ΗΥ215: Λύσεις 1ης σειράς ασκήσεων

1. Είναι:

   $f(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0 \Leftrightarrow$ (πολλαπλασιάζουμε με 4α)

   $4\alpha z^2 + 4\alpha\beta z + 4\alpha\gamma = 0 \Leftrightarrow$

   $4\alpha z^2 + 4\alpha\beta z = -4\alpha\gamma \Leftrightarrow$ (θέλουμε την ταυτότητα (2αz + β)^2, άρα προσθέτουμε και στα δυο μέλη της εξίσωσης το β^2)

   $(2\alpha z)^2 + 4\alpha\beta z + \beta^2 = -4\alpha\gamma + \beta^2 \Leftrightarrow$

   $(2\alpha z + \beta)^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Leftrightarrow$

   $2\alpha z + \beta = \pm\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} \Leftrightarrow$

   $2\alpha z = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} \Leftrightarrow$ (α $\neq$ 0)

   $z = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$, που είναι και το ζητούμενο.

2. 1. $x_1(t) = 2je^{j5t} = 2e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j5t}$, γιατί $e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = 0 + 1j = j$.

   Αρα, $x_1(t) = 2e^{j(5t+\frac{\pi}{2})}$, το οποίο είναι της μορφής $Ae^{j(\omega_0 t+\phi)}$, που γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι είναι περιοδικό με περίοδο $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{5}$.

   2. $x_2(t) = e^{(-3+2j)t} = e^{-3t}e^{j2t}$. Εδώ έχουμε γινόμενο δυο σημάτων. Το e^{j2t} είναι περιοδικό με περίοδο $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Όμως το e^{-3t} είναι μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του t, προφανώς μη περιοδική. Το γινόμενο λοιπόν ενός περιοδικού με ένα μη περιοδικό σήμα είναι ΜΗ περιοδικό σήμα.

   3. $x_3(t) = 3\sin t + 2\sin 3t$, το οποίο για να πούμε αν είναι περιοδικό πρέπει να βρούμε το ΜΚΔ των συχνοτήτων. Είναι $\omega_0 = \text{ΜΚΔ}\{1, 3\} = 1$, άρα είναι περιοδικό με περίοδο

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$.

4. $x_4(t) = 6 + 2\sin 2t + 4\cos 7t$. Όμοια με παραπάνω, θα έχουμε $\omega_0 = \text{ΜΚΔ}\{2, 7\} = 1$, άρα είναι περιοδικό με περίοδο $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$. Προσέξτε ότι ο σταθερός όρος 6 δεν αλλάζει την περιοδικότητα του σήματος.

5. $x_5(t) = 2\sin 2t + 4\cos 7\pi t$. Όμοια με παραπάνω, θα έχουμε $\omega_0 = \text{ΜΚΔ}\{2, 7\pi\}$, που όμως δεν υπάρχει! Άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.

Σημείωση:

1. Σε όλα τα παραπάνω θα μπορούσαμε να δουλέψουμε με το ΕΚΠ αντί για το ΜΚΔ. Μόνο που τότε θα ψάχναμε το ΕΚΠ των ΠΕΡΙΟΔΩΝ, κι όχι των συχνοτήτων, όπως κάναμε με το ΜΚΔ. Το αποτέλεσμα θα ήταν ίδιο. Για παράδειγμα, για το $x_4(t)$, θα είχαμε $\text{ΕΚΠ}\{\pi, \frac{2\pi}{7}\} = 2\pi$, γιατί τα ακέραια πολλαπλάσια του π είναι τα $\{\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi ...\}$, ενώ του $\frac{2\pi}{7}$ είναι τα $\{\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}, \frac{8\pi}{7}, \frac{10\pi}{7}, \frac{12\pi}{7}, \frac{14\pi}{7} = 2\pi, \frac{16\pi}{7} ...\}$, και το μικρότερο κοινό στοιχείο από αυτά τα δυο σύνολα είναι το 2π. Άρα αυτό αποτελεί και την περίοδο T_0 του σήματος.
2. Η εκφώνηση ζητεί να βρούμε πρώτα αν τα σήματα είναι περιοδικά και μετά να βρούμε την περίοδο. Για τα παραδείγματα 3, 4, 5, η απόλυτα ακριβής λύση από μαθηματικής πλευράς θα ήταν να δείξουμε ότι ο λόγος των περιόδων, $\frac{T_1}{T_2}$, δυο σημάτων που αθροίζονται, είναι λόγος ΑΚΕΡΑΙΩΝ αριθμών.

