{3} x(t)\mathrm{d}t = 7$$

Παρατήρηση: δεν είναι ανάγκη να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αναλυτικά γιατί αυτό ισούται με το εμβαδόν μεταξύ της γραφικής παράστασης του $x(t)$ και του άξονα t.

(iii) Από την εξίσωση της σύνθεσης έχω:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega \xRightarrow{t=0} x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\mathrm{d}\omega \Rightarrow 2\pi x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\mathrm{d}\omega \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\mathrm{d}\omega = 4\pi$$

(iv) Έστω $H(\omega) = \dfrac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της μετατόπισης στο χρόνο και το ζεύγος μετασχηματισμού Fourier:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases} \xLeftrightarrow{FT} X(\omega) = \frac{2sin(\omega T)}{\omega}$$

βρίσκω $h(t) = \begin{cases} 1, & -3 \leq t \leq -1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$, δηλαδή το $h(t)$ είναι ένας τετραγωνικός πλαμός μετατοπισμένος κατά 2 προς τα αριστερά. Αν $y(t) = x(t) * h(t)$, τότε $Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$ και χρησιμοποιώντας την εξίσωση της σύνθεσης έχουμε:

$$
\begin{aligned}
& y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega \\
\xRightarrow{Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)}\ & y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)H(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega \\
\xRightarrow{H(\omega)=\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}}\ & y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega \\
\xRightarrow{t=0}\ & y(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}\mathrm{d}\omega \\
\Rightarrow\ & \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}\mathrm{d}\omega = 2\pi y(0) \\
\xRightarrow{y(t)=x(t)*h(t)}\ & \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}\mathrm{d}\omega = 2\pi\left[x(t)*h(t)\right]\Big|_{t=0} \\
\xRightarrow{[x(t)*h(t)]|_{t=0}=3.5}\ & \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}\mathrm{d}\omega = 7\pi
\end{aligned}
$$

(v) Από τη σχέση του Parseval έχουμε:

$$
\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2\mathrm{d}t
$$

$$
\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2\mathrm{d}t = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\mathrm{d}t = 2\pi\left(\int_{-1}^{0}4\mathrm{d}t + \int_{0}^{1}|2-t|^2\mathrm{d}t + \int_{1}^{2}|t|^2\mathrm{d}t + \int_{2}^{3}4\mathrm{d}t\right) = 16\pi
$$

(vi) Γνωρίζουμε ότι κάθε πραγματικό σήμα μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα ενός άρτιου σήματος και ενός περιττού σήματος. Άρα αν $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$, όπου $x_e(t)$ είναι ένα πραγματικό και άρτιο σήμα και $x_o(t)$ είναι ένα πραγματικό και περιττό σήμα, τότε εφαρμόζοντας ιδιότητα γραμμικότητας, έχουμε:

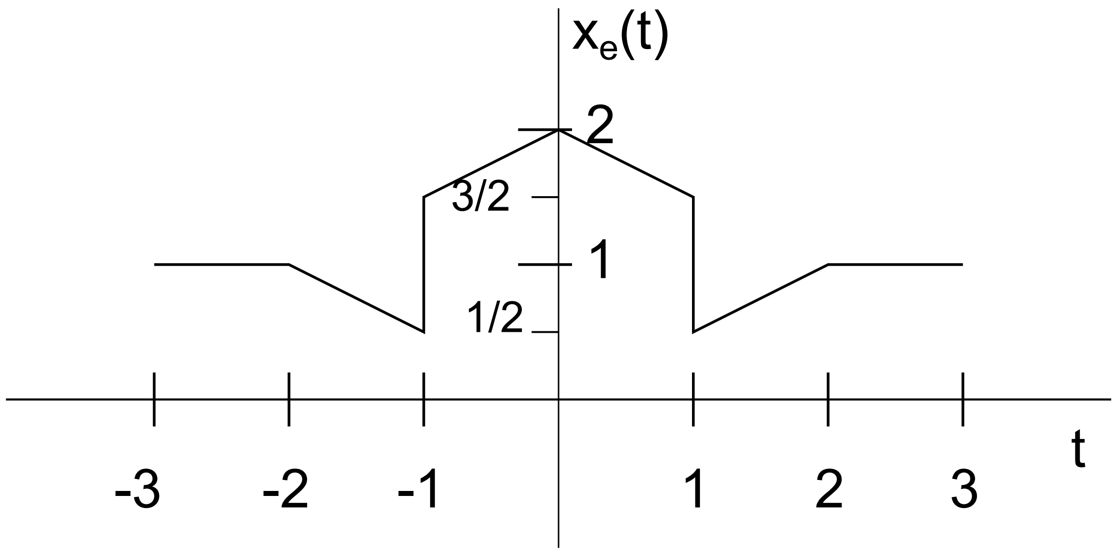
$$
x(t) = x_e(t) + x_o(t)
$$

$$
X(\omega) = X_e(\omega) + X_o(\omega)
$$

Ο μετασχηματισμός $X_e(\omega)$ θα είναι συνεπώς ένα πραγματικό σήμα και ο μετασχηματισμός $X_o(\omega)$ θα είναι ένα φανταστικό σήμα. Άρα αν γράψω το $X(\omega)$ στην καρτεσιανή του μορφή, δηλαδή $X(\omega) = Re\{X(\omega)\} + jIm\{X(\omega)\}$, τότε με σύγκριση των δύο εκφράσεων καταλήγω σε: $Re\{X(\omega)\} = X_e(\omega)$, συνεπώς έχω το ζεύγος μετασχηματισμού FT:

$$
x_e(t) \xleftrightarrow{FT} Re\{X(\omega)\}
$$

Το $x_e(t)$ ισούται με $\frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]$. Άρα το ζητούμενο φαίνεται στο Σχήμα (6.iv) που ακολουθεί.



Σχήμα 6.iv

Παρατήρηση: Αν $x(t)$ κάποιο πραγματικό σήμα, τότε $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$, όπου $x_e(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]$ και προφανώς είναι άρτιο σήμα και $x_o(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]$ το οποίο είναι περιττό σήμα.

Άσκηση 7.

1.

(i) Βρίσκουμε το μετασχηματισμό Fourier της διαφορικής εξίσωσης, στη συνέχεια βρίσκουμε την απόκριση συχνότητας του συστήματος και εφαρμόζοντας αντίστροφο FT βρίσκουμε την κρουστική απόκριση που ζητείται:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + 6\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 8y(t) &= 2x(t) \\
\Rightarrow (j\omega)^2 Y(\omega) + 6(j\omega)Y(\omega) + 8Y(\omega) &= 2X(\omega) \\
\Rightarrow \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} &= \frac{2}{(j\omega)^2 + 6j\omega + 8} \\
\Rightarrow H(\omega) &= \frac{2}{(j\omega)^2 + 6j\omega + 8}
\end{aligned}$$

Προχωράμε με ανάλυση σε μερικά κλάσματα, οπότε:

$$
\begin{aligned}
H(\omega) &= \frac{2}{(j\omega)^2 + 6j\omega + 8} \\
\Rightarrow H(\omega) = \frac{2}{(j\omega+4)(j\omega+2)} &= \frac{A}{(j\omega+4)} + \frac{B}{(j\omega+2)} \\
&\Rightarrow A = -1 \qquad B = 1 \\
&\Rightarrow H(\omega) = -\frac{1}{(j\omega+4)} + \frac{1}{(j\omega+2)} \\
&\Rightarrow h(t) = -e^{-4t}u(t) + e^{-2t}u(t)
\end{aligned}
$$

(ii) Βρίσκουμε τον FT της εισόδου, οπότε:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= te^{-2t}u(t) \\
X(\omega) &= \frac{1}{(2+j\omega)^2}
\end{aligned}
$$

