

## ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Εφαρμοσμένα μαθηματικά για μηχανικούς

Φθινόπωρο 2009

Γ. Τζιρίτας, Καθηγητής

### 1<sup>η</sup> σειρά ασκήσεων

1. Δίδονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2, z_3$  με  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \rho > 0$ .

(a) Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$$

είναι πραγματικός.

(b) Να αποδειχθεί ότι

$$\rho|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|.$$

2. Έστω  $z$  ένας μιγαδικός αριθμός και έστω η ακολουθία  $f(n) = i^n z$ , όπου  $n$  φυσικός αριθμός.

(a) Να αποδειχθεί ότι

$$f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0.$$

(b) Αν  $\rho$  και  $\theta$  είναι το μέτρο και το όρισμα του  $z$ , να αποδειχθεί ότι

$$f(13) = \rho \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} + \theta \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} + \theta \right) \right).$$

3. Δίδονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1 = x + iy$  και  $z_2 = \frac{2 - \bar{z}_1}{2 + \bar{z}_1}$ , με  $y \neq 0$ . Δίδεται επίσης ότι  $z_2 - z_1$  είναι πραγματικός αριθμός.

(a) Να αποδειχθεί ότι  $z_2 - z_1 = 1$ .

(b) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του  $z_1$  στο μιγαδικό επίπεδο.

(c) Αν ο αριθμός  $z_1^2$  είναι φανταστικός και  $xy > 0$ , να υπολογισθεί ο  $z_1$  και να αποδειχθεί ότι

$$(z_1 + 1 + i)^{20} - (\bar{z}_1 + 1 - i)^{20} = 0.$$

4. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί  $z$  που ικανοποιούν την ισότητα  $(4 - z)^{10} = z^{10}$ . Να αποδειχθεί ότι το πραγματικό μέρος αυτών των αριθμών ισούται με 2.

5. Να βρείτε το μέγιστο της  $|z^n + a|$  για  $|z| \leq 1$ , όπου  $n$  φυσικός αριθμός.