Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Διδάσκων: Α. Μουχτάρης

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς - Λύσεις 2ης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

1. Το δεδομένο σήμα είναι:

$$\begin{aligned}\mathrm{x}(t) =& 2 + \frac{1}{2}e^{\jmath\frac{2\pi}{3}t} + \frac{1}{2}e^{-\jmath\frac{2\pi}{3}t} - 2\jmath e^{\jmath\frac{5\pi}{3}t} + 2\jmath e^{-\jmath\frac{5\pi}{3}t} \\ =& 2 + \frac{1}{2}e^{\jmath\frac{2\pi}{6}t} + \frac{1}{2}e^{-\jmath\frac{2\pi}{6}t} - 2\jmath e^{\jmath 5\frac{2\pi}{6}t} + 2\jmath e^{-\jmath 5\frac{2\pi}{6}t}\end{aligned}$$

Από αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η βασική συχνότητα του $\mathrm{x}(t)$ είναι $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Οι μη-μηδενικοί συντελεστές της σειράς Fourier του; $\mathrm{x}(t)$ είναι:

$$a_0 = 2, \quad a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}, \quad a_5 = a_{-5}^* = -2\jmath$$

2.

Αφού το $f_0 = \frac{1}{2}$ τοτε $T_0 = \frac{1}{f_0} = 2$

Άρα

$$\begin{aligned}\mathrm{X}(0) =& \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \mathrm{x}(t)\ \mathrm{d}t \\ =& \frac{1}{2}\int_0^1 1.5\ \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_1^2 -1.5\ \mathrm{d}t \\ =& \frac{1}{2}\int_0^1 1.5\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_1^2 1.5\ \mathrm{d}t \\ =& 0\end{aligned}$$

και

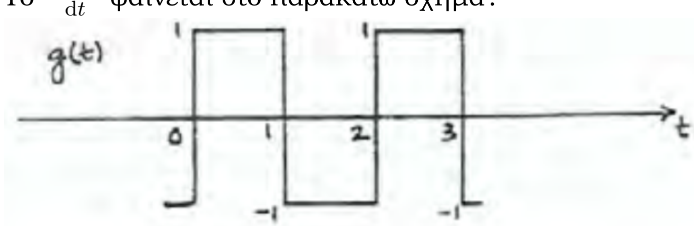
$$
\begin{aligned}
\mathrm{X}(\kappa) =& \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \mathrm{x}(t)\, e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0 t}\,\mathrm{d}t \\
=& \frac{1}{2}\int_0^1 1.5 e^{-\jmath\pi\kappa t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_1^2 1.5 e^{-\jmath\pi\kappa t}\,\mathrm{d}t \\
=& -\frac{1.5}{2\jmath\pi\kappa}\, e^{-\jmath\pi\kappa t}\Big|_0^1 + \frac{1.5}{2\jmath\pi\kappa}\, e^{-\jmath\pi\kappa t}\Big|_1^2 \\
=& -\frac{1.5}{2\jmath\pi\kappa}(e^{-\jmath\pi\kappa} - 1) + \frac{1.5}{2\jmath\pi\kappa}(e^{-\jmath 2\pi\kappa} - e^{-\jmath\pi\kappa}) \\
=& -\frac{3}{4\jmath\pi\kappa}(e^{-\jmath\pi\kappa} - 1 - e^{-\jmath 2\pi\kappa} + e^{-\jmath\pi\kappa}) \\
=& -\frac{3}{4\jmath\pi\kappa}(2e^{-\jmath\pi\kappa} - 2) \\
=& \frac{3}{2\jmath\pi\kappa}(1 - e^{-\jmath\pi\kappa})
\end{aligned}
$$

Άσκηση 2.

(i)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{X}(0) =& \frac{1}{2}\int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_1^2 (2-t)\,\mathrm{d}t \\
=& \frac{1}{2}\,\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\left(2t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^2 \\
=& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 0\right) + \frac{1}{2}\left(4 - 2 - 2 + \frac{1}{2}\right) \\
=& \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\
=& \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

(ii) Το $\frac{\mathrm{dx}(t)}{\mathrm{d}t}$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Άρα οι συντελεστές Fourier του $\mathrm{g}(t) = \frac{\mathrm{dx}(t)}{\mathrm{d}t}$ είναι

$$
\mathrm{Y}(0) = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_1^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2} - 0 - 1 + \frac{1}{2} = 0
$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Y}(\kappa) =& \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0 t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_1^2 e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0 t}\,\mathrm{d}t \\
=& -\frac{1}{2\jmath\pi\kappa}\,e^{-\jmath\pi\kappa}\Big|_0^1 + \frac{1}{2\jmath\pi\kappa}\,e^{-\jmath\pi\kappa t}\Big|_1^2 \\
=& -\frac{1}{2\jmath\pi\kappa}(e^{-\jmath\pi\kappa}-1) + \frac{1}{2\jmath\pi\kappa}(e^{-\jmath 2\pi\kappa}-e^{-\jmath\pi\kappa}) \\
=& -\frac{1}{2\jmath\pi\kappa}(e^{-\jmath\pi\kappa}-1-e^{-\jmath 2\pi\kappa}+e^{-\jmath\pi\kappa}) \\
=& -\frac{1}{\jmath\pi\kappa}(e^{-\jmath\pi\kappa}-1) \\
=& \frac{1}{\jmath\pi\kappa}(1-e^{-\jmath\pi\kappa})
\end{aligned}$$

(iii)

Από τις ιδιότητες των σειρών Fourier γνωρίζουμε ότι

$$\mathrm{g}(t) = \frac{\mathrm{dx}(t)}{\mathrm{d}t} \overset{\mathrm{FS}}{\leftrightarrow} \mathrm{Y}(\kappa) = \jmath\kappa\pi\mathrm{X}(\kappa)$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}(\kappa) =& \frac{1}{\jmath\pi\kappa}\mathrm{Y}(\kappa) \\
=& \frac{1}{\jmath\pi\kappa}\frac{1}{\jmath\pi\kappa}(1-e^{-\jmath\pi\kappa}) \\
=& -\frac{1}{\kappa^2\pi^2}(1-e^{-\jmath\pi\kappa})
\end{aligned}$$

Άσκηση 3.

(i)

Το $\mathrm{x}(t) = \begin{cases} t+2, & -2 < t \le -1 \\ 1, & -1 < t \le 1 \\ 2-t, & 1 < t < 2 \end{cases}$

Επίσης βλέπουμε ότι $T_0 = 6$, άρα

$$
\begin{aligned}
\mathrm{X}(0) =& \frac{1}{6}\left[\int_{-2}^{-1}(t+2)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1}\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{2}(2-t)\,\mathrm{d}t\right] \\
=& \ \frac{1}{6}\left(\frac{t^2}{2}+2t\right)\Bigg|_{-2}^{-1} + \frac{1}{6}t\Bigg|_{-1}^{1} + \frac{1}{6}\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{1}^{2} \\
=& \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}-2-2+4\right) + \frac{1}{6}(1+1) + \frac{1}{6}\left(4-2-2+\frac{1}{2}\right) \\
=& \frac{1}{12}+\frac{2}{6}+\frac{1}{12} \\
=& \frac{6}{12} \\
=& \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{X}(\kappa) = \frac{1}{6}\int_{-2}^{-1}(t+2)e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0 t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{6}\int_{-1}^{1}e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0 t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{6}\int_{1}^{2}(2-t)e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0 t}\,\mathrm{d}t
$$