Οπότε η απόκριση του συστήματος στο πεδίο των συχνοτήτων είναι:

$$
\begin{aligned}
Y(\omega) &= X(\omega)H(\omega) \\
\Rightarrow Y(\omega) &= \frac{1}{(2+j\omega)^2}\frac{2}{(j\omega+4)(j\omega+2)} \\
\Rightarrow Y(\omega) &= \frac{1}{(j\omega+4)(2+j\omega)^3}
\end{aligned}
$$

και με ανάλυση σε μερικά κλάσματα:

$$
\begin{aligned}
Y(\omega) = \frac{1}{(j\omega+4)(2+j\omega)^3} &= \frac{A}{(j\omega+4)} + \frac{B}{2+j\omega} + \frac{C}{(2+j\omega)^2} + \frac{D}{(2+j\omega)^3} \\
&\Rightarrow A = -\frac{1}{4} \qquad B = \frac{1}{4} \qquad C = -\frac{1}{2} \qquad D = 1 \\
&\Rightarrow Y(\omega) = -\frac{1/4}{j\omega+4} + \frac{1/4}{2+j\omega} - \frac{1/2}{(2+j\omega)^2} + \frac{1}{(2+j\omega)^3}
\end{aligned}
$$

οπότε:

$$
y(t) = -\frac{1}{4}e^{-4t}u(t) + \frac{1}{4}e^{-2t}u(t) - \frac{1}{2}te^{-2t}u(t) + \frac{1}{2}t^2e^{-2t}u(t)
$$

Παρατήρηση:Για τον τελευταίο όρο του παραπάνω αθροίσματος εφαρμόζω την ιδιότητα της παραγώγισης στο πεδίο της συχνότητας στο γνωστό ζεύγος $x(t) = te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{FT} X(\omega) = \dfrac{1}{(a+j\omega)^2}$

(iii) Όπως και για το ερώτημα 1i:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + \sqrt{2}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + y(t) &= 2\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} - 2x(t) \\
\Rightarrow (j\omega)^2 Y(\omega) + \sqrt{2}(j\omega)Y(\omega) + Y(\omega) &= 2(j\omega)^2 X(\omega) - 2X(\omega) \\
\Rightarrow \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} &= \frac{2(j\omega)^2 - 2}{(j\omega)^2 + \sqrt{2}j\omega + 1} \\
\Rightarrow H(\omega) &= \frac{2(j\omega)^2 - 2}{(j\omega)^2 + \sqrt{2}j\omega + 1}
\end{aligned}
$$

Προχωράμε με ανάλυση σε μερικά κλάσματα, παρατηρώντας ότι αριθμητής και παρονομαστής είναι του ιδίου βαθμού οπότε:

$$
\begin{aligned}
H(\omega) &= \frac{2(j\omega)^2 - 2}{(j\omega)^2 + \sqrt{2}j\omega + 1} \\
\Rightarrow H(\omega) &= \frac{2(j\omega)^2 - 2 + 2\sqrt{2}j\omega - 2\sqrt{2}j\omega + 2 - 2}{(j\omega)^2 + \sqrt{2}j\omega + 1} \\
\Rightarrow H(\omega) &= 2\frac{(j\omega)^2 + \sqrt{2}j\omega + 1}{(j\omega)^2 + \sqrt{2}j\omega + 1} + \frac{-2\sqrt{2}j\omega - 4}{(j\omega)^2 + \sqrt{2}j\omega + 1} \\
\Rightarrow H(\omega) &= 2 + \frac{-2\sqrt{2}j\omega - 4}{(j\omega)^2 + \sqrt{2}j\omega + 1} \\
\Rightarrow H(\omega) &= 2 + \frac{-2\sqrt{2}j\omega - 4}{(j\omega - \frac{-\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{2})(j\omega - \frac{-\sqrt{2}-j\sqrt{2}}{2})} \\
\Rightarrow H(\omega) &= 2 + \frac{A+Bj}{j\omega - \frac{-\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{2}} + \frac{A-Bj}{j\omega - \frac{-\sqrt{2}-j\sqrt{2}}{2}} \\
&\Rightarrow A = -\sqrt{2} \qquad B = \sqrt{2} \\
\Rightarrow H(\omega) &= 2 + \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}j}{j\omega - \frac{-\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{2}} + \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}j}{j\omega - \frac{-\sqrt{2}-j\sqrt{2}}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow H(\omega) = 2 - \sqrt{2}\frac{1}{j\omega + \frac{\sqrt{2}-j\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{2}j\frac{1}{j\omega + \frac{\sqrt{2}-j\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{2}\frac{1}{j\omega + \frac{\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{2}j\frac{1}{j\omega + \frac{\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{2}}
$$

