ΗΥ215: Λύσεις 2ης σειράς ασκήσεων

1. <u>1ος τρόπος:</u>

   Είναι

$$Y_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} y(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \frac{dx(t)}{dt}e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

   (κατά παράγοντες ολοκλήρωση: $\int f'g = fg - \int fg'$)

$$= \frac{1}{T_0}x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}|_0^{T_0} - \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)(e^{-j2\pi k f_0 t})'dt$$

$$= \frac{1}{T_0}x(T_0)e^{-j2\pi k f_0 T_0} - \frac{1}{T_0}x(0)e^0 - \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)(-j2\pi k f_0)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

   (περιοδικότητα $\Rightarrow x(0) = x(T_0)$ και ξέρουμε ότι $f_0 T_0 = 1$)

$$= (j2\pi k f_0)\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = j2\pi k f_0 X_k.$$

   <u>2ος τρόπος:</u>

   Είναι

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \frac{d}{dt}e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k (j2\pi k f_0)e^{j2\pi k f_0 t}$$

   $= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (j2\pi k f_0 X_k)e^{j2\pi k f_0 t}$, άρα φαίνεται ότι $Y_k = j2\pi k f_0 X_k$.

2. <u>1ος τρόπος:</u>

   Το άρτιο μέρος του σήματος γράφεται ως $x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$, ενώ το περιττό γράφεται ως $x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$.

   Άρα για το άρτιο μέρος πρώτα, θα έχουμε:

$$2x_e(t) = x(t) + x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{-j2\pi k f_0 t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k (e^{j2\pi k f_0 t} + e^{-j2\pi k f_0 t}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2X_k \cos(2\pi k f_0 t)$$

$$= 2(\sum_{k=-\infty}^{-1} X_k \cos(2\pi k f_0 t) + X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k \cos(2\pi k f_0 t))$$

$$= 2(\sum_{k=1}^{+\infty} X_{-k} \cos(2\pi(-k) f_0 t) + X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k \cos(2\pi k f_0 t))$$

$$= 2(\sum_{k=1}^{+\infty} X_{-k} \cos(2\pi k f_0 t) + X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k \cos(2\pi k f_0 t)) \text{ (γιατί } \cos(\theta) = \cos(-\theta)).$$

$$= 2(X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (X_{-k} + X_k) \cos(2\pi k f_0 t)).$$

   Όμως το σήμα είναι πραγματικό, και ισχύει ότι $X_{-k} = X_k^*$. Άρα θα είναι:

$$2x_e(t) = 2(X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (X_k^* + X_k) \cos(2\pi k f_0 t)) = 2(X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2\Re\{X_k\} \cos(2\pi k f_0 t)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_e(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2\Re\{X_k\} \cos(2\pi k f_0 t).$$

   Για το περιττό μέρος , θα έχουμε:

$$2x_o(t) = x(t) - x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{-j2\pi k f_0 t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k (e^{j2\pi k f_0 t} - e^{-j2\pi k f_0 t}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2j X_k \sin(2\pi k f_0 t)$$

$$= 2j(\sum_{k=-\infty}^{-1} X_k \sin(2\pi k f_0 t) + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k \sin(2\pi k f_0 t))$$

$$= 2j(\sum_{k=1}^{+\infty} X_{-k} \sin(2\pi(-k) f_0 t) + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k \sin(2\pi k f_0 t))$$

$$= 2j(-\sum_{k=1}^{+\infty} X_{-k} \sin(2\pi k f_0 t) + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k \sin(2\pi k f_0 t)) \text{ (γιατί } -\sin(\theta) = \sin(-\theta)).$$

$$= 2j(\sum_{k=1}^{+\infty} (X_k - X_{-k}) \sin(2\pi k f_0 t)).$$

Όμως το σήμα είναι πραγματικό, και ισχύει ότι $X_{-k} = X_k^*$. Άρα θα είναι:

$$2x_o(t) = 2j(\sum_{k=1}^{+\infty} (X_k - X_k^*) \sin(2\pi k f_0 t)) = 2j(\sum_{k=1}^{+\infty} 2j\Im\{Xk\} \sin(2\pi k f_0 t))$$

$$= -4(\sum_{k=1}^{+\infty} \Im\{Xk\} \sin(2\pi k f_0 t)) \Leftrightarrow x_e(t) = -\sum_{k=1}^{+\infty} 2\Im\{X_k\} \sin(2\pi k f_0 t).$$

<u>2ος τρόπος:</u>

Θα μπορούσαμε να δουλέψουμε με το μονόπλευρο ανάπτυγμα Fourier. Για το άρτιο μέρος, θα είχαμε:

$$2x_e(t) = x(t) + x(-t) = 2A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(-2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

$$= 2A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k(\cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) + \cos(-2\pi k f_0 t + \phi_k)).$$

Χρήσιμη είναι η ταυτότητα $\cos(\theta) + \cos(\phi) = 2\cos(\frac{\theta+\phi}{2})\cos(\frac{\theta-\phi}{2})$.

$$2x_e(t) = 2A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k 2\cos(\phi_k)\cos(2\pi k f_0 t) = 2A_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k|\cos(\phi_k)\cos(2\pi k f_0 t)$$

$$= 2(A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k|\cos(\phi_k)\cos(2\pi k f_0 t)) = 2(A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2\Re\{X_k\}\cos(2\pi k f_0 t)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_e(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2\Re\{X_k\}\cos(2\pi k f_0 t).$$

Για το περιττό μέρος, θα είχαμε:

$$2x_o(t) = x(t) - x(-t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) - \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(-2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} A_k (\cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) - \cos(-2\pi k f_0 t + \phi_k)).$$

Χρήσιμη είναι η ταυτότητα $\cos(\theta) - \cos(\phi) = -2\sin(\frac{\theta+\phi}{2})\sin(\frac{\theta-\phi}{2})$.

$$2x_o(t) = -\sum_{k=1}^{+\infty} A_k 2\sin(\phi_k)\sin(2\pi k f_0 t) = -2\sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k|\sin(\phi_k)\sin(2\pi k f_0 t)$$

$$= -2\sum_{k=1}^{+\infty} 2\Im\{X_k\}\sin(2\pi k f_0 t)) \Leftrightarrow x_o(t) = -\sum_{k=1}^{+\infty} 2\Im\{X_k\}\sin(2\pi k f_0 t).$$

3. α) Το σήμα $y(t)$ είναι το:

$$y(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ -1, & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

του οποίου γνωρίζουμε από όμοιο σήμα της θεωρίας τους συντελεστές Fourier, και αυτοί είναι:

$$Y_k = \begin{cases} \frac{2}{j\pi k}, & \text{k odd} \\ 0, & \text{k even} \end{cases}$$

β) Είναι:

$$Y_k = j2\pi k f_0 X_k \Leftrightarrow X_k = \frac{Y_k}{j2\pi k f_0}$$

$$X_k = \begin{cases} \frac{\frac{2}{j\pi k}}{j2\pi k f_0} = -\frac{1}{\pi^2 k^2 f_0} = \frac{1}{\pi^2 k^2 f_0} e^{j\pi}, & \text{k odd} \\ 0, & \text{k even} \end{cases}$$

ενώ εύκολα δείχνουμε ότι $X_0 = \frac{1}{2}$.

4. Ξέρουμε την ιδιότητα της μετατόπισης για τη σειρά Fourier, η οποία είναι:

$$x(t-t_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 (t-t_0)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0} e^{j2\pi k f_0 t},$$

δηλ. οι συντελεστές Fourier του μετατοπισμένου σήματος κατά t_0 δεξιά, $x(t-t_0)$, είναι $Y_k = X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}$.

Μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$x(at) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 a t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k (a f_0) t},$$

που σημαίνει ότι το σήμα $x(at)$ έχει τους ίδιους συντελεστές Fourier αλλά είναι περιοδικό με περίοδο $\frac{T_0}{a}$, και όπως φαίνεται και στο ανάπτυγμα, έχει θεμελιώδη συχνότητα af_0.

Ο συνδυασμός των παραπάνω μας δίνει:

$$x(at-1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{-j2\pi k f_0} e^{j2\pi k a f_0 t} = \sum_{\text{k odd}} \frac{2A}{j\pi k} e^{-j2\pi k f_0} e^{j2\pi k a f_0 t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2A}{j\pi(2k+1)} e^{-j2\pi(2k+1) f_0} e^{j2\pi(2k+1) a f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2A}{\pi(2k+1)} e^{-j(2\pi(2k+1) f_0 + \frac{\pi}{2})} e^{j2\pi(2k+1) a f_0 t}$$

Ένας πιο απλός τρόπος θα ήταν ο εξής:

Είναι $x(at-1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 (at-1)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{-j2\pi k f_0} e^{j2\pi k a f_0 t}$.

Με τις αντίστοιχες αλλαγές για τα περιττά k, έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα.

<u>Σημείωση:</u>

Έστω το σήμα $y(t) = x(\frac{t-b}{h})$, με X_k οι συντελεστές Fourier του $x(t)$. Το $y(t)$ αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως:

$$y(t) = x(\frac{t-b}{h}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 \frac{t-b}{h}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{-j2\pi k \frac{b}{h} f_0} e^{j2\pi k \frac{f_0}{h} t},$$

και φαίνεται ότι για $h = b = \frac{1}{a}$, έχουμε ότι οι συντελεστές Fourier είναι οι:

$$Y_k = X_k e^{-j2\pi k \frac{b}{h} f_0},$$

με νέα θεμελιώδη συχνότητα την $\frac{f_0}{h}$.

5. a)

```
T0 = 2;         % what is the period (in sec)? I choose whatever I like, for
% example, 2 secs.
d = T0/600;     % how many samples per period do I want?
D = 3;          % how many periods do I want to see?

N = 10;         % how many components of the Fourier Series will I use?
A0 = 1/2;       % the first component, A0, is equal to 1/2.
k = 0:N-1;
f0 = 1/T0;
Ak = 2./((pi^2).*((2*k + 1).^2).*f0);  % the 10 Fourier components

t = 0:d:D*T0;  % time t
w0 = 2*pi/T0;  % angular frequency

x = A0 + Ak * cos( ((2*k'+1)*w0) * t + pi); plot(t,x); xlabel('Time in
sec'); ylabel('Amplitude'); title('Exercise 3!!!');
```

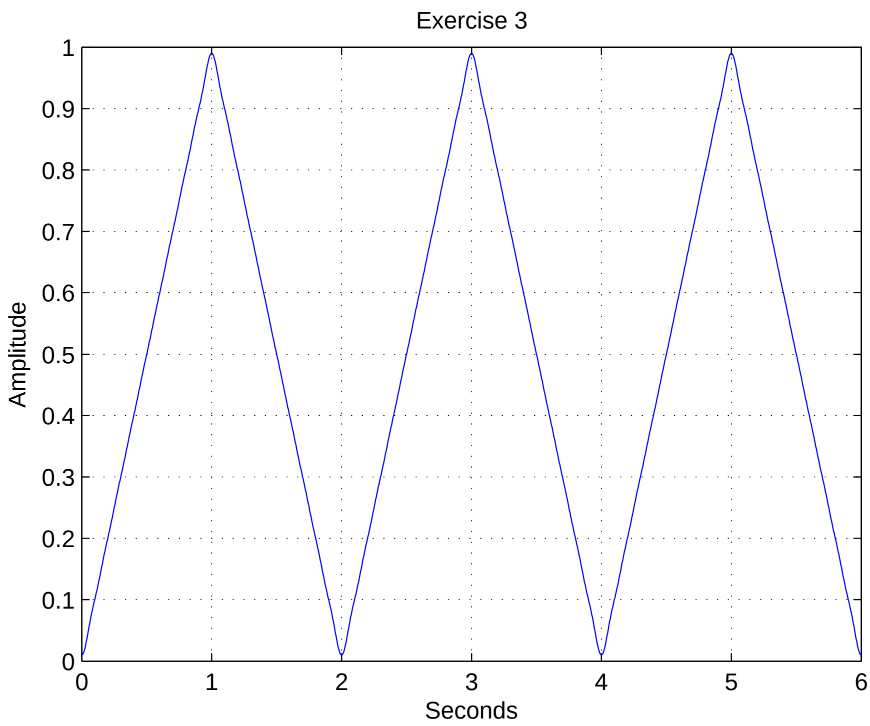
b)

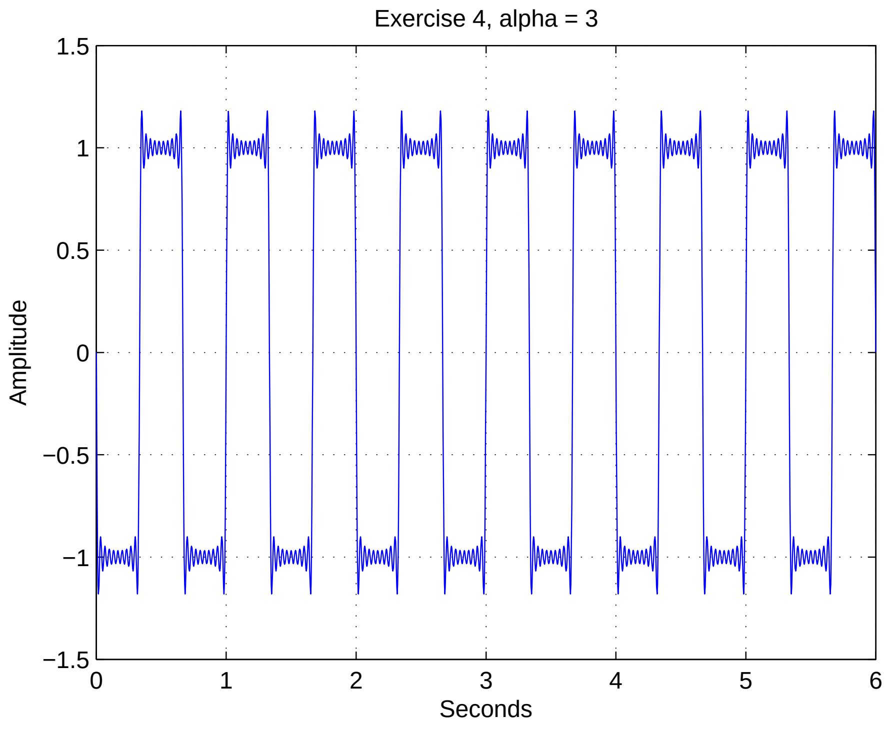
```
T0 = 2;         % what is the period (in sec)? I choose whatever I like, for
% example, 2 secs.
d = T0/600;     % how many samples per period do I want?
```

```
D = 3;          % how many periods do I want to see?
alpha = 3;      % alpha parameter
A = 2;          % amplitude parameter
N = 10;         % how many components of the Fourier Series will I use?
A0 = 0;         % the first component, A0, is equal to 0.
k = 0:N-1;
f0 = 1/T0;
Ak = 2*A./(pi.*(2*k + 1));  % the 10 Fourier components

t = 0:d:D*T0;  % time t
w0 = 2*pi/T0;  % angular frequency

x = A0 + Ak * cos(2*pi*f0*(2*k' + 1)*(1 + alpha*t) - pi/2); plot(t,x); xlabel('Tim
```




Exercise 4, alpha = 3
Amplitude
Seconds
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
0
1
2
3
4
5
6