Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Διδάσκων: Α. Μουχτάρης

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς - Λύσεις 1ης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

Σχέσεις του Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta (1.1)$$

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta (1.2)$$

1.(i) Προσθέτωντας τις (1.1) και (1.2) κατά μέλη: $e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$

1.(ii) Αφαιρώντας τις (1.1) και (1.2) κατά μέλη: $e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$

1.(iii) Σύμφωνα με την (1.1): $e^{j(\theta+\phi)} = \cos(\theta+\phi) + j\sin(\theta+\phi)(1.3)$

Επίσης:

$e^{j(\theta+\phi)} = e^{j\theta}e^{j\phi} = (\cos\theta + j\sin\theta)(\cos\phi + j\sin\phi) = \cos\theta\cos\phi + j\sin\theta\cos\phi + j\cos\theta\sin\phi - \sin\theta\sin\phi =$
$(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + j(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi)(1.4)$

Άρα $\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$ (1.5)

Για $\theta = \phi:\ \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

Επίσης γνωρίζουμε ότι $1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$

Προσθέτωντας τις παραπάνω εξισώσεις κατά μέλη: $\cos 2\theta + 1 = 2\cos^2\theta \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1)$

1.(iv) Θέτοντας $\phi = -\phi$ στην (1.5) έχουμε:

$\cos(\theta-\phi) = \cos\theta\cos(-\phi) - \sin\theta\sin(-\phi) = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi (1.6)$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (1.5) και (1.6):

$\cos(\theta-\phi) - \cos(\theta+\phi) = 2\sin\theta\sin\phi \Rightarrow \sin\theta\sin\phi = \frac{1}{2}\cos(\theta-\phi) - \frac{1}{2}\cos(\theta+\phi)$

1.(v) Εξισώνοντας τα φανταστικά μέρη στην (1.3) και (1.4) έχουμε: $\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$

2.(i) $(az_1z_2)^* = [a(x_1+jy_1)(x_2+jy_2)]^* = [a(x_1x_2+jx_1y_2+jx_2y_1-y_1y_2)]^* =$

$[ax_1x_2 - ay_1y_2 + j(ax_1y_2+ax_2y_1)]^* = ax_1x_2 - ay_1y_2 - j(ax_1y_2+ax_2y_1)$

$az_1^*z_2^* = a(x_1+jy_1)^*(x_2+jy_2)^* = a(x_1-jy_1)(x_2-jy_2) = a(x_1x_2 - jx_1y_2 - jx_2y_1 - y_1y_2) =$

$ax_1x_2 - ay_1y_2 - j(ax_1y_2+ax_2y_1)$

Άρα $(\alpha z_1x_2)^* = az_1^*z_2^*$

2.(ii) Έχουμε ότι: $z + z^* = (x+jy)+(x-jy) = 2x = 2\Re e\{z\}$(1.7)

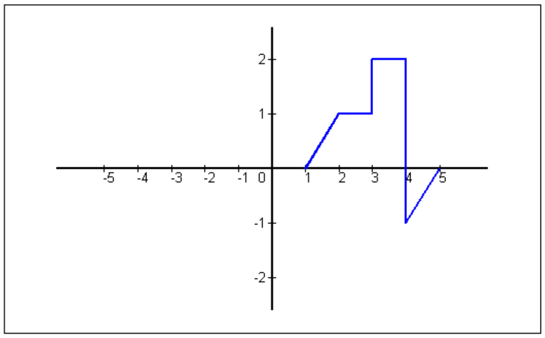
Συμφωνα με την (1.7) έχουμε:

$\Re e\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\} = \frac{1}{2}\left[\frac{z_1}{z_2} + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^*\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_1^*}{z_2^*}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{z_1z_2^*+z_1^*z_2}{z_2z_2^*}\right]$

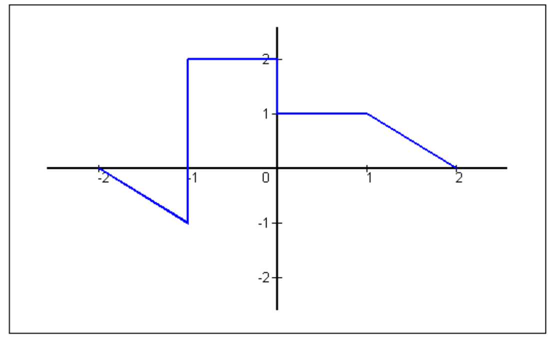
2.(iii) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \left(\frac{r_1e^{j\theta_1}}{r_2e^{j\theta_2}}\right)^* = \left(\frac{r_1}{r_2}e^{j\theta_1}e^{-j\theta_2}\right)^* = \left(\frac{r_1}{r_2}e^{j(\theta_1-\theta 2)}\right)^* = \frac{r_1}{r_2}e^{-j(\theta_1-\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}e^{-j\theta_1}e^{j\theta_2} = \frac{r_1e^{-j\theta_1}}{r_2e^{-j\theta_2}} = \frac{z_1^*}{z_2^*}$

Άσκηση 2.

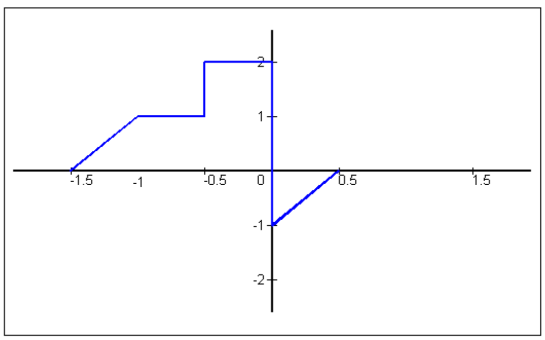
x(t-2)



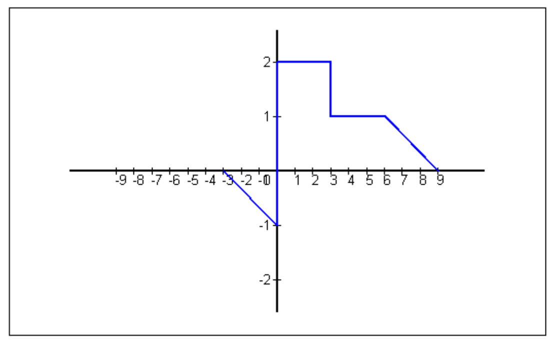
x(1-t)



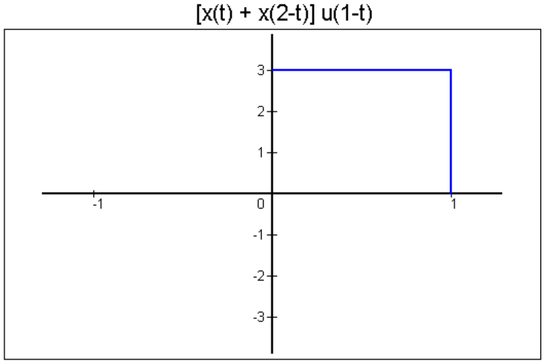
x(2t+2)



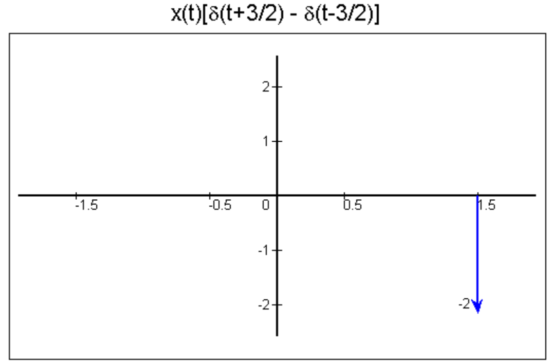
x(2-t/3)



[x(t) + x(2-t)] u(1-t)



x(t)[δ(t+3/2) - δ(t-3/2)]



Άσκηση 3.