$$
\Rightarrow h(t) = 2\delta(t) - \sqrt{2}e^{-\frac{(\sqrt{2}-j\sqrt{2})t}{2}}u(t) + \sqrt{2}je^{-\frac{(\sqrt{2}-j\sqrt{2})t}{2}}u(t) - \sqrt{2}e^{-\frac{(\sqrt{2}+j\sqrt{2})t}{2}}u(t) - \sqrt{2}je^{-\frac{(\sqrt{2}+j\sqrt{2})t}{2}}u(t)
$$

2. (i) Από τα δεδομένα:

$$\begin{aligned}
H(\omega) &= \frac{j\omega + 4}{6 - \omega^2 + 5j\omega} \\
\Rightarrow \frac{Y(\omega}{X(\omega)} &= \frac{j\omega + 4}{6 - \omega^2 + 5j\omega} \\
\Rightarrow Y(\omega)\left[6 - \omega^2 + 5j\omega\right] &= X(\omega)\left[j\omega + 4\right] \\
6Y(\omega) + (j\omega)^2 Y(\omega) + 5j\omega Y(\omega) &= j\omega X(\omega) + 4X(\omega) \\
\xRightarrow{IFT} 6y(t) + \frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + 5\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + 4x(t) \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + 5\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 6y(t) &= \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + 4x(t)
\end{aligned}$$

(ii) Από τα δεδομένα και εφαρμόζοντας ανάλυση σε μερικά κλάσματα και αντίστροφο μετασχηματισμό FT, έχουμε:

$$\begin{aligned}
H(\omega) &= \frac{j\omega + 4}{6 - \omega^2 + 5j\omega} \\
\Rightarrow H(\omega) &= \frac{j\omega + 4}{6 + (j\omega)^2 + 5j\omega} \\
\Rightarrow H(\omega) &= \frac{j\omega + 4}{(j\omega + 2)(j\omega + 3)} \\
\Rightarrow A = 2 \qquad B &= -1 \\
\Rightarrow H(\omega) &= \frac{2}{j\omega + 2} - \frac{1}{j\omega + 3} \\
\Rightarrow h(t) &= 2e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t)
\end{aligned}$$

(iii) Ξεκινώντας από το πεδίο των συχνοτήτων, έχουμε:

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{-4t}u(t) - te^{-4t}u(t) \\
X(\omega) &= \frac{1}{j\omega + 4} - \frac{1}{(j\omega + 4)^2}
\end{aligned}$$

Άρα :

$$
\begin{aligned}
Y(\omega) &= X(\omega)H(\omega) \\
\Rightarrow Y(\omega) &= \left(\frac{1}{j\omega+4} - \frac{1}{(j\omega+4)^2}\right)\left(\frac{j\omega+4}{(j\omega+2)(j\omega+3)}\right) \\
\Rightarrow Y(\omega) &= \frac{(j\omega+3)(j\omega+4)}{(j\omega+4)^2(j\omega+3)(j\omega+2)} \\
\Rightarrow Y(\omega) &= \frac{1}{(j\omega+4)(j\omega+2)} = \frac{A}{(j\omega+4)} + \frac{B}{(j\omega+2)} \\
\Rightarrow A &= -\frac{1}{2} \qquad B = \frac{1}{2} \\
\Rightarrow Y(\omega) &= -\frac{1}{2}\frac{1}{j\omega+4} + \frac{1}{2}\frac{1}{j\omega+2} \\
\Rightarrow y(t) &= -\frac{1}{2}e^{-4t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-2t}u(t)
\end{aligned}
$$