Υπολογίζουμε κάθε ένα από τα ολοκληρώματα ξεχωριστά

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{T_0}\int_{-2}^{-1}(t+2)e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0 t}\,\mathrm{d}t \\
=& \frac{1}{T_0}\int_{-2}^{-1}te^{-\jmath 2\pi\kappa f_0 t}\,\mathrm{d}t + \frac{2}{T_0}\int_{-2}^{-1}e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0 t}\,\mathrm{d}t \\
=& \frac{1}{T_0}\frac{e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0 t}}{-\jmath 2\pi\kappa f_0}\left(t-\frac{1}{-\jmath 2\pi\kappa f_0}\right)\Bigg|_{-2}^{-1} + \frac{2}{T_0}\frac{1}{-\jmath 2\pi\kappa f_0}\ e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0 t}\Big|_{-2}^{-1} \\
=& \left(\frac{1}{T_0}\frac{te^{-\jmath 2\pi\kappa f_0 t}}{-\jmath 2\pi\kappa f_0} - \frac{1}{T_0}\frac{e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0 t}}{-4\pi^2\kappa^2 f_0^2}\right)\Bigg|_{-2}^{-1} + \frac{2}{-\jmath 2\pi\kappa}\left(e^{\jmath 2\pi\kappa f_0} - e^{\jmath 4\pi\kappa f_0}\right) \\
=& -\frac{e^{\jmath 2\pi\kappa f_0}}{-\jmath 2\pi\kappa} - \frac{e^{\jmath 2\pi\kappa f_0}}{-4\jmath\pi^2\kappa^2 f_0} - \frac{-2e^{\jmath 4\pi\kappa f_0}}{-\jmath 2\pi\kappa} + \frac{e^{\jmath 4\pi\kappa f_0}}{-4\pi^2\kappa^2 f_0} + \frac{2e^{\jmath 2\pi\kappa f_0}}{-\jmath 2\pi\kappa} - \frac{2e^{\jmath 4\pi\kappa f_0}}{-\jmath 2\pi\kappa} \\
=& \frac{e^{\jmath 2\pi\kappa f_0}}{\jmath 2\pi\kappa} + \frac{e^{\jmath 2\pi\kappa f_0}}{4\jmath\pi^2\kappa^2 f_0} - \cancel{\frac{2e^{\jmath 4\pi\kappa f_0}}{\jmath 2\pi\kappa}} - \frac{e^{\jmath 4\pi\kappa f_0}}{4\pi^2\kappa^2 f_0} - \frac{2e^{\jmath 2\pi\kappa f_0}}{\jmath 2\pi\kappa} + \cancel{\frac{2e^{\jmath 4\pi\kappa f_0}}{\jmath 2\pi\kappa}} \\
=& \ \boxed{\frac{-e^{\jmath 2\pi\kappa f_0}}{\jmath 2\pi\kappa} + \frac{e^{\jmath 2\pi\kappa f_0}}{4\pi^2\kappa^2 f_0} - \frac{e^{\jmath 4\pi\kappa f_0}}{4\pi^2\kappa^2 f_0}}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{T_0}\int_1^2 (2-t)e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0 t}\,\mathrm{d}t \\
=&\frac{1}{T_0}\int_1^2 2e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0 t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{T_0}\int_1^2 te^{-\jmath 2\pi\kappa f_0 t}\,\mathrm{d}t \\
=&\,\frac{2}{T_0}\frac{1}{-\jmath 2\pi\kappa f_0}e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0 t}\Big|_1^2 - \frac{1}{T_0}\frac{e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0 t}}{-\jmath 2\pi\kappa f_0}\left(t-\frac{1}{-\jmath 2\pi\kappa f_0}\right)\Bigg|_1^2 \\
=&-\frac{2}{\jmath 2\pi\kappa}\left(e^{-\jmath 4\pi\kappa f_0}-e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0}\right)-\left[\frac{1}{T_0}\frac{te^{-\jmath 2\pi\kappa f_0 t}}{-\jmath 2\pi\kappa f_0}-\frac{e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0 t}}{-4\pi^2\kappa^2 f_0}\right]\Bigg|_1^2 \\
=&\frac{-2e^{-\jmath 4\pi\kappa f_0}}{\jmath 2\pi\kappa}+\frac{2e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0}}{\jmath 2\pi\kappa}-\left[-\frac{2e^{-\jmath 4\pi\kappa f_0}}{\jmath 2\pi\kappa}+\frac{e^{-\jmath 4\pi\kappa f_0}}{4\pi^2 k^2 f_0}+\frac{e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0}}{\jmath 2\pi\kappa}-\frac{e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0}}{4\pi^2\kappa^2 f_0}\right] \\
=&-\cancel{\frac{2e^{-\jmath 4pi\kappa f_0}}{\jmath 2\pi\kappa}}+\frac{2e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0}}{\jmath 2\pi\kappa}+\cancel{\frac{2e^{-\jmath 4\pi\kappa f_0}}{\jmath 2\pi\kappa}}-\frac{e^{-\jmath 4\pi\kappa f_0}}{4\pi^2\kappa^2 f_0}-\frac{e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0}}{\jmath 2\pi\kappa}+\frac{e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0}}{4\pi^2\kappa^2 f_0} \\
=&\quad\boxed{\frac{e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0}}{\jmath 2\pi\kappa}+\frac{e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0}}{4\pi^2\kappa^2 f_0}-\frac{e^{-\jmath 4\pi\kappa f_0}}{4\pi^2\kappa^2 f_0}}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{T_0}\int_{-1}^1 e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0 t}\,\mathrm{d}t \\
=&\frac{1}{T_0}\frac{1}{-\jmath 2\pi\kappa f_0}\left(e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0}-e^{\jmath 2\pi\kappa f_0}\right) \\
=&\quad\boxed{-\frac{e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0}}{\jmath 2\pi\kappa}+\frac{e^{\jmath 2\pi\kappa f_0}}{\jmath 2\pi\kappa}}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Άρα

$$
\begin{aligned}
&\quad(1),(2),(3) \\
\Rightarrow&\cancel{\frac{-e^{\jmath 2\pi\kappa f_0}}{\jmath 2\pi\kappa}}+\frac{e^{\jmath 2\pi\kappa f_0}}{4\pi^2\kappa^2 f_0}-\frac{e^{\jmath 4\pi\kappa f_0}}{4\pi^2\kappa^2 f_0}+\cancel{\frac{e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0}}{\jmath 2\pi\kappa}}+\frac{e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0}}{4\pi^2\kappa^2 f_0}-\frac{e^{-\jmath 4\pi\kappa f_0}}{4\pi^2\kappa^2 f_0}-\cancel{\frac{e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0}}{\jmath 2\pi\kappa}}+\cancel{\frac{e^{\jmath 2\pi\kappa f_0}}{\jmath 2\pi\kappa}} \\
=&\frac{1}{4\pi^2\kappa^2 f_0}\left(e^{\jmath 2\pi\kappa f_0}-e^{\jmath 4\pi\kappa f_0}+e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0}-e^{-\jmath 4\pi\kappa f_0}\right) \\
=&\frac{1}{4\pi^2\kappa^2 f_0}\left(e^{\jmath 2\pi\kappa f_0}+e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0}\right)-\frac{1}{4\pi^2\kappa^2 f_0}\left(e^{\jmath 4\pi\kappa f_0}+e^{-\jmath 4\pi\kappa f_0}\right) \\
=&\frac{1}{4\pi^2\kappa^2 f_0}2\cos(2\pi\kappa f_0)-\frac{1}{4\pi^2\kappa^2 f_0}2\cos(4\pi\kappa f_0) \\
=&\frac{6}{2\pi^2\kappa^2}\cos(\tfrac{2\pi\kappa}{6})-\frac{6}{2\pi^2\kappa^2}\cos(\tfrac{4\pi\kappa}{6})
\end{aligned}
$$

(ii)

Βλέπουμε ότι $T_0 = 3$

Άρα

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}(0) =& \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \mathrm{x}(t)\ \mathrm{d}t \\
=& \frac{1}{3}\int_0^1 1\ \mathrm{d}t + \frac{1}{3}\int_1^2\ \mathrm{d}t \\
=& \frac{1}{3}\ 2t|_0^1 + \frac{1}{3}\ t|_1^2 \\
=& \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \\
=& 1
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}(\kappa) =& \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \mathrm{x}(t)\, e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0 t}\ \mathrm{d}t \\
=& \frac{1}{T_0}\int_0^1 2e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0 t}\ \mathrm{d}t + \frac{1}{T_0}\int_1^2 e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0 t}\ \mathrm{d}t \\
=& \frac{2}{T_0}\frac{1}{-\jmath 2\pi\kappa f_0}\ e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0 t}\Big|_0^1 + \frac{1}{T_0}\frac{1}{-\jmath 2\pi\kappa f_0}\ e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0 t}\Big|_1^2 \\
=& -\frac{1}{\jmath\pi\kappa}\left(e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0} - 1\right) - \frac{1}{\jmath 2\pi\kappa}\left(e^{-\jmath 4\pi\kappa f_0} - e^{-\jmath 2\pi\kappa f_0}\right) \\
=& -\frac{1}{\jmath\pi\kappa}\left(e^{-\jmath\pi\kappa\frac{2}{3}} - 1\right) - \frac{1}{2\jmath\pi\kappa}\left(e^{-\jmath\frac{4}{3}\pi\kappa} - e^{-\jmath\frac{2}{3}\pi\kappa}\right)
\end{aligned}$$

Άσκηση 4.

(i)

$$\mathrm{x}(t) = \cos(4\pi t) = \frac{1}{2}e^{4\pi t} + \frac{1}{2}e^{-4\pi t}$$

Άρα οι μη-μηδενικοί συντελεστές της σειράς Fourier του $\mathrm{x}(t)$ είναι

$$X_1 = X_{-1} = \frac{1}{2}$$

(ii)

$$\mathrm{y}(t) = \sin(4\pi t) = \frac{1}{2\jmath}e^{4\pi t} - \frac{1}{2\jmath}e^{-4\pi t}$$

Άρα οι μη-μηδενικοί συντελεστές της σειράς Fourier του $y(t)$ είναι

$$Y_1 = \frac{1}{2\jmath}$$

και

$$Y_{-1} = Y_1^* = -\frac{1}{2\jmath}$$

(iii) Γνωρίζουμε ότι

$$\mathrm{z}(t) = \mathrm{x}(t)\,\mathrm{y}(t) \overset{\mathrm{FS}}{\leftrightarrow} \mathrm{z}(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \mathrm{X}(l)\,\mathrm{Y}(k-l)$$

Οπτικά βλέπουμε ότι το παραπάνω άθροισμα είναι μη-μηδενικό για $k = 2$ (όταν $l = 1$) όπου

$$\mathrm{z}(2) = \mathrm{X}(1)\,Y(2-1) = \frac{1}{2}\frac{1}{2\jmath} = \frac{1}{4\jmath}$$

και για $k = -2$ (όταν $l = -1$) οπου

$$\mathrm{z}(-2) = \mathrm{X}(-2)\,\mathrm{Y}(-2+1) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2\jmath}\right) = -\frac{1}{4\jmath}$$

αλλίως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι :

$$\mathrm{X}(\kappa) = \frac{1}{2}\delta(\kappa-1) + \frac{1}{2}\delta(\kappa+1)$$

και

$$\mathrm{Y}(\kappa) = \frac{1}{2\jmath}\delta(\kappa-1) - \frac{1}{2\jmath}\delta(\kappa+1)$$

