

## ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Εφαρμοσμένα μαθηματικά για μηχανικούς

Φθινόπωρο 2009

Γ. Τζιρίτας, Καθηγητής

### 2<sup>η</sup> σειρά ασκήσεων

1. Δίδεται η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

- (a) Ποιό είναι το μέγιστο πεδίο ορισμού της συνάρτησης;  
(b) Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μοναδιαίου κύκλου με κέντρο την αρχή είναι επίσης κύκλος με κέντρο το σημείο  $(\frac{4}{3}, 0)$  και ακτίνα  $\frac{2}{3}$ , δηλαδή

$$\left| f(z) - \frac{4}{3} \right| = \frac{2}{3}.$$

- (c) Να παρασταθούν γραφικά το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της συνάρτησης.

2. Να παρασταθεί γραφικά η καμπύλη

$$z(t) = (1 + \cos t)(\sin t - i \cos t).$$

3. Θεωρήστε την ακολουθία

$$z_n = z_{n-1}^2 + c, n \geq 1, \quad z_0 = 0,$$

όπου  $c$  είναι μιγαδικός αριθμός. Για κάποιες τιμές του  $c$  η ακολουθία τείνει στο άπειρο, δηλαδή το μέτρο  $|z_n|$  μεγαλώνει αδιάκοπα. Το σύνολο των αριθμών για τους οποίους η ακολουθία δεν τείνει στο άπειρο ονομάζεται Mandelbrot set. Έχει ευρεθεί ότι αν για κάποιο  $z_n$  το μέτρο του ξεπεράσει το 2, τότε με βεβαιότητα η ακολουθία τείνει στο άπειρο. Ζητείται αξιοποιώντας αυτή την ιδιότητα να ευρεθεί και απεικονισθεί το Mandelbrot set με χρήση του MATLAB. Προς τούτο θεωρήστε ένα πλέγμα  $401 \times 401$  σημείων στο μιγαδικό επίπεδο ως τιμές του  $c$  στο διάστημα  $-2 \leq \Re c \leq 2, -2 \leq \Im c \leq 2$ . Ορίστε ως μέγιστη τιμή για τις επαναλήψεις της αναδρομικής σχέσης το 50. Για κάθε τιμή του  $c$  βρείτε τον αριθμό  $M$  των επαναλήψεων ώστε  $|z_n| > 2$ . Αν η ανισότητα δε συμβαίνει μέχρι το μέγιστο αριθμό επαναλήψεων, τότε  $M = 50$ . Έτσι λαμβάνεται ένας πίνακας διάστασης  $401 \times 401$  του οποίου ζητείται η απεικόνιση με χρήση της συνάρτησης image του MATLAB.

4. Να ευρεθεί για ποιά σημεία είναι αναλυτική η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{(z^3 - 1)(z^2 + 2)}$$

Να δοθεί επίσης η παράγωγος όπου η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη.

5. Να ευρεθεί για ποιά σημεία είναι αναλυτική η συνάρτηση

$$f(z) = y - ix, z = x + iy.$$

Να δοθεί επίσης η παράγωγος όπου η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη.