ΗΥ215: Λύσεις 4ης σειράς ασκήσεων

1. Το σήμα έχει ΜΟΝΟ 4 πόλους, άρα θα έχει Μ.Laplace της μορφής $X(s) = \frac{A}{D(s)}$, όπου A σταθερά, και $D(s)$ το πολυώνυμο του παρονομαστή.

   Αφού το σήμα είναι πραγματικό, ισχύει ότι $X(s) = X(s^*)$. Άρα αφού το $s_1 = e^{j\pi/4}$ είναι πόλος, πόλος θα είναι και το $s_1^* = e^{-j\pi/4}$.

   Επίσης, το σήμα είναι άρτιο, άρα ισχύει ότι $X(s) = X(-s)$, κι αφού το $s_1 = e^{j\pi/4}$ και το $s_1^* = e^{-j\pi/4}$ είναι πόλοι, το ίδιο θα ισχύει και για το $-s_1 = -e^{j\pi/4}$ και για το $-s_1^* = -e^{-j\pi/4}$. Αυτοί είναι και οι τέσσερις πόλοι.

   Οπότε $X(s) = \dfrac{A}{(s-s_1)(s-s_1^*)(s+s_1)(s+s_1^*)}$.

   Μένει να υπολογιστεί η σταθερά A. Δίδεται ότι $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = \frac{1}{2}$.

   Παρατηρούμε ότι $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-0t}dt = X(0) = \frac{1}{2}$.

   Επίσης, $X(0) = \dfrac{A}{D(0)} = \dfrac{A}{(0-s_1)(0-s_1^*)(0+s_1)(0+s_1^*)} = \dfrac{A}{s_1 s_1^* s_1 * s_1^*} = \dfrac{A}{|s_1|^2|s_1|^2} = \dfrac{A}{1} = A = \dfrac{1}{2}$.

   Άρα τελικά $X(s) = \dfrac{1}{2(s-e^{j\pi/4})(s-e^{-j\pi/4})(s+e^{j\pi/4})(s+e^{-j\pi/4})}$.

2. Θα έχουμε:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -3y(t) + \delta(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = 3x(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sX(s) = -3Y(s) + 1 \\ sY(s) = 3X(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(s) = \frac{-3Y(s)+1}{s} \\ sY(s) = 3\frac{-3Y(s)+1}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(s) = \frac{-3Y(s)+1}{s} \\ s^2Y(s) = -9Y(s) + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(s) = \frac{-3Y(s)+1}{s} \\ s^2Y(s) + 9Y(s) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(s) = \frac{-3Y(s)+1}{s} \\ Y(s)(s^2+9) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(s) = \frac{-3Y(s)+1}{s} \\ Y(s) = \frac{3}{s^2+9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(s) = \frac{-3\frac{3}{s^2+9}+1}{s} \\ Y(s) = \frac{3}{s^2+9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(s) = \frac{s^2}{s^3+9s} \\ Y(s) = \frac{3}{s^2+9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(s) = \frac{s}{s^2+9} \\ Y(s) = \frac{3}{s^2+9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(s) = \frac{s}{s^2+3^2} \\ Y(s) = \frac{3}{s^2+3^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \cos(3t)\epsilon(t) \\ y(t) = \sin(3t)\epsilon(t) \end{cases}$$

3. Είναι $y(t) = x_1(t-2) \star x_2(-t+3) \longleftrightarrow Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s+2}\frac{e^{-3s}}{1-s} = \frac{e^{-5s}}{(s+2)(1-s)}$,
με ROC $-2 < Re\{s\} < 1$.

4. Είναι $x(t) = e^{-|t|} = e^t\epsilon(-t) + e^{-t}\epsilon(t) \leftrightarrow X(s) = -\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{s+1} = -\dfrac{2}{(s-1)(s+1)}$.

Επίσης $H(s) = \dfrac{s+1}{s^2+2s+2} = \dfrac{s+1}{(s-(-1+i))(s-(-1-i))}$.

Άρα η έξοδος του συστήματος θα είναι:
$Y(s) = H(s)X(s) = -\dfrac{2(s+1)}{(s-(-1+i))(s-(-1-i))(s-1)(s+1)} =$

$$-\frac{2}{(s-(-1+i))(s-(-1-i))(s-1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-(-1-i)} + \frac{C}{s-(-1+i)}.$$

Με χρήση PFE, θα έχουμε:

$A = Y(s)(s-1)|_{s=1} = -\frac{2}{(s-(-1+i))(s-(-1-i))}|_{s=1} = -\frac{2}{5}$.
$B = Y(s)(s-(-1-i))|_{s=-1-i} = -\frac{2}{(s-(-1+i))(s-1)}|_{s=-1-i} = \frac{1+2i}{5}$.
$C = Y(s)(s-(-1+i))|_{s=-1+i} = -\frac{2}{(s-(-1-i))(s-1)}|_{s=-1+i} = \frac{1-2i}{5}$.

Άρα τελικά

$$Y(s) = -\frac{2}{5}\frac{1}{s-1} + \frac{1+2i}{5}\frac{1}{s-(-1-i)} + \frac{1-2i}{5}\frac{1}{s-(-1+i)} \leftrightarrow$$

$$y(t) = -\frac{2}{5}e^{t}\epsilon(t) + \frac{1+2i}{5}e^{(-1-i)t}\epsilon(t) + \frac{1-2i}{5}e^{(-1+i)t}\epsilon(t).$$

5. Ο Μετασχηματισμός Laplace του $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ δεν υπάρχει. Μπορούμε να το δείξουμε ως εξής: το $x(t)$ μπορεί να γραφεί ως $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}\epsilon(-t) + e^{j2\pi f_0 t}\epsilon(t)$.

   Ισχύει $x_1(t) = e^{j2\pi f_0 t}\epsilon(t) \leftrightarrow X_1(s) = \frac{1}{s-j2\pi f_0}, Re\{s\} > 0$.
   Επίσης, $x_2(t) = e^{j2\pi f_0 t}\epsilon(-t) \leftrightarrow X_2(s) = \frac{1}{s-j2\pi f_0}, Re\{s\} < 0$.

   Παρατηρούμε ότι η τομή των δυο ROC είναι το κενό σύνολο. Άρα δεν ορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace του αθροίσματος των δυο σημάτων, άρα και ο μετ. Laplace του $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$.