ΗΥ215: 2^{η} Σειρά Ασκήσεων

14 Μαρτίου 2010

Παράδοση: 22 Μαρτίου 2010

Απορίες:yannis@csd.uoc.gr

1. Έστω ότι το περιοδικό σήμα $x(t)$ αναπτύσσεται σε σειρά Fourier με συντελεστές X_k. Δείξτε ότι το περιοδικό με την ίδια περίοδο σήμα:
$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$
αναπτύσσεται σε σειρά Fourier με συντελεστές $Y_k = 2\pi k f_0\, X_k$, όπου $T_0 = 1/f_0$ είναι η περίοδος των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$.

2. Έστω ότι το περιοδικό πραγματικό σήμα $x(t)$ αναπτύσσεται σε σειρά Fourier με συντελεστές X_k. Δείξτε ότι το άρτιο $x_e(t)$ και περιττό μέρος, $x_o(t)$, του σήματος αναπτύσσονται ως
$$\begin{aligned} x_e(t) &\rightarrow X_0 + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} 2Re\{X_k\}\cos(2\pi k f_0 t) \\ x_o(t) &\rightarrow -\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} 2Im\{X_k\}\sin(2\pi k f_0 t) \end{aligned}$$

3. Έστω το σήμα
$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 2-t, & 1 \le t < 2 \end{cases}$$
είναι περιοδικό με περίοδο $T_0 = 2$ και αναπτύσσεται σε σειρά Fourier με συντελεστές X_k.

   (α′) Υπολογίστε το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier του σήματος
$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

   (β′) Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της Άσκησης 1 παραπάνω, βρείτε τους συντελεστές X_k.

4. Έχουμε δείξει ότι το περιοδικό σήμα:
$$x(t) = \begin{cases} A & 0 \le t < T_0/2 \\ -A & T_0/2 \le t < T_0 \end{cases}$$
αναπτύσσεται σε σειρά Fourier με συντελεστές
$$X_k = \begin{cases} \frac{2A}{j\pi k} & k \text{ περιττά} \\ 0 & k \text{ άρτια} \end{cases}$$

Υπολογίστε τους συντελεστές του αναπτύγματος σε σειρά Fourier του σήματος $x(at-1)$ όπου a είναι ένας ακέραιος θετικός αριθμός.

5. Σε αυτή την άσκηση θα χρησιμοποιήσουμε Matlab ώστε να μπορούμε να ελέγχουμε αν οι απαντήσεις μας στις ασκήσεις είναι σωστές. Σημαντική σημείωση: εσείς ΠΡΕΠΕΙ να λύσετε τις ασκήσεις ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ. Εδώ απλώς μαθαίνουμε πως να ελέγχουμε τα αποτελέσματά μας με το Matlab.

   Στο μάθημα έχουμε δείξει ότι η ανάπτυξη σε σειρά Fourier του σήματος:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T_0/2 \\ -1 & T_0/2 \leq t < T_0 \end{cases}$$

   είναι:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\left[(2k+1)\omega_0 t\right] \\ &= \frac{4}{\pi}(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\,\omega_0 t) + \frac{1}{5}\sin(5\,\omega_0 t) + \cdots) \end{aligned}$$

   Το παρακάτω πρόγραμμα σε Matlab υπολογίζει μια προσέγγιση του σήματος $x(t)$ χρησιμοποιώντας τη σειρά Fourier με 10 όρους. Αναλύστε το πρόγραμμα γραμμή προς γραμμή. Για απορίες στείλτε email στη λίστα. Στην προσπάθειά σας να καταλάβετε, συμβουλή μου είναι να δουλεύετε παραδείγματα με μικρά διανύσματα (π.χ. 4 διαστάσεων και όχι των 100000).

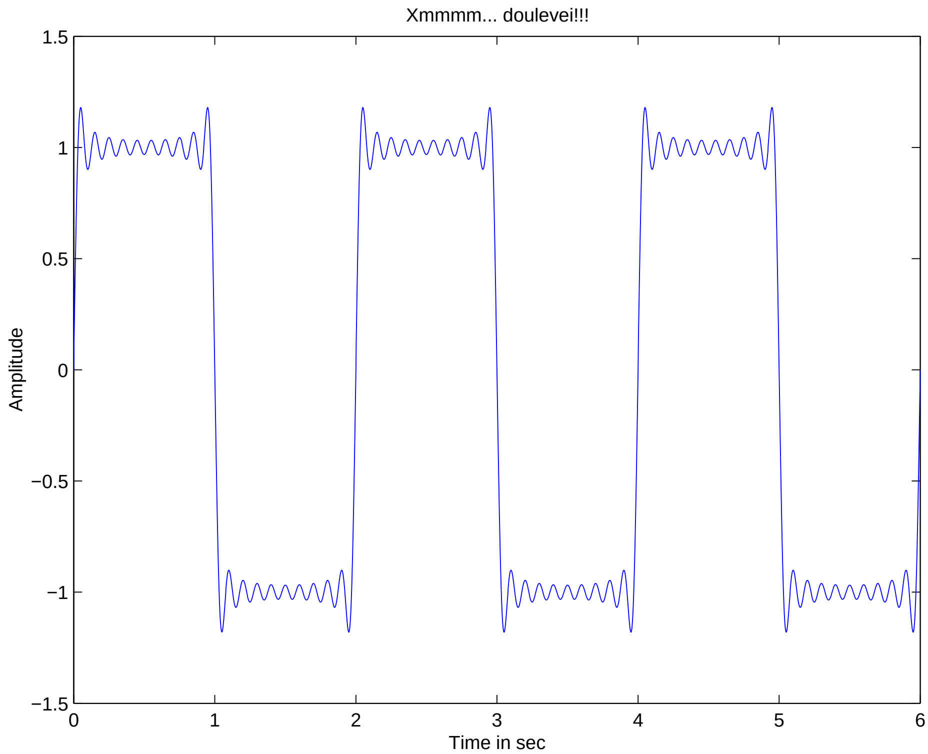
```
To =2;          % posh einai h periodo (se sec)? epilegw mia pou na mou aresei. p.x.
d = To/600;     % posa shmeia ana periodo thelw na exw?
D = 3;          % poses periodous thelw na dw?

N = 10;         % posous orous sth seira Fourier tha xrhsimopoihsw?
Ao = 0;         % o prwtos oros einai mhden
k = 0:N-1;
Ak = 4/pi * 1./(2*k+1);  % oi 10 oroi Fourier

t = 0:d:D*To; % xronos t
w0 = 2*pi/To; % kuklikh suxnothta

 x = Ao + Ak*sin( ((2*k'+1)*w0) * t); plot(t,x); xlabel('Time in
```

```
sec'); ylabel('Amplitude'); title('Xmmmm... doulevei!!!');
```



Με βάση τα παραπάνω, γράψτε τον αντίστοιχο κώδικα σε Matlab για τις ασκήσεις 3 και 4.