ΗΥ215: Λύσεις 3ης σειράς ασκήσεων

1. Είναι:

α) $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha - t)e^{-j2\pi ft}dt.$

Θέτω $u = \alpha - t \Rightarrow du = -dt$ και $u_1 = \alpha - (-\infty) = +\infty, u_2 = \alpha - (+\infty) = -\infty.$
Άρα θα είναι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha - t)e^{-j2\pi ft}dt = -\int_{+\infty}^{-\infty} x(u)e^{-j2\pi f(\alpha-u)}du = -\int_{+\infty}^{-\infty} x(u)e^{j2\pi fu}e^{-j2\pi f\alpha}du =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{j2\pi fu}e^{-j2\pi f\alpha}du = e^{-j2\pi f\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{j2\pi fu}du = e^{-j2\pi f\alpha}X(-f).$$

β) $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha t - \beta)e^{-j2\pi ft}dt, \alpha > 0.$

Θέτω $u = \alpha t - b \Rightarrow du = \alpha dt$ και $u_1 = \alpha(-\infty) - b = -\infty, u_2 = \alpha(+\infty) - b = +\infty.$
Άρα θα είναι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha t - b)e^{-j2\pi ft}dt = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-j2\pi f\frac{u+b}{\alpha}}du = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-j2\pi f\frac{u}{\alpha}}e^{-j2\pi f\frac{b}{\alpha}}du =$$

$$\frac{1}{\alpha}e^{-j2\pi f\frac{b}{\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{j2\pi\frac{f}{\alpha}u}du = \frac{1}{\alpha}e^{-j2\pi f\frac{b}{\alpha}}X(\frac{f}{\alpha}), \alpha > 0.$$

γ) Ξέρουμε ότι $F\{x(t - \alpha)\} = e^{-j2\pi f\alpha}X(f).$

Επίσης ξέρουμε την ιδιότητα της παραγώγου, που λέει : $F\{dx(t)/dt\} = j2\pi f X(f)$.
Άρα συνδυάζοντας και τις δυο, έχουμε: $F\{\frac{dx(t-\alpha)}{dt}\} = j2\pi f e^{-j2\pi f\alpha} X(f)$.

2. Είναι:
$x(t) = e^{-t}, 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow X(f) = \int_0^1 e^{-t}e^{-j2\pi ft}dt = -\frac{1}{j2\pi f+1}e^{-(j2\pi f+1)t}|_0^1 = \frac{1-e^{-(j2\pi f+1)}}{1+j2\pi f}$.

α) Έχουμε:
$y(t) = x(t) + x(-t) \Rightarrow Y(f) = X(f) + X(-f) =$

$$\frac{1-e^{-(j2\pi f+1)}}{1+j2\pi f} + \frac{1-e^{-(-j2\pi f+1)}}{1-j2\pi f} = \frac{2-\frac{2}{e}\cos(2\pi f)+\frac{2\pi f}{e}\sin(2\pi f)}{1+4\pi^2 f^2}.$$

β) Θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα

$$tx(t) \longleftrightarrow \frac{j}{2\pi}\frac{dX(f)}{df}.$$

Απόδειξη:
Είναι:
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \Rightarrow \frac{dX(f)}{df} = \int_{-\infty}^{+\infty}(-j2\pi t)x(t)e^{-j2\pi ft}dt \Rightarrow$$

$$\frac{j}{2\pi}\frac{dX(f)}{df} = \int_{-\infty}^{+\infty} tx(t)e^{-j2\pi ft}dt.$$

Άρα:
$$Y(f) = \frac{j}{2\pi}\frac{dX(f)}{df} = \frac{j}{2\pi}\frac{1-e^{-(j2\pi f+1)}}{1+j2\pi f} = \frac{1-\frac{2}{e}e^{-j2\pi f}-\frac{j2\pi f}{e}e^{-j2\pi f}}{(1+j2\pi f)^2}.$$

3. Σωστή εκφώνηση: Αν $y(t) = x(t) * h(t)$ και $g(t) = x(\alpha t) * h(\alpha t)$, $\alpha > 0$. Δείξτε ότι $g(t) = \frac{1}{\alpha}y(\alpha t)$, χρησιμοποιώντας ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier.