1.(i) Για να δείξουμε ότι ένα σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο Τ αρκεί να δείξουμε ότι $x(t) = x(t+T)$. Στη συκεκριμμένη περίπτωση γνωρίζουμε ότι $\cos\theta = \cos(2\pi + \theta)$ αρα είναι περιοδικό με περίοδο 2π. Χρησιμοποιώντας αυτό, έχουμε ότι $2\cos(3t + \pi/4) = 2\cos(2\pi + 3t + \pi/4) = 2\cos(3(t + \frac{2\pi}{3}) + \pi/4)$ άρα είναι περιοδικό με περίοδο $T = \frac{2\pi}{3}$

1.(ii) Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $e^{j2\pi} = 1$ και έχουμε:

$e^{j(\pi t-1)} = e^{j2\pi} e^{j(\pi t-1)} = e^{j(2\pi+\pi t-1)} = e^{j(\pi(t+2)-1)}$

άρα είναι περιοδικό με περίοδο $T = 2$

1.(iii) Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα: $\sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta$ έχουμε ότι:

$x(t) = [\sin(t-\pi/6)]^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2(t-\pi/6)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t-\pi/3) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\pi+2t-\pi/3) =$
$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2(t+\pi)-\pi/3)$

Άρα το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T = \pi$

1.(iv) Για το σήμα αυτό, δεν ισχυει ότι $x(t) = x(t+T)$ άρα δεν είναι περιοδικό

(2) Θα πρέπει ο λόγος των περιόδων να μπορεί να εκφραστεί από έναν ρητό αριθμό, δηλ. από εναν λόγο δύο ακεραίων. Στην περίπτωση αυτή η θεμελιώδης περίοδος του αθροίσματος θα είναι το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) των T_1 και T_2.

Έστω λοιπόν $x(t) = x(t+k_1T_1)$ και $y(t) = y(t+k_2T_2)$. Για να είναι το άθροισμα

$z(t) = x(t) + y(t) = x(t+k_1T_1) + y(t+k_2T_2)$ περιοδικό με περίοδο T, θα πρέπει να υπάρχει T ώστε

$z(t) = z(t+T) \Rightarrow x(t+T) + y(t+T) = x(t+k_1T_1) + y(t+k_2T_2)$.

Άρα θα πρέπει: $k_1T_1 = k_2T_2 = T$ ή $T = \frac{T_1}{T_2} = \frac{k_2}{k_1}$ ρητός. Είναι προφανές ότι ο μικρότερος αριθμός T που ικανοποιεί τις παραπάνω σχέσεις είναι το Ε.Κ.Π. των T_1 και T_2.

Άσκηση 4.

1.(i) (1) Για κάθε χρονική στιγμή t_0, η έξοδος του συστήματος εξαρτάται μόνο από την είσοδο την χρονική στιγμή t_0, άρα το σύστημα είναι χωρίς μνήμη.

(2) Δίνω στο σύστημα την είσοδο: $x(t-t_0)$. Στην έξοδο του συστήματος θα έχω: $e^{x(t-t_0} = y(t-t_0)$, άρα το σύστημα είναι Χρονικά Αμετάβλητο.

(3) Δίνω στο σύστημα την είσοδο: $a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$. Στην έξοδο του συστήματος θα έχω:

$e^{a_1x1(t)+a_2x_2(t)} = e^{a_1x_1(t)}e^{a_2x_2(t)} \neq a_1y_1(t) + a_2y_2(t) = a_1e^{x_1(t)} + a_2e^{x_2(t)}$ άρα το σύστημα ΔΕΝ είναι Γραμμικό.

(4) Η έξοδος του συστήματος δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές τις εισόδου, άρα το σύστημα είναι Αιτιατό.

(5) Έστω $|x(t)| < M_x < \infty \Rightarrow -M_x < x(t) < M_x$. Τότε $e^{-M_x} < y(t) < e^{M_x}$. Άρα αφού για φραγμένη είδοσο, η

έξοδος είναι επίσης φραγμένη, το σύστημα είναι ευσταθές

1.(ii) (1) Για κάθε χρονική στιγμή t_0, η έξοδος του συστήματος εξαρτάται από τίμές της είσόδου τις χρονικές στιγμές $t_0 - 1$ και $1 - t_0$,άρα το σύστημα είναι με μνήμη.

(2) Δίνω στο σύστημα την είσοδο: $x(t-t_0)$. Στην έξοδο του συστήματος θα έχω: $x(t-t_0-1) - x(1-t-t_0)$.

Αλλά $y(t-t_0) = x(t-t_0-1) - x(1-t+t_0)$ άρα το σύστημα ΔΕΝ είναι Χρονικά Αμετάβλητο.

(3) Δίνω στο σύστημα την είσοδο: $a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$. Στην έξοδο του συστήματος θα έχω:

$a_1x_1(t-1) + a_2x_2(t-1) - (a_1x_1(1-t) + a_2x_2(1-t)) =$

$a_1(x_1(t-1) - x_1(1-t)) + a_2(x_2(t-1) - x_2(1-t)) =$

$a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$ άρα το σύστημα είναι Γραμμικό.

(4) Η έξοδος του συστήματος εξαρτάται από μελλοντικές τιμές τις εισόδου (λόγω του $x(1-t)$ στη σχέση Εισόδου-Εξόδου), άρα το σύστημα ΔΕΝ είναι Αιτιατό.

(5) Έστω $|x(t)| < M_x < \infty$. Τότε $|y(t)| = |x(t-1) - x(1-t)| < \infty$. Άρα αφού για φραγμένη είδοσο, η έξοδος είναι επίσης φραγμένη, το σύστημα είναι ευσταθές

1.(iii) (1) Για κάθε χρονική στιγμή t_0, η έξοδος του συστήματος εξαρτάται από τίμές της είσόδου τις χρονικές στιγμές $(-\infty, 3t]$,άρα το σύστημα είναι με μνήμη.

(2) Δίνω στο σύστημα την είσοδο: $x(t-t_0)$. Στην έξοδο του συστήματος θα έχω: $\displaystyle\int_{-\infty}^{3t} x(\tau - t_0)\mathrm{d}\tau$.

Αλλά $y(t-t_0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{3(t-t_0)} x(\tau)\mathrm{d}\tau$ άρα το σύστημα ΔΕΝ είναι Χρονικά Αμετάβλητο.

(3) Δίνω στο σύστημα την είσοδο: $a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$. Στην έξοδο του συστήματος θα έχω:

$$\int_{-\infty}^{3t} (a_1x_1(\tau) + a_2x_2(\tau))\mathrm{d}\tau = a_1\int_{-\infty}^{3t} x_1(\tau)\mathrm{d}\tau + a_2\int_{-\infty}^{3t} x_2(\tau)\mathrm{d}\tau = a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$$

άρα το σύστημα είναι Γραμμικό.

(4) Η έξοδος του συστήματος εξαρτάται και από μελλοντικές τιμές τις εισόδου στο διάστημα $(t, 3t]$, άρα το σύστημα ΔΕΝ είναι Αιτιατό. (Για παράδειγμα το $y(1)$ εξαρτάται από το $x(3)$).

(5) Εστω $x(t) = u(t)$ το οποίο είναι φραγμένο, τότε $y(t) = \left|\displaystyle\int_{-\infty}^{3t} u(\tau)\mathrm{d}\tau\right| = \lim_{t\to+\infty}\displaystyle\int_0^{3t} \mathrm{d}\tau \longrightarrow \infty$. Άρα το σύστημα ΔΕΝ είναι ευσταθές

1.(iv) (1) Για κάθε χρονική στιγμή t_0, η έξοδος του συστήματος εξαρτάται από την τιμή της είσόδου τη χρονική στιγμή $t_0/2$,άρα το σύστημα είναι με μνήμη.

(2) Δίνω στο σύστημα την είσοδο: $x(t-t_0)$. Στην έξοδο του συστήματος θα έχω: $x(\frac{t}{2} - t_0)$.

Αλλά $y(t-t_0) = x(\frac{t-t_0}{2})$ άρα το σύστημα ΔΕΝ είναι Χρονικά Αμετάβλητο.

(3) Δίνω στο σύστημα την είσοδο: $a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$. Στην έξοδο του συστήματος θα έχω:

$a_1x_1(t/2) + a_2x_2(t/2) = a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$ άρα το σύστημα είναι Γραμμικό.

(4) Η έξοδος του συστήματος μπορέι να εξαρτάται και από μελλοντικές τιμές τις εισόδου, άρα το σύστημα ΔΕΝ είναι Αιτιατό.

(5) Έστω $|x(t)| < M_x < \infty$. Τότε $|y(t)| = |x(t/2)| < M_x < \infty$. Άρα αφού για φραγμένη είδοσο, η έξοδος είναι επίσης φραγμένη, το σύστημα είναι ευσταθές

2.(i)Η σχέση που προκύπτει είναι: $y(y) = |x(t-1) - x(t)|$

2.(ii) Δίνω σαν είσοδο στο σύστημα το $a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ και έχω στην έξοδο:

$|a_1x_1(t-1) + a_2x_2(t-1) - a_1x_1(t) - a_2x_2(t)| = |a_1(x_1(t-1) - x_1(t)) + a_2(x_2(t-1) - x_2(t))|$ (4.1)

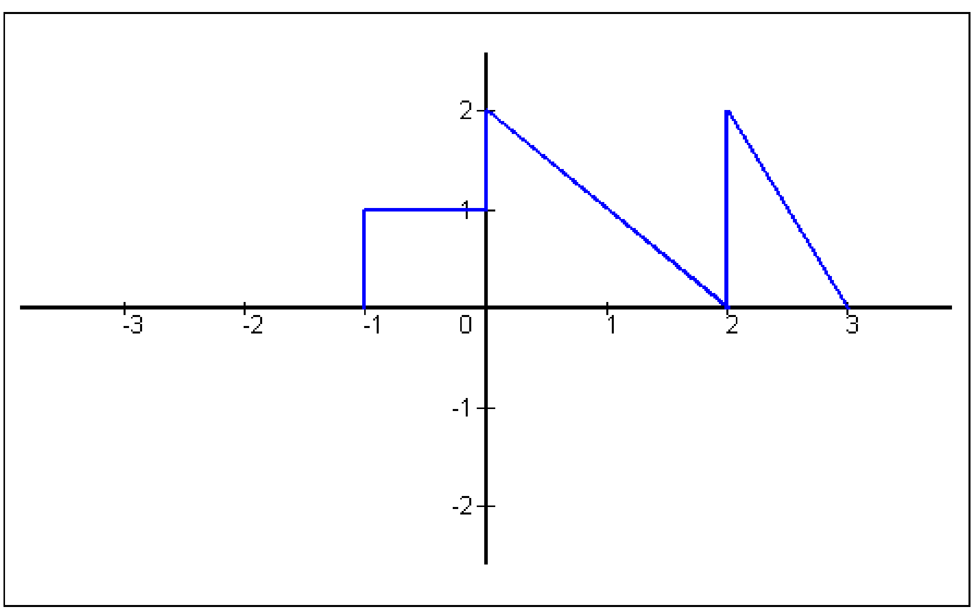
Αλλά: $a_1y_1 + a_2y_2 = a_1|x_1(t-1) - x_1(t)| + a_2|x_2(t-1) - x_2(t)|$ (4.2)

Συκρίνοντας τις (4.1) και (4.2) προκύπτει ότι το σύστημα δεν είναι γραμμικό

2.(iii) Δίνω σαν είσοδο στο σύστημα το $x(t - t_0)$ και έχω στην έξοδο:

$|x(t - t_0 - 1) - x_1(t - t_0)| = y(t - t_0)$ αρα το σύστημα είναι Χρονικά Αμετάβλητο

2.(iv) Η απόκριση του συστήματος φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Άσκηση 5.

(i) Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση $a \neq b$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\tau}u(\tau)e^{-b(t-\tau)}u(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

Όμως η $u(\tau)u(t-\tau)$ είναι μη-μηδενική και ίση με τη μονάδα για $0 < \tau < t$. Άρα

$$y(t) = \int_0^t e^{-a\tau}e^{-b(t-\tau)}\mathrm{d}\tau = \int_0^t e^{-bt+b\tau-a\tau}\mathrm{d}\tau = e^{-bt}\int_0^t e^{(b-a)\tau}\mathrm{d}\tau = e^{-bt}\frac{1}{b-a}e^{(b-a)\tau}\Big|_{\tau=0}^{t} =$$

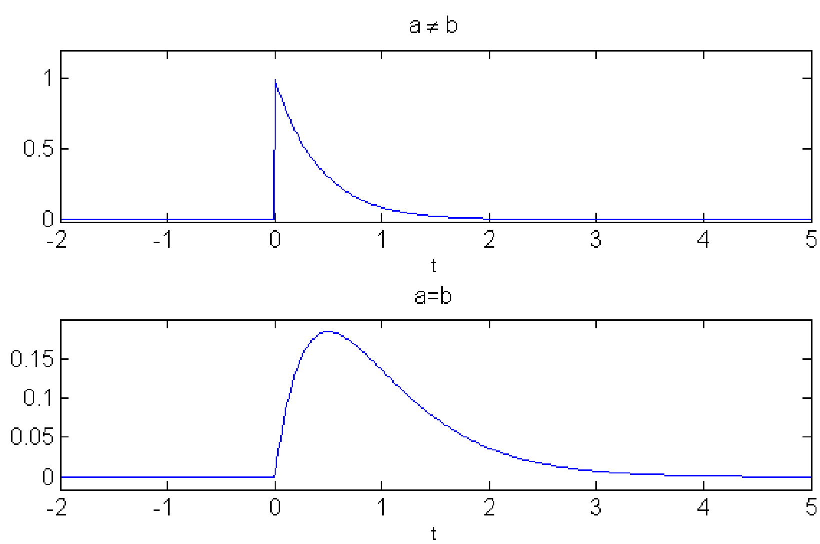
$\frac{e^{-bt}}{b-a}(e^{(b-a)t}-1)$, για $t > 0$ και $y(t) = 0$ για $t < 0$. Άρα: $y(t) = \frac{e^{-bt}}{b-a}(e^{(b-a)t}-1)u(t)$

Θεωρούμε τώρα την περιπτωση $a = b$

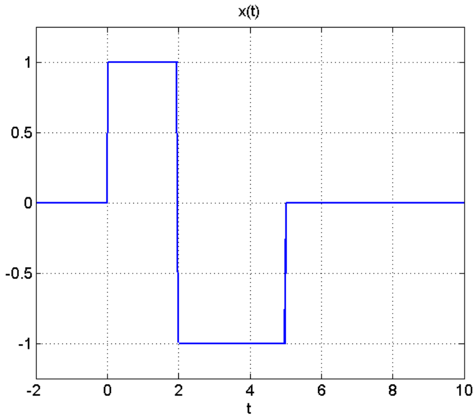
$$y(t) = \int_0^t e^{-a\tau}e^{-b(t-\tau)}\mathrm{d}\tau = \int_0^t e^{-bt+b\tau-a\tau}\mathrm{d}\tau = e^{-bt}\int_0^t e^{(b-a)\tau}\mathrm{d}\tau = e^{-bt}\int_0^t 1\mathrm{d}\tau = e^{-bt}\tau\Big|_{\tau=0}^{t} = te^{-bt}$$ για

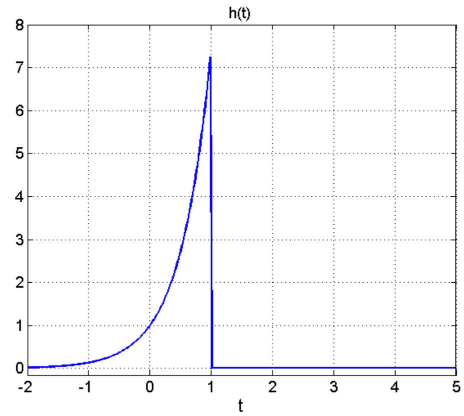
$t > 0$ και $y(t) = 0$ για $t < 0$. Άρα: $y(t) = te^{-bt}u(t)$

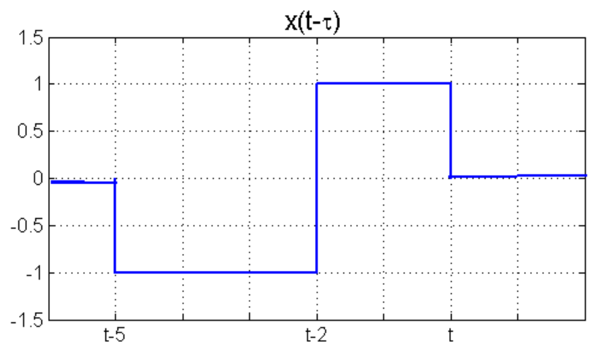
Παρακάτω φαίνεται η γραφική παράσταση της συνέλιξης για $a = b$ και $a \neq b$. Για το σχεδιασμό, έχουμε θεωρήσει $a = 3$ και $b = 2$



(ii) $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ Τα $x(t)$, $x(t-\tau)$ και $h(t)$ φαίνονται στα παρακάτω σχήματα:







- Για $t < 1$ έχουμε:

$$y(t) = \int_{t-5}^{t-2} -e^{2\tau} \mathrm{d}\tau + \int_{t-2}^{t} e^{2\tau} \mathrm{d}\tau = -\frac{1}{2} e^{2\tau} \Big|_{\tau=t-5}^{t-2} + \frac{1}{2} e^{2\tau} \Big|_{\tau=t-2}^{t} = \frac{1}{2}\left(-e^{2(t-2)} + e^{2(t-5)} + e^{2t} - e^{2(t-2)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{2t} - 2e^{2(t-2)} + e^{2(t-5)}\right)$$

- Για $t > 1$ και $t - 2 < 1 \Rightarrow 1 < t < 3$ έχουμε:

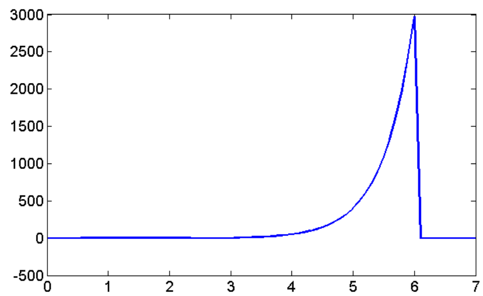
$$y(t) = \int_{t-5}^{t-2} -e^{2\tau} \mathrm{d}\tau + \int_{t-2}^{1} e^{2\tau} \mathrm{d}\tau = -\frac{1}{2} e^{2\tau} \Big|_{\tau=t-5}^{t-2} + \frac{1}{2} e^{2\tau} \Big|_{\tau=t-2}^{1} = \frac{1}{2}\left(-e^{2(t-2)} + e^{2(t-5)} + e^{2} - e^{2(t-2)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{2} - 2e^{2(t-2)} + e^{2(t-5)}\right)$$

- Για $t - 2 > 1$ και $t - 5 < 1 \Rightarrow 3 < t < 6$ έχουμε:

$$y(t) = \int_{t-5}^{1} -e^{2\tau} \mathrm{d}\tau = -\frac{1}{2} e^{2\tau} \Big|_{\tau=t-5}^{1} = -\frac{1}{2}\left(e^{2} - e^{2(t-5)}\right) = \frac{1}{2}\left(2e^{2(t-2)-e^{2}}\right)$$

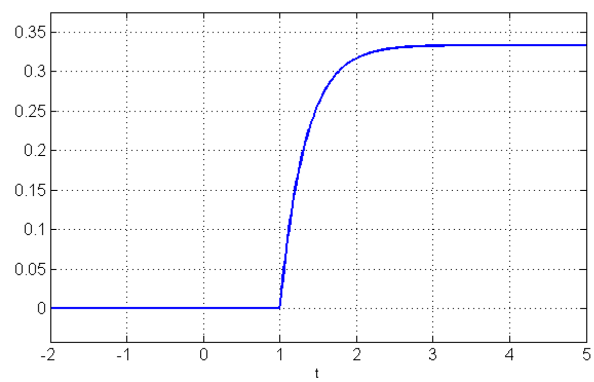
- Για $t - 5 > 1 \Rightarrow t > 6$ έχουμε: $y(t) = 0$

Η γραφική παράσταση της συνέλιξης είναι:

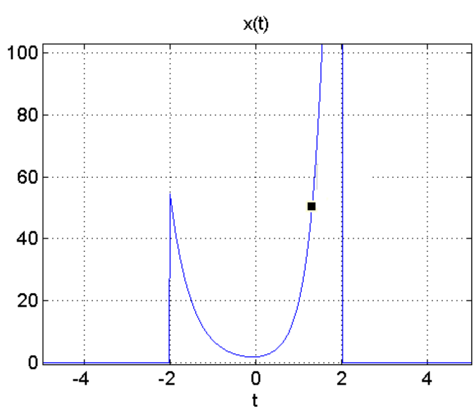


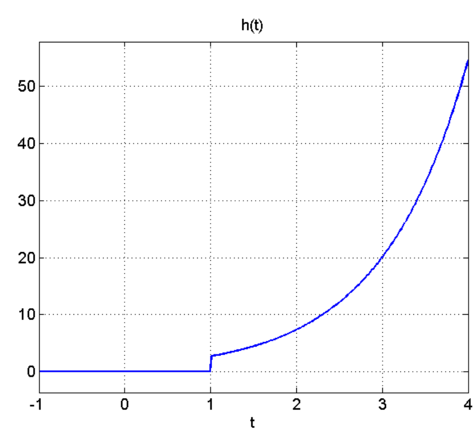
(iii) $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau-1)e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{1}^{t} e^{-3(t-\tau)}\mathrm{d}\tau = e^{-3t}\int_{1}^{t} e^{3\tau}\mathrm{d}\tau =$
$\frac{e^{-3t}}{3}e^{3\tau}\Big|_{\tau=1}^{t} = \frac{e^{-3t}}{3}(e^{3t}-e^{3}) = \frac{1}{3}(1-e^{-3(t-1)})$
για $t > 1$ και $y(t) = 0$ για $t < 1$, δηλαδη $y(t) = \frac{1}{3}(1-e^{-3(t-1)})u(t-1)$

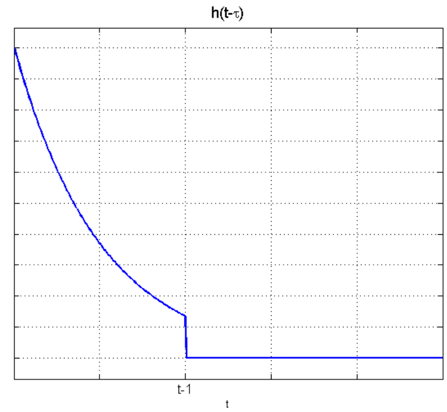
Η γραφική παράσταση της συνέλιξης είναι:



(iv) $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$
Τα $x(t)$, $h(t)$ και $h(t-\tau)$ φαίνονται στα παρακάτω σχήματα:







- Για $t-1<-2 \Rightarrow t<-1$ έχουμε:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t-1} e^{t-\tau}e^{3\tau}\mathrm{d}\tau = e^t\int_{-\infty}^{t-1} e^{2\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}e^t e^{2\tau}\Big|_{-\infty}^{t-1} = \frac{1}{2}e^t\left(e^{2(t-1)}-\lim_{\tau\to-\infty}e^{2\tau}\right)=\frac{1}{2}e^t e^{2(t-1)}$$

- Για $t-1<0$ και $t-1>-2 \Rightarrow -1<t<1$ έχουμε:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{-2} e^{t-\tau}e^{3\tau}\mathrm{d}\tau+\int_{-2}^{t-1} e^{t-\tau}e^{-2\tau}\mathrm{d}\tau = e^t\int_{-\infty}^{-2}e^{2\tau}\mathrm{d}\tau + e^t\int_{-2}^{t-1}e^{-3\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}e^t e^{2\tau}\Big|_{-\infty}^{-2} - \frac{1}{3}e^t e^{-3\tau}\Big|_{\tau=-2}^{t-1} =$$
$$\frac{1}{2}e^t\left(e^{-4}-\lim_{\tau\to-\infty}e^{2\tau}\right)-\frac{1}{3}e^t e^{-3(t-1)}+\frac{1}{3}e^t e^6 = e^t\left(\frac{e^{-4}}{2}-\frac{e^{-3(t-1)}}{3}+\frac{e^6}{3}\right)$$

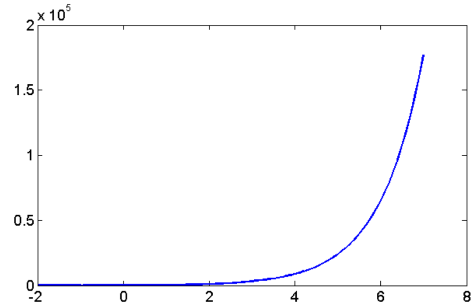
- Για $t-1>0$ και $t-1<2 \Rightarrow 1<t<3$ έχουμε:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{-2} e^{t-\tau}e^{3\tau}\mathrm{d}\tau+\int_{-2}^{0} e^{t-\tau}e^{-2\tau}\mathrm{d}\tau+\int_{0}^{t-1} e^{t-\tau}e^{3\tau}\mathrm{d}\tau = e^t\int_{-\infty}^{-2}e^{2\tau}\mathrm{d}\tau+e^t\int_{-2}^{0}e^{-3\tau}\mathrm{d}\tau+e^t\int_{0}^{t-1}e^{2\tau}\mathrm{d}\tau =$$
$$e^t\left(\frac{e^{-4}}{2}-\frac{1}{2}+\frac{e^6}{3}+\frac{e^{2(t-1)}}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

- Για $t-1>2v \Rightarrow t>3$ έχουμε:

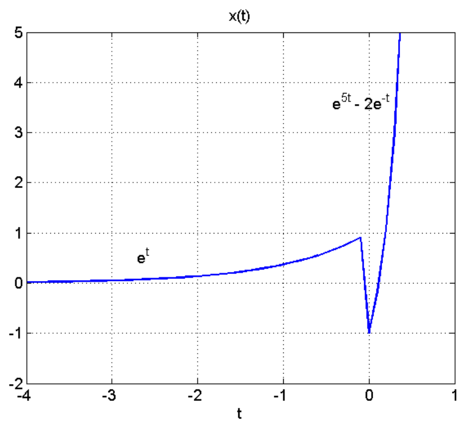
$$y(t)=\int_{-\infty}^{-2} e^{t-\tau}e^{3\tau}\mathrm{d}\tau+\int_{-2}^{0} e^{t-\tau}e^{-2\tau}\mathrm{d}\tau+\int_{0}^{2} e^{t-\tau}e^{3\tau}\mathrm{d}\tau+\int_{2}^{t-1} e^{t-\tau}e^{-2\tau}\mathrm{d}\tau$$
$$= e^t\int_{-\infty}^{-2}e^{2\tau}\mathrm{d}\tau+e^t\int_{-2}^{0}e^{-3\tau}\mathrm{d}\tau+e^t\int_{0}^{2}e^{2\tau}\mathrm{d}\tau+\int_{2}^{t-1}e^{-3\tau}\mathrm{d}\tau$$
$$= e^t\left(\frac{e^{-4}}{2}+\frac{1}{3}+\frac{e^6}{3}+\frac{e^4}{2}-\frac{1}{2}-\frac{e^{-3(t-1)}}{3}+\frac{e^{-6}}{3}\right)$$

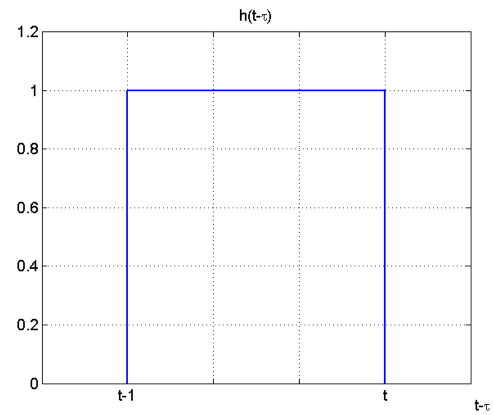
Η γραφική παράσταση της συνέλιξης είναι:



(v) $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

Τα σήματα $x(t)$ και $h(t-\tau)$ φαίνονται παρακάτω:





- Για $t < 0$ έχουμε:

$$y(t) = \int_{t-1}^{t} e^{\tau}\mathrm{d}\tau = e^{\tau}\Big|_{\tau=t-1}^{t} = e^t - e^{t-1} = e^t\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

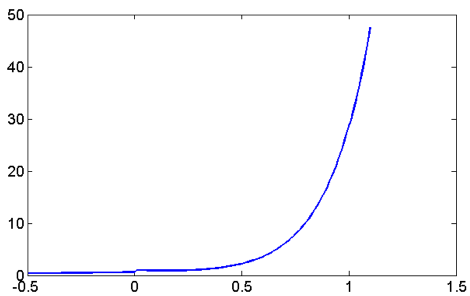
- Για $t > 0$ και $t - 1 < 0 \Rightarrow 0 < t < 1$ έχουμε:

$$y(t) = \int_{t-1}^{0} e^{\tau}\mathrm{d}\tau + \int_{0}^{t} e^{5\tau} - 2e^{-\tau}\mathrm{d}\tau = e^{\tau}\Big|_{\tau=t-1}^{0} + \frac{1}{5}e^{5\tau}\Big|_{\tau=0}^{t} + 2e^{-\tau}\Big|_{\tau=0}^{t} = 1 - e^{t-1} - \frac{1}{5}e^{5t} - \frac{1}{5} + 2e^{-t} - 2 =$$
$$-\frac{4}{5} + \frac{1}{5}e^{5t} - e^{t-1} + 2e^{-t}$$

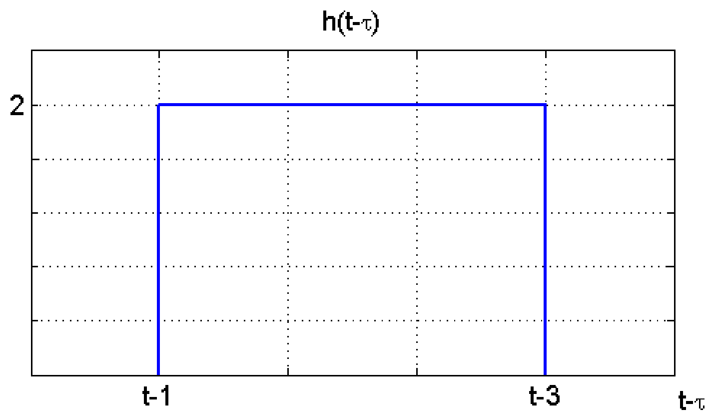
- Για $t - 1 > 0 \Rightarrow t > 1$ έχουμε:

$$y(t) = \int_{t-1}^{t} e^{5\tau} - 2e^{-\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{5}e^{5\tau}\Big|_{\tau=t-1}^{t} + 2e^{-\tau}\Big|_{\tau=t-1}^{t} = \frac{1}{5}e^{5t}(1 - e^{-5}) + 2e^{-t}(1 - e)$$

Η γραφική παράσταση της συνέλιξης είναι:



(vi) Το $h(t-\tau)$ είναι:



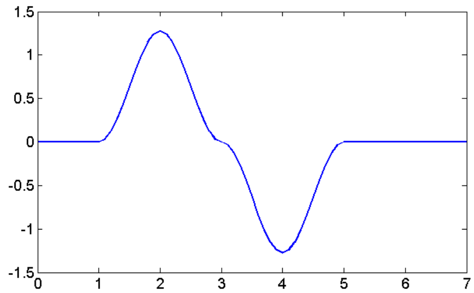
- Για $t-1<0 \Rightarrow t<1:\ y(t)=0$

- Για $t-1>0$ και $t-3<0 \Rightarrow 1<t<3:\ y(t)=\int_0^{t-1} 2\sin(\pi\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{2}{\pi}(-\cos(\pi\tau))\Big|_{\tau=0}^{t-1} = \frac{2}{\pi}(1-\cos(\pi(t-1)))$

- Για $t-1>2$ και $t-3<2 \Rightarrow 3<t<5:\ y(t)=\int_{t-3}^{2} 2\sin(\pi\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{2}{\pi}(-\cos(\pi\tau))\Big|_{\tau=t-3}^{2} = \frac{2}{\pi}(\cos(\pi(t-3))-1)$

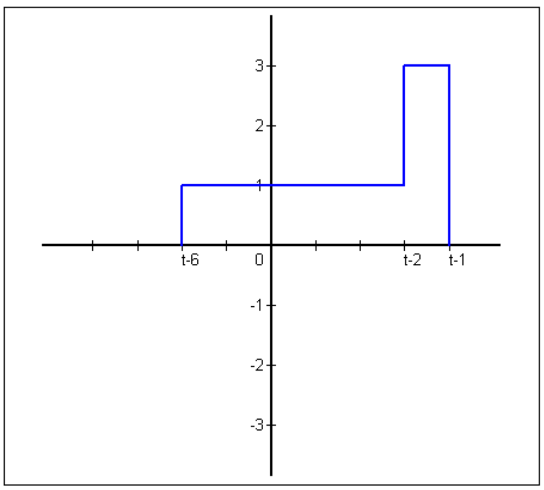
- Για $t-3>2 \Rightarrow t<5:\ y(t)=0$

Η γραφική παράσταση της συνέλιξης είναι:



(vii) $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

Το σήμα $x(t-\tau)$ φαινεται παρακάτω.



- Για $t-1 \leq -2 \Rightarrow t \leq -1$

  $$y(t) = \int_{t-6}^{t-2} 1\mathrm{d}\tau + \int_{t-2}^{t-1} 3\mathrm{d}\tau = \tau\Big|_{\tau=t-6}^{t-2} + 3\tau\Big|_{\tau=t-2}^{t-1} = 7$$

- Για $t-1 > -2$ και $t-2 \leq -2 \Rightarrow -1 < t \leq 0$

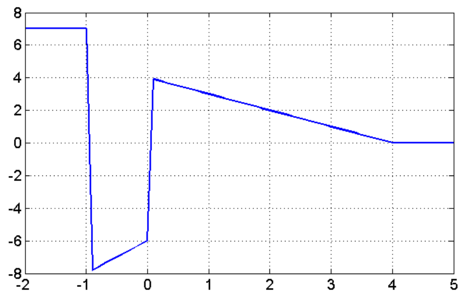
  $$y(t) = \int_{t-6}^{t-2} 1\mathrm{d}\tau + \int_{t-2}^{-2} 3\mathrm{d}\tau = \tau\Big|_{\tau=t-6}^{t-2} + 3\tau\Big|_{\tau=t-2}^{-2} = 2t-6$$

- Για $t-2 > -2$ και $t-6 \leq -2 \Rightarrow 0 < t \leq 4$

  $$y(t) = \int_{t-6}^{-2} 1\mathrm{d}\tau = \tau\Big|_{\tau=t-6}^{t-2} - t + 4$$

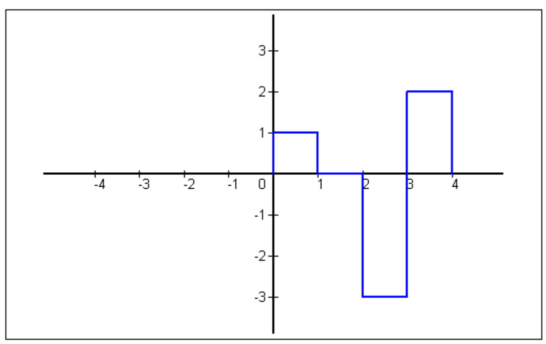
- Για $t-6>-2 \Rightarrow t>4, y(t)=0$

Η γραφική παράσταση της συνέλιξης είναι:



(viii) $x(t) \star h(t) = (\delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2)) \star h(t) = h(t) - 2h(t-1) + h(t-2)$

Άρα η γραφική παράσταση της συνέλιξης θα είναι:



(ix) Η $h(t)$ μπορεί να γραφεί ώς $h(t) = h_1(t) - \frac{1}{3}\delta(t-2)$ όπου

$$h(t) = \begin{cases} \frac{4}{3}, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

και η $x(t)$ περιγράφεται από την ευθεία $x(t) = ax + b$

Άρα $y(t) = h(t) \star x(t) = (h_1(t) - \frac{1}{3}\delta(t-2)) \star x(t) = h_1(t) \star x(t) - \frac{1}{3}x(t-2)$

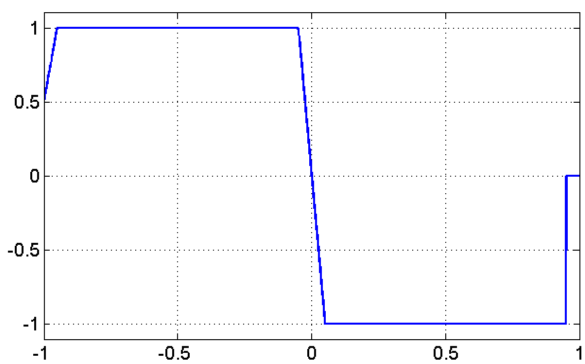
Υπολογίζουμε το $h_1(t) \star x(t) = \displaystyle\int_{t-1}^{t} \frac{4}{3}(a\tau + b)\mathrm{d}\tau = \frac{4}{3}\left[\frac{1}{2}a\tau^2 + b\tau\Big|_{\tau=t-1}^{t}\right] = \frac{4}{3}\left[\frac{1}{2}at^2 + bt - \frac{1}{2}a(t-1)^2 - b(t-1)\right]$