άρα

$$\begin{aligned}
\mathrm{z}(\kappa) = \mathrm{X}(\kappa) * \mathrm{Y}(\kappa) &= \left[\frac{1}{2}\delta(\kappa-1) + \frac{1}{2}\delta(\kappa+1)\right] * \left[\frac{1}{2\jmath}\delta(\kappa-1) - \frac{1}{2\jmath}\delta(\kappa+1)\right] \\
=&\frac{1}{4\jmath}\left(\delta(\kappa-1) * \delta(\kappa-1)\right) - \frac{1}{4\jmath}\left(\delta(\kappa-1) * \delta(\kappa+1)\right) + \frac{1}{4\jmath}\left(\delta(\kappa+1) * \delta(\kappa-1)\right) - \frac{1}{4\jmath}\left(\delta(\kappa+1) * \delta(\kappa+1)\right) \\
=&\frac{1}{4\jmath}\delta(\kappa-2) - \cancel{\frac{1}{4\jmath}\delta(\kappa)} + \cancel{\frac{1}{4\jmath}\delta(\kappa)} - \frac{1}{4\jmath}\delta(\kappa+2) \\
=&\frac{1}{4\jmath}\delta(\kappa-2) - \frac{1}{4\jmath}\delta(\kappa+2)
\end{aligned}$$

Άρα οι συντελεστές της σειράς Fourier θα είναι $\mathrm{z}(2) = \frac{1}{4\jmath}$ και $\mathrm{z}(-2) = -\frac{1}{4\jmath}$

(iv)

$$\mathrm{z}(t) = \cos(4\pi t)\sin(4\pi t)$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$$

Για $\phi = \theta$ έχουμε:

$$\sin(2\theta) = \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta \Leftrightarrow \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$$

Άρα το

$$\mathrm{z}(t) = \frac{1}{2}\sin(8\pi t) \tag{1}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\jmath}e^{\jmath 8\pi t} - \frac{1}{2\jmath}e^{-\jmath 8\pi t}\right) \tag{2}$$
$$= \frac{1}{4\jmath}e^{\jmath 8\pi t} - \frac{1}{4j}e^{-\jmath 8\pi t} \tag{3}$$

Αφού $f_0 = 2$ αρα οι μη μηδενικοί συντελεστές της σειράς Fourier του $\mathrm{z}(t)$ είναι οι

$$\mathrm{Z}(2) = \frac{1}{4\jmath}$$

και

$$\mathrm{Z}(-2) = \mathrm{Z}^*(2) = -\frac{1}{4\jmath}$$

Άσκηση 5.

(i) Εαν το $\mathrm{x}(t)$ είναι πραγματικό, τότε $\mathrm{x}(t) = \mathrm{x}^*(t)$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\mathrm{X}(\kappa) = \mathrm{X}^*(-k)$. Εφόσον αυτό δεν ισχύει, το $\mathrm{x}(t)$ δεν είναι πραγματικό.

(ii) Εάν το $\mathrm{x}(t)$ είναι άρτιο, τότε $\mathrm{x}(t) = \mathrm{x}(-t)$ και $\mathrm{X}(\kappa) = \mathrm{X}(-\kappa)$. Εφόσον αυτό ισχύει για την προκειμένη περίπτωση, το $\mathrm{x}(t)$ είναι άρτιο.

(iii) Έχουμε ότι:

$$\mathrm{g}(t) = \frac{\mathrm{dx}(t)}{\mathrm{d}t} \overset{\mathrm{FS}}{\leftrightarrow} \mathrm{Y}(\kappa) = \jmath\kappa\frac{2\pi}{T_0}\mathrm{X}(\kappa)$$

Για αυτό,

$$\mathrm{Y}(\kappa) = \begin{cases} 0, & \kappa = 0 \\ -\kappa \left(\frac{1}{2}\right)^{|\kappa|} \frac{2\pi}{T_0}, & \text{αλλίως} \end{cases}$$

Εφόσον το $\mathrm{Y}(\kappa)$ δεν είναι άρτιο, και το $\mathrm{g}(t)$ δεν ειναι άρτιο.

Άσκηση 6.

Έστω ότι οι συντελεστές της σειράς Fourier του $\mathrm{x}(t)$ είναι οι $\mathrm{X}(\kappa)$.

(i)

Το $\mathrm{x}(t-t_0)$ είναι επίσης περιοδικό με περίοδο T. Οι συντελεστές της σειράς Fourier $\mathrm{Y}(\kappa)$ του $\mathrm{x}(t-t_0)$ είναι:

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}(\kappa) =& \frac{1}{T}\int_T \mathrm{x}(t-t_0)\, e^{-\jmath\kappa\frac{2\pi}{T}t}\ \mathrm{d}t \\ =& \frac{e^{-\jmath\kappa\frac{2\pi}{T}t_0}}{T}\int_T \mathrm{x}(\tau)\, e^{-\jmath\kappa\frac{2\pi}{T}\tau}\ \mathrm{d}\tau \\ =& e^{-\jmath\kappa\frac{2\pi}{T}t_0}\mathrm{X}(\kappa)\end{aligned}$$

Ομοίως οι συντελεστές της σειράς Fourier του $\mathrm{x}(t+t_0)$ είναι:

$$\mathrm{Z}(\kappa) = e^{\jmath\kappa\frac{2\pi}{T}t_0}\mathrm{X}(\kappa)$$

Τέλος, οι συντελεστές της σειράς Fourier του $\mathrm{x}(t-t_0)+\mathrm{x}(t+t_0)$ είναι:

$$\mathrm{W}(\kappa) = \mathrm{Y}(\kappa) + \mathrm{Z}(\kappa) = e^{-\jmath\kappa\frac{2\pi}{T}t_0}\mathrm{X}(\kappa) + e^{\jmath\kappa\frac{2\pi}{T}t_0}\mathrm{X}(\kappa) = 2\cos\left(\frac{\kappa 2\pi t_0}{T}\right)\mathrm{X}(\kappa)$$

(ii) Γνωρίζουμε ότι $Eu\{\mathrm{x}(t)\} = \frac{\mathrm{x}(t)+\mathrm{x}(-t)}{2}$. Οι συντελεστές σειράς Fourier του $\mathrm{x}(-t)$ είναι:

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}(\kappa) =& \frac{1}{T}\int_T \mathrm{x}(-t)\, e^{-\jmath\kappa\frac{2\pi}{T}}t\ \mathrm{d}t \\ =& \frac{1}{T}\int_T \mathrm{x}(\tau)\, e^{\jmath\kappa\frac{2\pi}{T}\tau}\ \mathrm{d}\tau \\ =& \mathrm{X}(-\kappa)\end{aligned}$$

Άρα, οι συντελεστές σειράς Fourier του $Eu\{\mathrm{x}(t)\}$ είναι:

$$\mathrm{Z}(\kappa) = \frac{\mathrm{X}(\kappa) + \mathrm{Y}(\kappa)}{2} = \frac{\mathrm{X}(\kappa) + \mathrm{X}(-\kappa)}{2}$$

(iii) Γνωρίζουμε ότι $Re\{\mathrm{x}(t)\} = \frac{\mathrm{x}(t)+\mathrm{x}^*(t)}{2}$. Οι συντελεστές σειράς Fourier του $\mathrm{x}^*(t)$ είναι:

$$\mathrm{Y}(\kappa) = \frac{1}{T}\int_T \mathrm{x}^*(t) e^{-\jmath\kappa\frac{2\pi}{T}t}\,\mathrm{d}t$$

Παίρνοντας τους συζυγείς και από τις δύο πλευρές

$$\mathrm{Y}^*(\kappa) = \frac{1}{T}\int_T \mathrm{x}(t)\, e^{\jmath\kappa\frac{2\pi}{T}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{X}(-\kappa)$$

Άρα αφού $Y^*(\kappa) = X(-\kappa)$, τότε $Y(\kappa) = X^*(-\kappa)$

Γι' αυτό, οι συντελεστές σειράς Fourier του $Re\{\mathrm{x}(t)\}$ είναι:

$$\mathrm{Z}(\kappa) = \frac{\mathrm{X}(\kappa) + \mathrm{Y}(\kappa)}{2} = \frac{\mathrm{X}(\kappa) + \mathrm{X}^*(-\kappa)}{2}$$