Λύση:

Είναι (από εκφώνηση)

$$y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow Y(f) = X(f)H(f)$$

και αντικαθιστώντας το f με $\frac{f}{\alpha}$, έχουμε

$$Y(\tfrac{f}{\alpha}) = X(\tfrac{f}{\alpha})H(\tfrac{f}{\alpha})$$

Επίσης, από τη δεύτερη σχέση της εκφώνησης,

$$g(t) = x(\alpha t) * h(\alpha t) \Rightarrow G(f) = \tfrac{1}{\alpha}X(\tfrac{f}{\alpha})\tfrac{1}{\alpha}H(\tfrac{f}{\alpha}) = \tfrac{1}{\alpha}[\tfrac{1}{\alpha}X(\tfrac{f}{\alpha})H(\tfrac{f}{\alpha})],$$

κι από τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε:

$$G(f) = \tfrac{1}{\alpha}[\tfrac{1}{\alpha}Y(\tfrac{f}{\alpha})] \Rightarrow g(t) = \tfrac{1}{\alpha}y(\alpha t).$$

Άρα αποδείχθηκε το ζητούμενο.

4. Γνωρίζουμε ότι $rect(\dfrac{t}{T}) \longleftrightarrow Tsinc(fT) = \dfrac{\sin(\pi f T)}{\pi f}$.

   Λόγω συμμετρίας, αν $x(t) \longleftrightarrow X(f)$, τότε $X(t) \longleftrightarrow x(-f)$.

   Οπότε $\dfrac{\sin(\pi t T)}{\pi t} \longleftrightarrow rect(\dfrac{-f}{T}) = rect(\dfrac{f}{T})$.

   Αν $\pi T = \alpha$, τότε $\dfrac{\sin(\alpha t)}{\pi t} \longleftrightarrow rect(\dfrac{f}{\alpha/\pi})$.

5. Προφανώς είναι αρκετά δύσκολο να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στο πεδίο του χρόνου. Όμως γνωρίζουμε το θεώρημα του Parseval, που λέει ότι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Άρα για να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα, χρειαζόμαστε να βρούμε ένα $x(t)$ που όταν υψωθεί στο τετράγωνο και ολοκληρωθεί, να μας δίνει το δεδομένο ολοκλήρωμα της εκφώνησης.

Έχουμε ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2(\frac{\sin(t)}{\pi t})^4 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (t(\frac{\sin^2(t)}{\pi t})^2))^2 dt.$

Άρα $x(t) = t(\frac{\sin(t)}{\pi t})^2$.

Αν $y(t) = (\frac{\sin(t)}{\pi t})^2 = \frac{\sin(t)}{\pi t}\frac{\sin(t)}{\pi t}$, και $z(t) = \frac{\sin(t)}{\pi t}$, τότε ο Μετασχηματισμός Fourier του $y(t)$ θα είναι $Y(f) = Z(f) * Z(f)$.

Από την προηγούμενη άσκηση έχουμε ότι $F\{\frac{\sin(t)}{\pi t}\} = F\{z(t)\} = Z(f) = rect(\frac{f}{1/\pi}) = rect(\pi f)$, με * να συμβολίζει τη συνέλιξη.

Κάνοντας συνέλιξη των δυο $rect$ παραθύρων, έχουμε ότι:

$Z(f) * Z(f) = rect(\pi f) * rect(\pi f) = \frac{1}{\pi} + |f|, |f| \leq \frac{1}{\pi}$.

Τώρα, $x(t) = t(\frac{\sin(t)}{\pi t})^2 \longleftrightarrow \frac{j}{2\pi}\frac{dY(f)}{df}$.

Όμως το $\frac{dY(f)}{df}$ αποτελείται από δυο παράθυρα διάρκειας $\frac{1}{\pi}$, γύρω από το $\pm\frac{1}{2\pi}$ με πλάτη ± 1.

Άρα

$$X(f) = \begin{cases} \frac{j}{2\pi}, & -\frac{1}{\pi} \leq f < 0 \\ -\frac{j}{2\pi}, & 0 \leq f < \frac{1}{\pi} \\ 0, & elsewhere \end{cases}$$

Οπότε τελικά $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = 2\int_0^{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{4\pi^2} df = \frac{1}{2\pi^3}$.

Εναλλακτικά, ϑα μπορούσαμε να κάνουμε το εξής:

Θεωρούμε ως $x(t)$ το $x(t) = \dfrac{\sin^2(t)}{\pi^2 t} = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin^2(t)}{\pi t} = \dfrac{\sin(t)}{\pi}\dfrac{\sin(t)}{\pi t}$.
Γνωρίζουμε το $M.F.$ του δεύτερου όρου του γινομένου, από την άσκηση 4. Είναι:

$$\frac{\sin(t)}{\pi t} \longleftrightarrow rect(\pi f).$$

Επίσης, ξέρουμε ότι: $\dfrac{\sin(t)}{\pi} \longleftrightarrow \dfrac{1}{j2\pi}\delta(f + \dfrac{1}{2\pi}) - \dfrac{1}{j2\pi}\delta(f - \dfrac{1}{2\pi})$.
Το γινόμενο των δυο σημάτων στο χρόνο μας δίνει συνέλιξη των μετασχηματισμών τους στη συχνότητα. Άρα ϑα είναι:

$$X(f) = F\{\frac{\sin(t)}{\pi}\} * F\{\frac{\sin(t)}{\pi t}\} = (\frac{1}{j2\pi}\delta(f + \frac{1}{2\pi}) - \frac{1}{j2\pi}\delta(f - \frac{1}{2\pi})) * rect(\pi f)$$

Εδώ ϑα χρησιμοποιήσουμε ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα και συγκεκριμένα την:

$$X(f)*\delta(f - f_0) = X(f - f_0)$$

Άρα $X(f) = \dfrac{1}{j2\pi}rect(\pi(f + \dfrac{1}{2\pi})) - \dfrac{1}{j2\pi}rect(\pi(f - \dfrac{1}{2\pi}))$.

Τα δυο αυτά παράϑυρα έχουν διάρκεια $\frac{1}{\pi}$ και βρίσκονται γύρω από τα σημεία $f_0 = \pm\frac{1}{2\pi}$. Αρκεί τώρα να βρούμε το $|X(f)|^2$, και μετά να ολοκληρώσουμε αυτό που ϑα βρούμε.

Είναι $|X(f)|^2 = |\dfrac{1}{j2\pi}rect(\pi(f + \dfrac{1}{2\pi})) - \dfrac{1}{j2\pi}rect(\pi(f - \dfrac{1}{2\pi}))|^2 =$

$|\dfrac{1}{j2\pi}(rect(\pi(f + \dfrac{1}{2\pi})) - rect(\pi(f - \dfrac{1}{2\pi})))|^2 =$

$|\dfrac{-j}{2\pi}(rect(\pi(f + \dfrac{1}{2\pi})) - rect(\pi(f - \dfrac{1}{2\pi})))|^2 =$

$\dfrac{1}{4\pi^2}(rect^2(\pi(f + \dfrac{1}{2\pi})) + rect^2(\pi(f - \dfrac{1}{2\pi})) - 2rect(\pi(f + \dfrac{1}{2\pi}))rect(\pi(f - \dfrac{1}{2\pi})))$.

Όμως, το γινόμενο των δυο $rect$ που προκύπτει παραπάνω από την εφαρμογή της ταυτότητας $(a - b)^2$ είναι μηδέν, γιατί τα δυο $rect$ δεν επικαλύπτονται. Άρα:

$$|X(f)|^2 = \frac{1}{4\pi^2}(rect^2(\pi(f+\frac{1}{2\pi})) + rect^2(\pi(f-\frac{1}{2\pi})) - 2rect(\pi(f+\frac{1}{2\pi}))rect(\pi(f-\frac{1}{2\pi}))) =$$

$$\frac{1}{4\pi^2}(rect^2(\pi(f+\frac{1}{2\pi})) + rect^2(\pi(f-\frac{1}{2\pi}))) = |X(f)|^2.$$

Προφανώς όμως $rect^2(f) = rect(f)$ (σχεδιάστε και δείτε το).

Άρα $|X(f)|^2 = \frac{1}{4\pi^2}(rect(\pi(f+\frac{1}{2\pi})) + rect(\pi(f-\frac{1}{2\pi})))$.

Οπότε τελικά $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi^2}[(rect(\pi(f+\frac{1}{2\pi})) + rect(\pi(f-\frac{1}{2\pi})))]df =$

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\frac{1}{\pi}}^{0} 1df + \frac{1}{4\pi^2}\int_{0}^{\frac{1}{\pi}} 1df = \frac{1}{4\pi^2}f|_{-\frac{1}{\pi}}^{0} + \frac{1}{4\pi^2}f|_{0}^{\frac{1}{\pi}} = \frac{1}{4\pi^2}(0-(-\frac{1}{\pi})) + \frac{1}{4\pi^2}(\frac{1}{\pi}-0) = \frac{1}{4\pi^3} + \frac{1}{4\pi^3} =$$

$$\frac{1}{2\pi^3}.$$