Άρα $y(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt - \frac{1}{2}a(t-1)^2 - b(t-1) - \frac{1}{2}\left[a(t-2) + b\right] = at + b = x(t)$

(x) Το $h(t)$ γράφεται σαν $h(t) = \frac{1}{\Delta}\delta(t + \frac{\Delta}{2}) - \frac{1}{\Delta}\delta(t - \frac{\Delta}{2})$ Άρα $x(t) \star h(t) = \frac{1}{\Delta}x(t + \frac{\Delta}{2}) - \frac{1}{\Delta}x(t - \frac{\Delta}{2}) =$

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta}t + \frac{2+\Delta}{2\Delta}, \text{ για } -1-\frac{\Delta}{2} \leq t \leq -1+\frac{\Delta}{2} \\ 1, \text{ για } -1+\frac{\Delta}{2} \leq t \leq -\frac{\Delta}{2} \\ -\frac{2}{\Delta}t, \text{ για } -\frac{\Delta}{2} \leq t \leq \frac{\Delta}{2} \\ -1, \text{ για } \frac{\Delta}{2} \leq t \leq 1-\frac{\Delta}{2} \\ \frac{1}{\Delta}t - \frac{2+\Delta}{2\Delta}, \text{ για } 1-\frac{\Delta}{2} \leq t \leq 1+\frac{\Delta}{2} \end{cases}$$

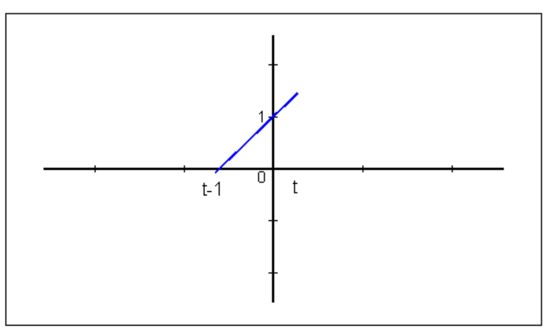
Παρακάτω φαίνεται η γρ. παράσταση για $\Delta = 0.1$



Τι θα συμβέι όταν $\Delta \to 0$;

(xi) $y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

Το σήμα $h(\tau)$ είναι η ευθέια $-\tau+1$ για $t \in [0,1]$. Το σήμα $h(t-\tau)$ φαινεται παρακάτω.



Το γεγονός ότι το $x(t)$ είναι περιοδικό, σημαίνει ότι και το $y(t)$, άρα υπολογίζουμε τη συνελιξη για μια μόνο περίοδο.

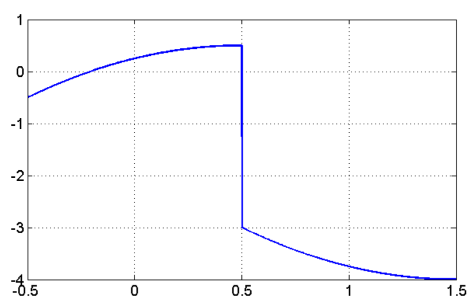
- Για $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$

  $$y(t) = \int_{t-1}^{-1/2} -(-(t-\tau)+1)\mathrm{d}\tau + \int_{-1/2}^{t} -(t-\tau)+1\mathrm{d}\tau = \int_{t-1}^{-1/2}(t-\tau-1)\mathrm{d}\tau + \int_{-1/2}^{t}(-t+\tau+1)\mathrm{d}\tau =$$
  $$t\tau - \frac{\tau^2}{2} - \tau\Big|_{\tau=t-1}^{-1/2} + \left(-t\tau + \frac{\tau^2}{2} + \tau\right)\Big|_{\tau=-1/2}^{t} = \frac{1}{4} + t - t^2$$

- Για $\frac{1}{2} < t < \frac{3}{2}$

  $$y(t) = \int_{t-1}^{1/2} -(t-\tau)+1\mathrm{d}\tau + \int_{1/2}^{t} -(-(t-\tau)+1)\mathrm{d}\tau = \int_{t-1}^{1/2}(-t+\tau+1)\mathrm{d}\tau + \int_{1/2}^{t}(t-\tau-1)\mathrm{d}\tau =$$
  $$-t\tau + \frac{\tau^2}{2} + \tau\Big|_{\tau=t-1}^{1/2} + \left(t\tau + -\frac{\tau^2}{2} - \tau\right)\Big|_{\tau=1/2}^{t} = -3t + t^2 + 7/4$$

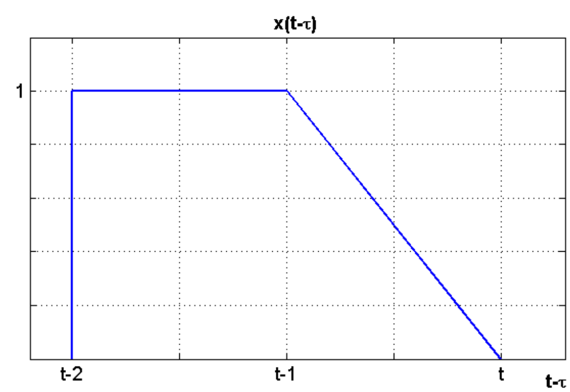
Η γραφική παράσταση της συνέλιξης σε μια περίοδο είναι:



(xii)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

Το σήμα $x(t-\tau)$ φαινεται παρακάτω.



- Για $t < 1$: $y(t) = 0$

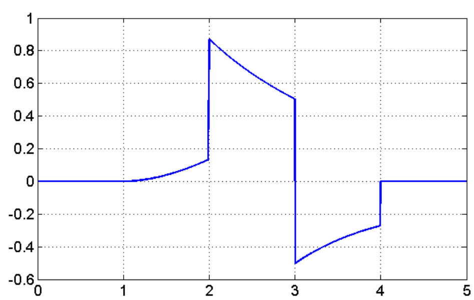
- Για $t > 1$ και $t-1 < 1 \Rightarrow 1 < t < 2$: $y(t) = \int_1^t e^{-\tau}(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_1^t te^{-\tau}\mathrm{d}\tau + \int_1^t -\tau e^{-\tau}\mathrm{d}\tau = -te^{-\tau}\Big|_{\tau=2}^{t} + e^{-\tau}(\tau+1)\Big|_{\tau=1}^{t} = e^{-t} + e^{-1}(t-2)$

- Για $t > 2$ και $t-1 < 2 \Rightarrow 2 < t < 3$: $y(t) = \int_1^{t-1} e^{-\tau}\mathrm{d}\tau + \int_{t-1}^{2} e^{-\tau}(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_1^{t-1} e^{-\tau}\mathrm{d}\tau + \int_{t-1}^{2} te^{-\tau}\mathrm{d}\tau + \int_{t-1}^{2} -\tau e^{-\tau}\mathrm{d}\tau = -e^{-\tau}\Big|_{\tau=1}^{t-1} - te^{-\tau}\Big|_{\tau=t-1}^{2} + e^{-\tau}(\tau+1)\Big|_{\tau=t-1}^{2} = e^{-(t-1)} + e^{-1}(1 - te^{-1} + 3e^{-1})$

- Για $t-1 > 2$ και $t-2 < 2 \Rightarrow 3 < t < 4$: $y(t) = \int_{t-2}^{2} e^{-\tau}\mathrm{d}\tau = -e^{-\tau}\Big|_{\tau=t-2}^{2} = -e^{-2} - e^{-(t-2)}$

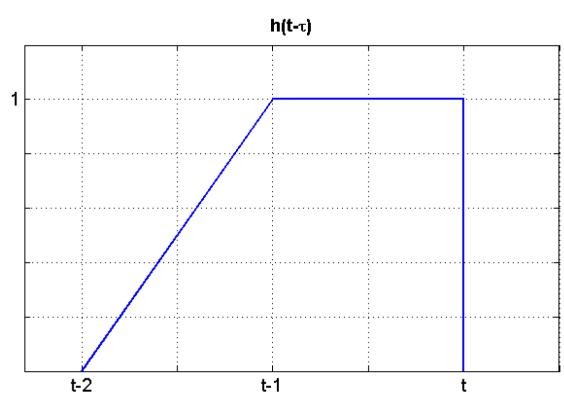
- Για $t-2 > 2 \Rightarrow t > 4$: $y(t) = 0$

Η γραφική παράσταση της συνέλιξης είναι:



(xiii) $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

Το σήμα $h(t-\tau)$ φαινεται παρακάτω.



- Για $t < -1$: $y(t) = 0$

- Για $t > -1$ και $t - 1 < -1 \Rightarrow -1 < t < 0$ έχουμε:

$$y(t) = \int_{-1}^{t} \tau \mathrm{d}\tau = \left.\frac{\tau^2}{2}\right|_{\tau=-1}^{t} = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}$$

- Για $t > 0$ και $t - 1 < 0 \Rightarrow 0 < t < 1$ έχουμε:

$$y(t) = \int_{-1}^{t-1} (-(t-\tau)+2)\tau \mathrm{d}\tau + \int_{t-1}^{t} \tau \mathrm{d}\tau = \int_{-1}^{t-1} (-t\tau + \tau^2 + 2\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{t-1}^{t} \tau \mathrm{d}\tau = \int_{-1}^{t-1} (\tau(2-t) + \tau^2)\mathrm{d}\tau + \int_{t-1}^{t} \tau \mathrm{d}\tau = (2-t)\frac{\tau^2}{2} + \left.\frac{\tau^3}{3}\right|_{\tau=-1}^{t-1} + \left.\frac{\tau^2}{2}\right|_{\tau=t-1}^{t} = \frac{t^3}{6} + t^2 - \frac{1}{2}$$

- Για $t > 1$ και $t - 1 < 1 \Rightarrow 1 < t < 2$ έχουμε:

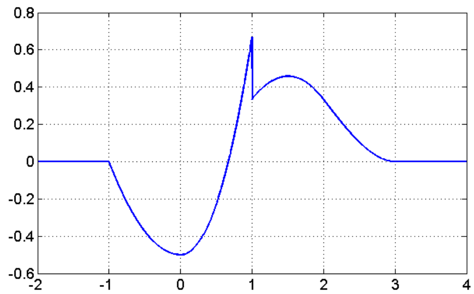
$$y(t) = \int_{t-2}^{t-1} (-(t-\tau)+2)\tau \mathrm{d}\tau + \int_{t-1}^{1} \tau \mathrm{d}\tau = \int_{t-2}^{t-1} (-t\tau + \tau^2 + 2\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{t-1}^{1} \tau \mathrm{d}\tau = \int_{t-2}^{t-1} (\tau(2-t) + \tau^2)\mathrm{d}\tau + \int_{t-1}^{1} \tau \mathrm{d}\tau = (2-t)\frac{\tau^2}{2} + \left.\frac{\tau^3}{3}\right|_{\tau=t-2}^{t-1} + \left.\frac{\tau^2}{2}\right|_{\tau=t-1}^{1} = -\frac{t^2}{2} + \frac{3t}{2} - \frac{2}{3}$$

- Για $t - 1 > 1$ και $t - 2 < 1 \Rightarrow 2 < t < 3$ έχουμε:

$$y(t) = \int_{t-2}^{1} (-(t-\tau)+2)\tau \mathrm{d}\tau = \int_{t-2}^{1} (-t\tau + \tau^2 + 2\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{t-2}^{1} (\tau(2-t) + \tau^2)\mathrm{d}\tau = (2-t)\frac{\tau^2}{2} + \left.\frac{\tau^3}{3}\right|_{\tau=t-2}^{1} = \frac{t(t-3)^2}{6}$$

- Για $t - 2 > 1 \Rightarrow t > 3$: $y(t) = 0$

Η γραφική παράσταση της συνέλιξης είναι:



Άσκηση 6.

(i) Δίνοντας σαν είσοδο το $\delta(t-\tau)$, η έξοδος του συστήματος είναι $h_\tau(t) = u(t-\tau) - u(t-2\tau)$

Μετατοπίζοντας την είσοδο κατα t_0 δηλαδή δίνοντας σαν είσοδο στο σύστημα το $\delta(t-\tau-t_0) = \delta(t-(\tau+t_0))$, έχουμε στην έξοδο $u(t-(\tau+t_0)) - u(t-2(\tau+t_0)) = u(t-\tau-t_0) - u(t-2\tau-2t_0)$ (6.1)

Η μετατοπισμένη κατα t_0 τιμή της εξόδου είναι: $h_\tau(t-t_0) = u(t-t_0-\tau) - u(t-t_0-2\tau)$(6.2)

Συγκρίνοντας τις (6.1) και (6.2) καταλήγουμε στο ότι το σύστημα ΔΕΝ είναι χρονικά αμετάβλητο.

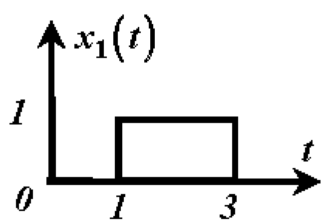
(ii) Για $\tau < 0$ τό σύστημα ΔΕΝ είναι αιτιάτο. Για παράδειγμα για είσοδο $\delta(t+1)$ (δηλ. για $\tau = -1$) $h(t) = u(t+1) - u(t+2) \neq 0$ για $t \in [-2, -1]$, άρα όχι αιτιατό.

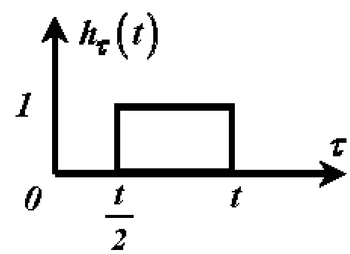
Για $\tau \geq 0$ τό σύστημα είναι αιτιάτο. Για παράδειγμα για είσοδο $\delta(t-1)$ (δηλ. για $\tau = 1$) $h(t) = u(t-1) - u(t-2) = 0$ για $t < 0$, άρα αιτιατό.

(iii)

(a) $y_1(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) h_\tau(t) \mathrm{d}\tau$

Τα $x_1(t)$ και $h_T(t)$ φαίνονται παρακάτω:





Άρα έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Για $t < 1$: $y(t) = 0$

- Για $t > 1$ και $\frac{t}{2} < 1 \Rightarrow 1 < t < 2 : y_1(t) = \displaystyle\int_1^t \mathrm{d}\tau = t - 1$

- Για $t < 3$ και $\frac{t}{2} > 1 \Rightarrow 2 < t < 3 : y_1(t) = \displaystyle\int_{t/2}^t \mathrm{d}\tau = \frac{t}{2} - 1 = \frac{t}{2}$

- Για $t > 3$ και $\frac{t}{2} < 3 \Rightarrow 3 < t < 6 : y_1(t) = \displaystyle\int_{t/2}^3 \mathrm{d}\tau = 3 - \frac{t}{2}$

- Για $\frac{t}{2} > 3 \Rightarrow t > 6$: $y(t) = 0$

(β) $y_2(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau) h_T(t) \mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} u(\tau) \left[u(t-\tau) - u(t-2\tau)\right] \mathrm{d}\tau = \int_{t/2}^{t} e^{-\tau} \mathrm{d}\tau = -e^{-\tau}\Big|_{\tau=t/2}^{t} = -e^{-t} + e^{-t/2}$