Για παράδειγμα, στο $x_4(t)$, είναι $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{7}} = \frac{7}{2}$, που είναι λόγος ακεραίων αριθμών, άρα το σήμα είναι περιοδικό. Αντίθετα, στο $x_5(t)$, είναι $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{\frac{2}{7}} = \frac{7\pi}{2}$, που ΔΕΝ είναι λόγος ακεραίων αριθμών, άρα το σήμα ΔΕΝ είναι περιοδικό. Λέγοντας τα παραπάνω, μπορούμε μετά να βρούμε την περίοδο με όποιο τρόπο θέλουμε (ΕΚΠ περιόδων, ΜΚΔ συχνοτήτων). Συνήθως δε ζητείται τόση αυστηρότητα στις λύσεις σας, καλό είναι όμως να γνωρίζετε και κάτι παραπάνω...

3. Είναι:

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2}(3-2t), & 1 \leq t < 3 \\ 0, & elsewhere \end{cases}$$

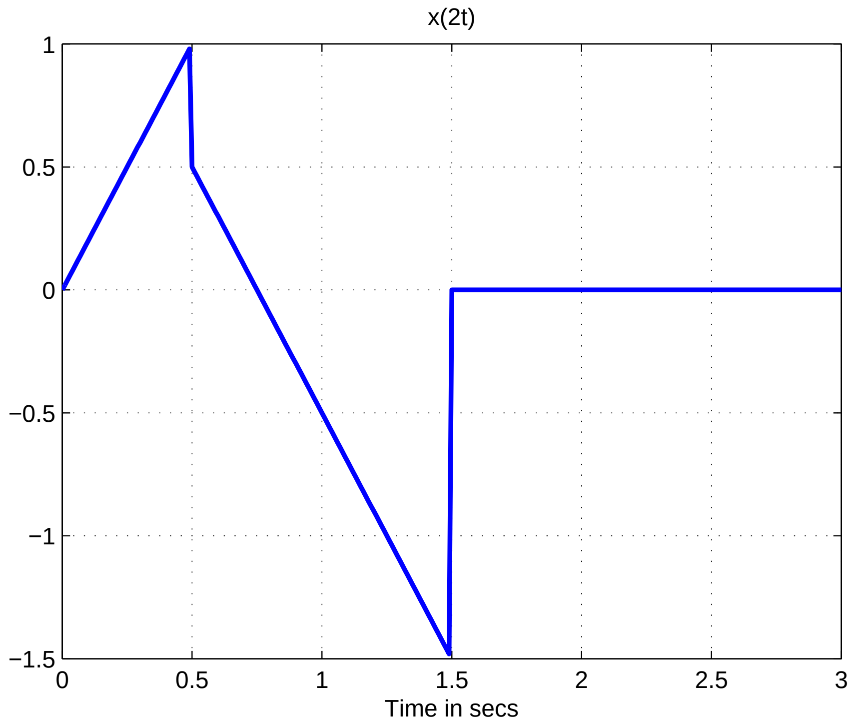
Το $x(2t)$ θα είναι:

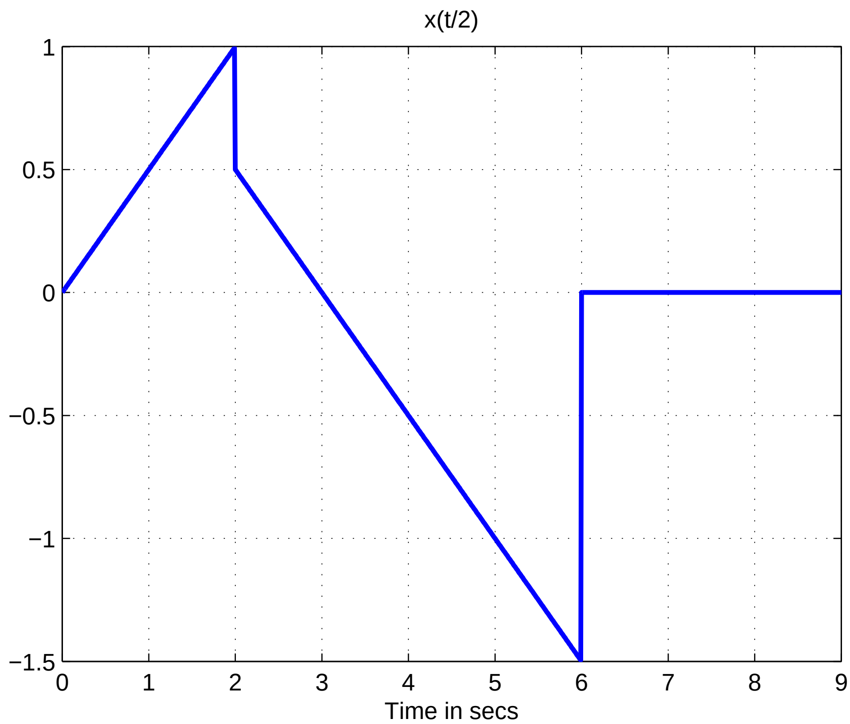
$$x(2t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leq 2t < 1 \\ \frac{1}{2}(3-4t), & 1 \leq 2t < 3 \\ 0, & elsewhere \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(3-4t), & \frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{2} \\ 0, & elsewhere \end{cases}$$

Το $x(\frac{t}{2})$ θα είναι:

$$x(\tfrac{t}{2}) = \begin{cases} \frac{t}{2}, & 0 \leq \frac{t}{2} < 1 \\ \frac{1}{2}(3-2\frac{t}{2}), & 1 \leq \frac{t}{2} < 3 \\ 0, & elsewhere \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{t}{2}, & 0 \leq t < 2 \\ \frac{1}{2}(3-t), & 2 \leq t < 6 \\ 0, & elsewhere \end{cases}$$

Οι γραφικές παραστάσεις των δυο σημάτων φαίνονται παρακάτω:


x(2t)
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
Time in secs


x(t/2)
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
Time in secs

4. Το $x(t)$ θα έχει τη μορφή

$$x(t) = \begin{cases} y(t), & t \geq 3 \\ 0, & t < 3 \end{cases},$$

με $y(t)$ μια τυχαία συνάρτηση του t που περιγράφει το $x(t)$ στο διάστημα $t \geq 3$. Δε μας ενδιαφέρει ποια είναι αυτή ή τι γίνεται εκεί. Μας ενδιαφέρει να δούμε τι γίνεται στο διάστημα που τα σήματά μας είναι μηδέν, όπως ζητάει η άσκηση.

Το $x(1-t)$ θα είναι το:

$$x(1-t) = \begin{cases} y(1-t), & 1-t \geq 3 \\ 0, & 1-t < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1-t), & t \leq -2 \\ 0, & t > -2 \end{cases}$$

Άρα το διάστημα που το $x(1-t)$ είναι μηδέν είναι το $t > -2$.

Το $x(2-t)$ -που ζητείται έμμεσα παρακάτω- θα είναι το:

$$x(2-t) = \begin{cases} y(2-t), & 2-t \geq 3 \\ 0, & 2-t < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(2-t), & t \leq -1 \\ 0, & t > -1 \end{cases}$$

Άρα το διάστημα που το $x(2-t)$ είναι μηδέν είναι το $t > -1$.

Το $x(1-t) + x(2-t)$ θα είναι το:

$$x(1-t) + x(2-t) = \begin{cases} w(t), & 1-t \geq 3, or, 2-t \geq 3 \\ 0, & 1-t < 3, or, 2-t \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w(t), & t \leq -1 \\ 0, & t > -1 \end{cases}$$

Άρα το διάστημα που το $x(1-t) + x(2-t)$ είναι μηδέν είναι το $t > -1$.

Το $x(1-t)x(2-t)$ θα είναι το:

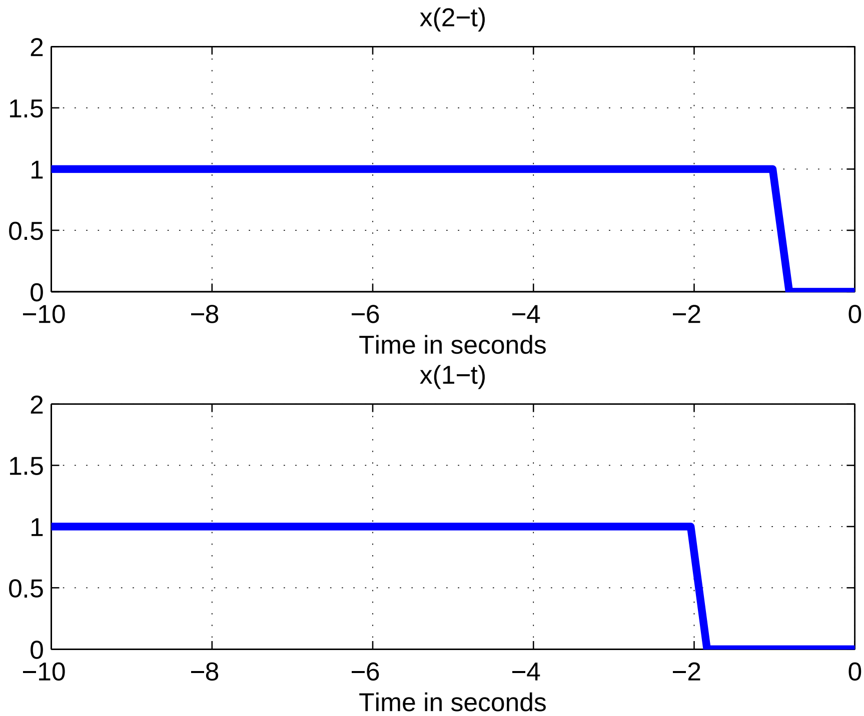
$$x(1-t)x(2-t) = \begin{cases} g(t), & 1-t \geq 3, and, 2-t \geq 3 \\ 0, & 1-t < 3, and, 2-t \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(t), & t \leq -2 \\ 0, & t > -2 \end{cases}$$

Άρα το διάστημα που το $x(1-t)x(2-t)$ είναι μηδέν είναι το $t > -2$.

Τα $g(t), w(t)$ παραπάνω προφανώς καταλαβαίνετε ότι είναι τα $y(1-t)+y(2-t)$ και $y(1-t)y(2-t)$ αντίστοιχα, απλά δε μας ενδιαφέρουν, οπότε τα γράψαμε πιο συμβολικά για λόγους συντομίας.

Σημείωση:

Στην περαιτέρω κατανόηση της άσκησης θα σας βοηθήσει το παρακάτω σχήμα.



Σχηματικά, πολλαπλασιάστε σημείο προς σημείο τα δυο σήματα για να βρείτε που μηδενίζεται το σήμα $x(1-t)x(2-t)$ και προσθέστε σημείο προς σημείο αντίστοιχα για να βρείτε που μηδενίζεται το σήμα $x(1-t)+x(2-t)$. Το αποτέλεσμα θα πρέπει να σας βγαίνει ίδιο με αυτό που βρήκαμε παραπάνω. Εδώ θεωρούμε ότι η $y(t)$ που αναφέραμε παραπάνω είναι σταθερή και ίση με 1 (χωρίς βλάβη της γενικότητας). Αυτός ο σχηματικός τρόπος λύσης (με τις κατάλληλες εξηγήσεις) είναι εξίσου σωστός με όσα γράψαμε παραπάνω!

5. Η περίοδος του σήματος είναι $\omega_0 =$ΜΚΔ$\{1,5,8\} = 1$, άρα $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi$.

Για να σχεδιάσουμε φάσμα πλάτους και φάσης, πρέπει να έχουμε άθροισμα συνημιτόνων και με όλα τα πλάτη τους θετικά. Άρα θα είναι:

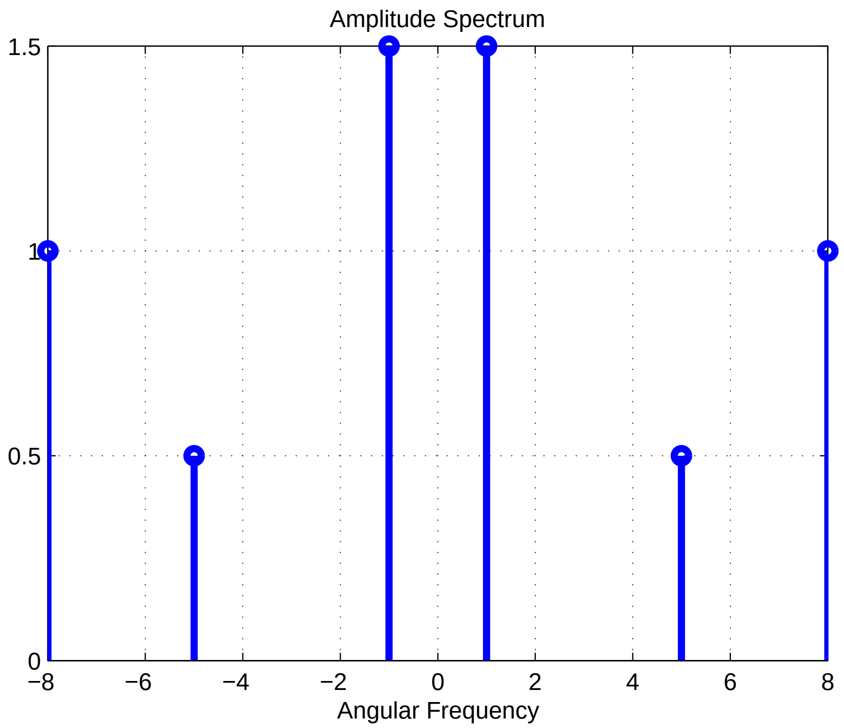
$$x(t) = 3\cos(t) + \sin(5t - \frac{\pi}{6}) - 2\cos(8t - \frac{\pi}{3}) =$$

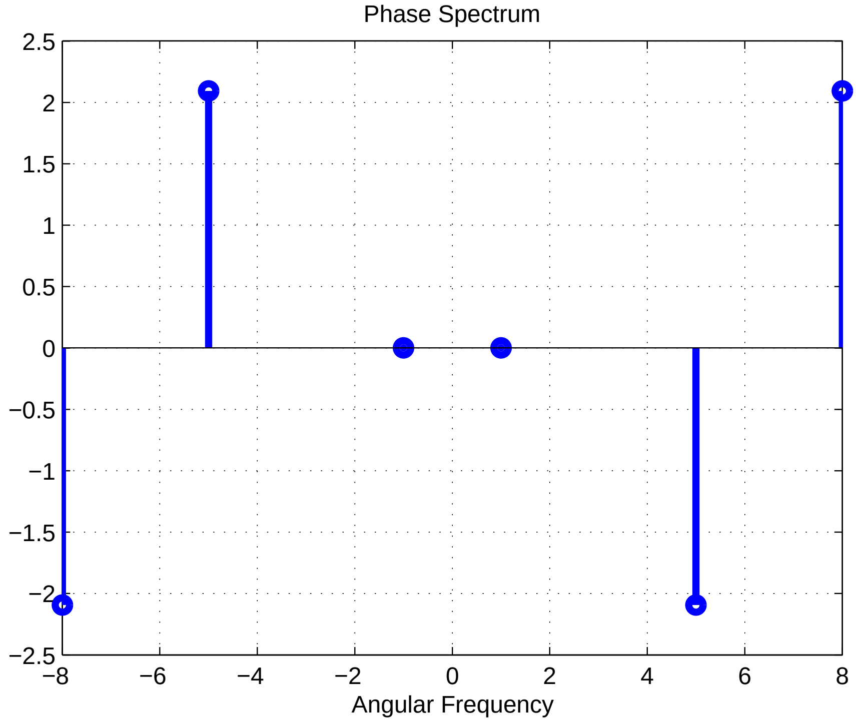
$$3\cos(t) + \cos(5t - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}) + 2\cos(8t - \frac{\pi}{3} + \pi)$$

$$3\cos(t) + \cos(5t - \frac{2\pi}{3}) + 2\cos(8t + \frac{2\pi}{3})$$

$$\frac{3}{2}(e^{jt} + e^{-jt}) + \frac{1}{2}(e^{j5t}e^{-j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j5t}e^{j\frac{2\pi}{3}}) + e^{j8t}e^{j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j8t}e^{-j\frac{2\pi}{3}}.$$

Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.





6. Σας παραπέμπουμε στη λύση της άσκησης 4, 1η σειρά ασκήσεων, Άνοιξη 2009. :-)